

*Álgebra*  
*POTI/TOPMAT UFPR*  
*Nível 3*

*3<sup>a</sup> edição*

*2024*

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM  
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral: Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam

Coordenadores: Fernanda de Oliveira de Jesus  
Leonardo Knelsen  
Mahmut Telles Cansiz

Site: <http://poti.ufpr.br/>

E-mail: [poti@ufpr.br](mailto:poti@ufpr.br)

Capa: Luciana Laroca

Impressão: Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

---

# Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de pro-

duzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afincado e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

*Prof. Dr. José Carlos Eidam  
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024  
Departamento de Matemática - UFPR  
Janeiro de 2024*

# Sumário

<b>Apresentação</b>	<b>iii</b>
<b>Introdução</b>	<b>ix</b>
<b>1 Equações do Segundo Grau</b>	<b>1</b>
1.1 Introdução . . . . .	1
1.2 Equações do Segundo Grau Incompletas . . . . .	2
1.3 Completamento de Quadrados . . . . .	3
1.4 A Fórmula de Bhaskara . . . . .	4
1.5 Método de Soma e Produto . . . . .	6
1.6 Um Outro Método . . . . .	9
1.7 Equações Quadráticas com Módulo . . . . .	10
<b>2 Polinômios</b>	<b>19</b>
2.1 Introdução . . . . .	19
2.2 Definição de Polinômio . . . . .	19
2.3 Definições básicas . . . . .	20
2.3.1 Grau de um polinômio . . . . .	20
2.3.2 Valor numérico . . . . .	20
2.3.3 Multiplicidade das Raízes de um Polinômio . . . . .	21
2.4 Igualdade de polinômios . . . . .	21
2.5 Divisão de polinômios . . . . .	22
2.5.1 Introdução à Divisão de Polinômios . . . . .	22
2.5.2 Método da Chave . . . . .	23

2.5.3	Divisão de um polinômio por um binômio da forma $ax + b$ . . . . .	25
2.5.4	Teorema do Resto . . . . .	27
2.5.5	Divisão de um polinômio por um binômio da forma $x + b$ . . . . .	30
2.5.6	Teorema de D'Alembert . . . . .	31
2.5.7	O Dispositivo de Briot-Ruffini . . . . .	32
2.5.8	Teorema das Raízes Racionais (ou teste das raízes racionais) . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Relações de Girard</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	43
3.2	Relações de Girard para uma Equação Polinomial de Grau 2 . . . . .	43
3.3	Relações de Girard para uma Equação Polinomial de Grau 3 . . . . .	44
3.4	Generalização . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Números Complexos</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Unidade Imaginária e Forma Algébrica . . . . .	55
4.3	Operações com Números Complexos . . . . .	56
4.3.1	Soma de Números Complexos . . . . .	56
4.3.2	Produto de Números Complexos . . . . .	57
4.3.3	Divisão Entre Números Complexos . . . . .	58
4.4	Classificação dos Números Complexos . . . . .	59
4.5	Equações do Segundo Grau com Raízes Imaginárias	61
4.6	Interpretação Geométrica dos Complexos . . . . .	63
4.7	O conjugado e suas propriedades . . . . .	64
4.7.1	Propriedades do conjugado . . . . .	65
4.8	Potências da unidade imaginária . . . . .	67
4.9	Forma Trigonométrica . . . . .	69
4.9.1	Como Determinar a Forma Trigonométrica de Um Número Complexo . . . . .	69
4.9.2	Multiplicação na Forma Trigonométrica . . . . .	74
4.9.3	Divisão na Forma Trigonométrica . . . . .	75

<b>5</b>	<b>Equações de Grau Maior do Que 2</b>	<b>83</b>
5.1	Introdução . . . . .	83
5.2	Passos para Resolver uma Equação de Grau Maior do Que 2 . . . . .	83
5.3	Relações de Girard . . . . .	85
5.4	Se Uma Raiz é Complexa . . . . .	88
5.5	Mudança de Variável . . . . .	91
5.6	Fatoração em Polinômios de Grau Menor . . . . .	94
5.7	Procurar Possíveis Raízes Racionais e Reduzir o Grau	97
5.8	Identificar Equações Recíprocas e Resolvê-las . . . .	100
5.8.1	Definição de Equação Recíproca . . . . .	100
5.8.2	Classificações das Equações Recíprocas . . .	101
5.8.3	-1 e 1 Como Soluções . . . . .	104
5.8.4	Técnica para Resolver uma Equação Recíproca	106
5.9	Resolver Equações do Tipo $f(f(f(\dots(f(x)))) = x$ . .	108
<b>6</b>	<b>Progressões Aritmética e Geométrica</b>	<b>117</b>
6.1	Introdução . . . . .	117
6.2	Progressões Aritméticas (P.A.'s) . . . . .	117
6.2.1	Definição de P.A. . . . .	117
6.2.2	Classificações das P.A.'s . . . . .	118
6.2.3	Fórmula do Termo Geral de uma P.A. . . . .	119
6.2.4	Soma dos Termos de uma P.A. Finita . . . .	120
6.2.5	Uma Escrita Conveniente dos Termos de uma P.A. . . . .	124
6.3	Progressões Geométricas (P.G.'s) . . . . .	124
6.3.1	Definição de P.G. . . . .	124
6.3.2	Classificações das P.G.'s . . . . .	125
6.3.3	Fórmula do Termo Geral de uma P.G. . . . .	126
6.3.4	Soma dos $n$ Primeiros Termos de uma P.G. .	126
6.3.5	Soma dos Termos de uma P.G. Decrescente Infinita . . . . .	127
6.3.6	Produto dos $n$ Primeiros Termos de uma P.G.	128

<b>7</b>	<b>Princípio da Indução Finita</b>	<b>135</b>
7.1	Introdução . . . . .	135
7.2	O Princípio da Indução Finita . . . . .	135
7.2.1	Sobre igualdades e desigualdades . . . . .	135
7.2.2	Motivação . . . . .	136
7.2.3	Analogia com o Efeito Dominó . . . . .	137
7.2.4	Explicação do Princípio da Indução Finita . . . . .	138
7.2.5	Princípio da Indução Forte . . . . .	141
<b>8</b>	<b>Recorrências</b>	<b>151</b>
8.1	Introdução . . . . .	151
8.2	Conceitos Básicos . . . . .	151
8.2.1	Sequências Numéricas Sem Regra de Formação	151
8.2.2	Sequências Numéricas Com Regra de Formação	152
8.3	Equações de Recorrência . . . . .	153
8.4	Recorrências Lineares de Primeira Ordem . . . . .	153
8.4.1	Encontrando Fórmulas Fechadas . . . . .	154
8.5	Recorrências Lineares Homogêneas de Segunda Ordem	158

# Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas

olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo “eu já sei, já estudei isso”. Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

*Equipe POTI/TOPMAT*

*Nível 3*

*2024*

# Aula 1

## Equações do Segundo Grau

### 1.1 Introdução

Uma equação do segundo grau, ou equação quadrática, é uma equação da forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $x$  é uma variável real a ser determinada. Dessa forma, são exemplos de equações do segundo grau:

- $x^2 + x = 0$
- $2x^2 + 5 = 0$
- $3x^2 + 5x + 2 = 0$

As soluções de uma equação do segundo grau, ou seja, os valores de  $x$  tais que  $ax^2 + bx + c = 0$  podem ser obtidos de diferentes maneiras. Primeiramente, apresentaremos métodos de resolução eficazes para equações do segundo grau incompletas.

## 1.2 Equações do Segundo Grau Incompletas

Trabalharemos nessa seção a resolução de uma equação do segundo grau quando um dos seus coeficientes é nulo. Então seja a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , com  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Temos os seguintes casos:

- Se  $b = 0$ :

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow ax^2 + c = 0 \\&\Rightarrow ax^2 = -c \\&\Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \\&\Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}.\end{aligned}$$

E assim determinamos as soluções da equação dada quando  $b = 0$ .

**Exemplo 1.1.** Resolva a equação  $2x^2 - 16 = 0$ .

**Solução:**

$$\begin{aligned}2x^2 - 16 = 0 &\Rightarrow 2x^2 = 16 \\&\Rightarrow x^2 = \frac{16}{2} = 8 \\&\Rightarrow x = \pm\sqrt{8} = \pm\sqrt{2^2 \cdot 2} \\&\Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

- Se  $c = 0$ :

Nesse caso apenas colocamos  $x$  em evidência e analisamos as parcelas do produto, como segue:

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow ax^2 + bx = 0 \\&\Rightarrow x \cdot (ax + b) = 0.\end{aligned}$$

Dessa última igualdade, obtemos que  $x = 0$  ou  $ax + b = 0$ . Do segundo caso temos que:

$$\begin{aligned}ax + b = 0 &\Rightarrow ax = -b \\ &\Rightarrow x = -\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Portanto, quando  $c = 0$  as soluções da equação dada são  $x = 0$  e  $x = -\frac{b}{a}$ .

**Exemplo 1.2.** Resolva a equação  $3x^2 - 4x = 0$ .

**Solução:**

$$3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x \cdot (3x - 4) = 0.$$

Então temos que  $x = 0$  ou  $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$ .

Portanto, as soluções da equação dada são  $x = 0$  e  $x = \frac{4}{3}$ .

Agora vamos trabalhar com métodos resolutivos que funcionam para equações completas e incompletas, a começar pelo método de completamento de quadrados, como segue.

## 1.3 Completamento de Quadrados

O método de completar quadrados consiste em reescrever a equação dada de forma que apareça em um dos lados da igualdade o quadrado de uma soma ou de uma diferença para que possamos aplicar a raiz quadrada em ambos os lados e isolar a incógnita.

**Exemplo 1.3.** Resolver a equação  $x^2 - 6x - 8 = 0$ .

**Solução:**

Somando 8 dos dois lados temos  $x^2 - 6x = 8$ . Agora queremos manipular essa equação de forma a obtermos o quadrado de uma

diferença do lado esquerdo. Então temos:

$$\begin{aligned}x^2 - 6x = 8 &\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 = 8 \\&\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = 8 + 3^2 \\&\Rightarrow (x - 3)^2 = 17..\end{aligned}$$

Então  $x - 3 = \pm\sqrt{17}$  e, portanto, as soluções da equação dada são:

$$x_1 = 3 - \sqrt{17} \text{ e } x_2 = 3 + \sqrt{17}.$$

Observe que, ao aplicarmos o método de completar quadrados em uma equação do segundo grau com coeficientes determinados, chegamos às soluções numéricas dessa equação. Porém, também podemos completar quadrados numa equação do segundo grau com coeficientes arbitrários, ou seja, desconhecidos. Neste caso, obteremos as soluções da equação em função de seus coeficientes, resultando na relação que conhecemos por Fórmula de Bhaskara. Vamos fazer isso a seguir.

## 1.4 A Fórmula de Bhaskara

Considere a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ . Conforme procedemos na seção anterior num caso particular, vamos aplicar nela o completamento de quadrados para obter uma fórmula para encontrarmos os valores da variável  $x$  em função dos coeficientes  $a, b$  e  $c$ , conforme segue: subtraindo  $c$  em ambos os membros, temos  $ax^2 + bx = -c$ .

Repare que, como queremos isolar o valor de  $x$ , não podemos ter a constante  $a$  multiplicada a ele, então vamos dividir toda a equação por  $a$  para obtermos:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}.$$

Agora vamos manipular a equação de forma a obtermos do lado

esquerdo o quadrado de uma soma:

$$\begin{aligned}x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} &\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} = -\frac{c}{a} \\&\Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \\&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} \\&\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}..\end{aligned}$$

Note que se  $b^2 - 4ac$  for um número negativo, a equação dada não terá solução, pois de um lado teremos o quadrado de um número real (sempre não-negativo), e por outro lado, um número negativo, porque  $4a^2 > 0$  para qualquer valor de  $a \neq 0$ . Caso tenhamos  $b^2 - 4ac \geq 0$ , então obtemos:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}},$$

isto é,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}..$$

Por convenção, chamamos o número  $\Delta = b^2 - 4ac$  de discriminante da equação quadrática. Portanto, as soluções de uma equação do segundo grau são da forma:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Resumindo, temos que a quantidade de soluções distintas de uma dada equação do segundo grau depende do sinal do discriminante, como exibimos abaixo:

- Se  $\Delta < 0$ , não existem soluções reais.
- Se  $\Delta = 0$ , existe somente uma solução real (Por quê?).
- Se  $\Delta > 0$ , existem duas soluções reais distintas.

**Exemplo 1.4.** Resolva a equação  $x^2 - 6x - 8 = 0$  usando a Fórmula de Bhaskara.

**Solução:**

Note que se a equação  $x^2 - 6x - 8 = 0$  está escrita na forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , então temos que  $a = 1$ ,  $b = -6$  e  $c = -8$ . Pela Fórmula de Bhaskara temos:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 32}}{2} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{68}}{2} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{4 \cdot 17}}{2} \\
 &= \frac{6 \pm 2\sqrt{17}}{2} = 3 \pm \sqrt{17}..
 \end{aligned}$$

Portanto, as soluções são  $x_1 = 3 - \sqrt{17}$  e  $x_2 = 3 + \sqrt{17}$ . Note que as soluções condizem com as obtidas anteriormente através do processo direto de completamento de quadrados.

Outra maneira de encontrarmos as soluções de uma equação do segundo grau é através do Método de Soma e Produto, que veremos a seguir.

## 1.5 Método de Soma e Produto

Como vimos anteriormente, as soluções para uma equação do tipo  $ax^2 + bx + c = 0$  são:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

Note que se efetuarmos a soma das soluções teremos:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) + \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

E efetuando o produto temos:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left( \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \cdot \left( \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= \frac{b^2 - \Delta^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Ou seja, dada uma equação da forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , uma maneira alternativa de encontrar as soluções é encontrando os números reais  $x_1$  e  $x_2$  tais que:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ e } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

**Exemplo 1.5.** Encontre as soluções da equação  $x^2 + 9x + 14 = 0$  pelo método de soma e produto.

**Solução:**

Queremos encontrar  $x_1$  e  $x_2$  tais que:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{9}{1} = -9$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{14}{1} = 14$

Por inspeção, temos que os únicos valores de  $x_1$  e  $x_2$  que atendem ambas as identidades acima são  $x_1 = -2$  e  $x_2 = -7$  e, portanto, essas são as soluções da equação dada.

Podemos enunciar o Método de Soma e Produto com a seguinte

**Proposição 1.1.**  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  se, e somente se,  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

**Demonstração:**

Por um lado, se  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , então como já vimos anteriormente, temos que  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

Por outro lado, supondo que  $x_1$  e  $x_2$  são dois números tais que  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , na equação  $ax^2 + bx + c = 0$  vamos colocar  $a$  em evidência (o que pode ser feito pois  $a \neq 0$ ), e assim teremos o seguinte:

$$a \cdot \left( x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \right) = 0,$$

ou ainda,

$$a \cdot \left[ x^2 - \left( -\frac{b}{a} \right) \cdot x + \frac{c}{a} \right] = 0.$$

Identificando a soma e o produto dos números  $x_1$  e  $x_2$ , e substituindo-os com base na igualdade acima, temos:

$$a \cdot [x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2] = 0,$$

isto é,

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0.$$

Note que, como  $ax^2 + bx + c = 0$  é equação do segundo grau, temos que  $a \neq 0$ . Portanto, da igualdade acima, concluímos que  $x - x_1 = 0$  ou  $x - x_2 = 0$  e, com isso, os valores de  $x$  que são soluções da equação dada são  $x = x_1$  e  $x = x_2$ . Disso temos que  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação dada.

Veja que a segunda parte dessa demonstração sugere também o seguinte resultado:

**Proposição 1.2.**  $x_1$  e  $x_2$  são raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  se, e somente se,  $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ .

**Demonstração:**

Por um lado, basta considerar a equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , pôr  $a$  em evidência e substituir  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ , como já fizemos anteriormente.

Por outro lado, supondo  $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ , basta substituir  $x$  por  $x_1$  ou por  $x_2$  no segundo membro da igualdade acima para verificar que ele se anula. Logo  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes da equação quadrática.

## 1.6 Um Outro Método

Uma vez que estabelecemos em seções anteriores os métodos da Fórmula de Bhaskara, e o de Soma e Produto, vamos unir essas ideias num método para resolver equações do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

conforme as ideias do Prof. Po-Shen Loh: Como já sabemos, pela Fórmula de Bhaskara podemos reescrever as soluções conforme segue:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \alpha.$$

Portanto, se  $x_1$  e  $x_2$  resolvem a equação do segundo grau acima, temos que  $x_1 = -b/(2a) - \alpha$  e  $x_2 = -b/(2a) + \alpha$ . Chamando a soma dessas raízes  $x_1 + x_2$  de  $S$ , e o produto delas  $x_1 \cdot x_2$  de  $P$ , temos que o número  $\alpha$  é solução da equação

$$\left(\frac{S}{2} - \alpha\right) \cdot \left(\frac{S}{2} + \alpha\right) = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = P,$$

ou ainda

$$\alpha^2 = \frac{S^2}{4} - P,$$

que possui simples solução. E com isso, as soluções da equação dada são

$$x_1 = \frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} - P} \text{ e } x_2 = \frac{S}{2} - \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}.$$

Vamos ilustrar o método acima com o seguinte

**Exemplo 1.6.** Resolver a equação  $2x^2 - 5x + 3 = 0$  pelo método de Po-Shen Loh.

**Solução:**

Calculando a soma e o produto das raízes pedidas, temos  $S = -(-5)/2 = 5/2$  e  $P = 3/2$ . Para encontrarmos  $\alpha$ , devemos resolver

$$\left(\frac{5}{4} - \alpha\right) \cdot \left(\frac{5}{4} + \alpha\right) = \frac{3}{2},$$

ou

$$\alpha^2 = \frac{25}{16} - \frac{3}{2} = \frac{1}{16}.$$

Portanto, as raízes procuradas são

$$x_1 = \frac{5}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}} = 1,$$

e

$$x_2 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{3}{2}.$$

## 1.7 Equações Quadráticas com Módulo

Seja  $x \in \mathbb{R}$ . Definimos seu módulo da seguinte maneira:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Pela definição de módulo, temos:

- $|0| = 0$  porque  $0 \geq 0$ .

- $|-2| = 2$  porque  $-2 < 0$ .
- $|15| = 15$  porque  $15 \geq 0$ .

**Proposição 1.3.** Seja  $x \in \mathbb{R}$ , então  $|x| \geq 0$ .

**Demonstração:**

Dividiremos a demonstração em dois casos:

- Se  $x < 0$ , então  $|x| = -x$ . Mas se  $x < 0$ , então  $-x > 0 \Rightarrow |x| > 0$ .
- Se  $x \geq 0$ , então  $|x| = x \geq 0$ .

Com isso mostramos que para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $|x| \geq 0$ . □

**Exemplo 1.7.** Mostre que  $|x^2| = |x|^2$ .

**Solução:**

Primeiro vamos demonstrar a igualdade para  $x < 0$  e, em seguida, para  $x \geq 0$ , da seguinte forma:

- Se  $x < 0$ :  $|x^2| = x^2 = (-x)^2 = |x|^2$ .
- Se  $x \geq 0$ :  $|x^2| = x^2 = |x|^2$ .

Assim mostramos que  $|x^2| = |x|^2$ . □

**Proposição 1.4.** Se  $x \in \mathbb{R}$ , então  $|x| = \sqrt{x^2}$ . (Por quê?)

Seja  $a \in \mathbb{R}$ . Vamos analisar as soluções de  $|x| = a$  com base no sinal de  $a$ :

- Se  $a < 0$  não existe solução para  $|x| = a$ , pois  $|x| \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- Se  $a = 0$ , então  $|x| = 0$ . Temos que  $x = 0$  é solução, pois  $|0| = 0$ .

- Se  $a > 0$ , então:

$$\begin{aligned}
 |x| = a &\Rightarrow |x|^2 = a^2 \\
 &\Rightarrow x^2 = a^2 \\
 &\Rightarrow x^2 - a^2 = 0 \\
 &\Rightarrow (x - a) \cdot (x + a) = 0 \\
 &\Rightarrow x - a = 0 \text{ ou } x + a = 0 \\
 &\Rightarrow x = a \text{ ou } x = -a..
 \end{aligned}$$

Uma vez que o valor de  $|x|$  é diferente para  $x$  negativo e  $x$  não-negativo, problemas que envolvem igualdades com módulo exigem a análise de cada caso separadamente, como segue.

**Exemplo 1.8.** Resolva  $|2x + 1| = 3$ .

**Solução:** Primeiramente, vamos igualar o termo  $2x + 1$  a zero e descobrir quais valores de  $x$  tornam a expressão negativa, nula ou positiva:

$$\begin{aligned}
 2x + 1 = 0 &\Rightarrow 2x = -1 \\
 &\Rightarrow x = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Com isso temos os seguintes casos:

- Se  $x < -\frac{1}{2}$ , então  $2x + 1 < 0 \Rightarrow |2x + 1| = -(2x + 1)$ , dessa forma temos:

$$\begin{aligned}
 |2x + 1| = 3 &\Rightarrow -(2x + 1) = 3 \\
 &\Rightarrow -2x - 1 = 3 \\
 &\Rightarrow -2x = 4 \\
 &\Rightarrow x = -\frac{4}{2} \\
 &\Rightarrow x = -2.
 \end{aligned}$$

Repare que  $x = -2$  atende à restrição inicial, de que  $x < -\frac{1}{2}$ . Então  $x = -2$  é uma solução.

- Se  $x \geq \frac{1}{2}$ , então  $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow |2x + 1| = 2x + 1$ . Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} |2x + 1| = 3 &\Rightarrow 2x + 1 = 3 \\ &\Rightarrow 2x = 2 \\ &\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \\ &\Rightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Note que  $x = 1$  atende à restrição desse outro caso, de que  $x \geq -\frac{1}{2}$ . Então  $x = 1$  é a outra solução da equação dada.

**Exemplo 1.9.** Resolva  $|x - 1| = -7$ .

**Solução:**

Como vimos anteriormente, se  $k \in \mathbb{R}$ , então  $|k| \geq 0$ . Ou seja, se  $|x - 1| \geq 0$ , então  $|x - 1| = -7$  não possui solução.

## Problemas Propostos

<span style="color: green;">●</span>	<span style="color: orange;">▲</span>	<span style="color: red;">◆</span>	<span style="color: blue;">★</span>
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Encontre as soluções da equação  $2x^2 - 4x + 2 = 0$  utilizando a fórmula resolvente de Bhaskara, em seguida, utilizando o Método de Soma e Produto, e por fim pelo método de Po-Shen Loh.
2. ● Resolva a equação  $\frac{x - 1}{x - 2} + \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{5}{2}$ .
3. ● Resolva a equação  $(3x - 2) - (x - 3)^2 + 11 = 0$ .
4. ● Resolva a equação  $x^2 + 4|x| - 12 = 0$ .
5. ● Paulo cercou uma região retangular de área  $28m^2$  com 24 metros de corda. Encontre as dimensões dessa região.

6. ▲ Resolva a equação  $\frac{x}{x-2} - \frac{3}{x-1} = \frac{3}{x^2 - 3x + 2}$  sabendo que  $x > 2$ .
7. ▲ Resolva a equação  $2|x^2 - 1| = |4 - x^2|$ .
8. ▲ Sabendo que a equação do segundo grau  $ax^2 + ax + 1 = 0$  possui uma raiz de multiplicidade 2, encontre o valor de  $a$ .
9. ▲ (SBM) Eu compraria algumas garrafas de um bom vinho por 540 reais. Por ter obtido um desconto de 15 reais no preço de cada garrafa, consegui comprar 3 garrafas a mais do que previra originalmente (gastando exatamente 540 reais). Quantas garrafas de vinho comprei?
10. ▲ (Cefet - RJ - 2014) Para qual valor de  $a$  a equação  $(x - 2) \cdot (2ax - 3) + (x - 2) \cdot (-ax + 1) = 0$  tem 2 raízes iguais?
11. ▲ Sabendo que  $x$  é um número real que satisfaz

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}},$$

determine os valores possíveis de  $x$ .

12. ▲ Dizemos que uma sequência de números  $a_n$  satisfaz a relação de Fibonacci se, para todo  $n \geq 0$ , temos que

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Encontre todas as sequências  $a_n$  da forma  $a_n = x^n$  para algum  $x \neq 0$  que satisfaçam a Relação de Fibonacci.

13. ▲ Mostre que se  $b$  é um inteiro não negativo, então a equação  $x^2 + bx + 17 = 0$  não possui raiz inteira positiva.
14. ♦ Se  $x^2 - 4x + 1 = 0$ , determine o valor de  $E = \frac{x^4 + 1}{x^3 + x}$ .

15.  $\blacklozenge$  Numa reunião havia pelo menos 12 pessoas e todos os presentes apertaram as mãos entre si. Descubra quantas pessoas estavam presentes na festa, sabendo que houve menos que 75 apertos de mão.
16.  $\blacklozenge$  (Banco de Questões da OBMEP 2014, nível 3, questão 22): Sejam  $a$  e  $b$  números inteiros positivos tais que  $a > b$ . O professor Matheus disse ao aluno Raul que se ele calculasse o número  $A = a^2 + 4b + 1$ , o resultado seria um quadrado perfeito. Raul, por engano, trocou os números  $a$  e  $b$  e calculou o número  $B = b^2 + 4a + 1$  que, por acaso, também é um quadrado perfeito.
- a) Mostre que  $A = (a + 1)^2$ .
- b) Encontre os números  $a, b, A$  e  $B$ .
17.  $\blacklozenge$  (Banco de Questões da OBMEP 2010, nível 3, questão 24, itens (a) e (b)): Briot (matemático inglês, que viveu de 1817 a 1882) e Ruffini (matemático italiano, que viveu de 1765 a 1822) desenvolveram métodos para encontrar soluções para as equações chamadas recíprocas. Nesta questão você vai desenvolver, passo a passo, a essência desses métodos.
- a) Se  $y = x + \frac{1}{x}$ , calcule as expressões  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  em termos de  $y$ .
- b) Determine todas as raízes reais da equação  $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ .
18.  $\blacklozenge$  (Banco de Questões da OBMEP 2010, nível 3, questão 16): Se 3 e  $\frac{1}{3}$  são as raízes da equação  $ax^2 - 6x + c = 0$ , qual é o valor de  $a + c$ ?
- a) 1
- b) 0
- c)  $\frac{-9}{5}$

- d)  $\frac{18}{5}$   
e) -5
19.  $\blacklozenge$  (Banco de Questões da OBMEP 2010, nível 3, questão 81, Adaptada): Sobre a equação  $2020x^3 + 2019x^2 + 2018x = 0$ , é correto afirmar que:
- a) Não possui raízes reais;
  - b) Possui três raízes reais distintas;
  - c) Possui duas raízes iguais;
  - d) Possui apenas uma raiz real
20.  $\star$  Um pequeno agricultor dispunha de  $100m$  de tela, com a qual pretende cercar uma pequena horta retangular. O objetivo do agricultor é determinar as dimensões da horta para que sua área não seja menor que  $600m^2$ .
21.  $\star$  (CN - 88) A equação do 2º grau  $x^2 - 2x + m = 0$ ,  $m < 0$ , tem raízes  $x_1$  e  $x_2$ . Se  $x_1^{n-2} + x_2^{n-2} = a$  e  $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} = b$ , então  $x_1^n + x_2^n$  é igual a:
- a)  $2a + mb$
  - b)  $2b - ma$
  - c)  $ma + 2b$
  - d)  $ma - 2b$
  - e)  $m(a - 2b)$

---

## Dicas e Soluções

1.  $x = 1$  é raiz de multiplicidade 2.
2.  $x = 0$  ou  $x = 3$ .
3.  $x = 0$  ou  $x = 9$ .

4.  $x = -2$  ou  $x = 2$ .
5. Primeiramente, veja que se  $a$  e  $b$  são os lados do retângulo, então  $2a + 2b = 24$  e  $a \cdot b = 28$ .
6.  $x = 3$  é a única solução.
7.  $x = -\sqrt{2}$  ou  $x = \sqrt{2}$ .
8.  $a = 4$ .
9. Foram compradas 9 garrafas.
10.  $a = -3$  ou  $a = 1$ .
11.  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .
12. Na relação dada, substitua  $a_n$  por  $x^n$  e coloque  $x^n$  em evidência.
13. Analise o discriminante.
14. Repare que da equação  $x^2 - 4x + 1 = 0$  é possível obter  $x^4 + 1$  e  $x^3 + x$ .
15. A parte principal do problema é encontrar uma expressão que represente o número de apertos de mão. Suponha  $n =$  número de pessoas e  $p =$  número de apertos de mão, em seguida, conte o número de apertos que cada pessoa deu, tomando cuidado para não contar apertos repetidos. Após fazer isso,  $p$  poderá ser escrito em função de  $n$  e será possível concluir que haviam 12 pessoas presentes na festa.
16. a) Conclua que  $a^2 < A < (a + 2)^2$  e, portanto,  $A = (a + 1)^2$ .  
b) Conclua que  $(b + 1)^2 < B < (b + 4)^2$ . Em seguida, mostre que é impossível que  $B = (b + 2)^2$  e, portanto,  $B = (b + 3)^2$ . Disso segue que  $b = 4$ ,  $a = 8$ ,  $A = 9^2$  e  $B = 7^2$ .

17. a) Na expressão dada, eleve os dois lados ao quadrado e isole  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ .
- b) Use o resultado obtido no item a). As soluções são  $x = 1$ ,  $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  e  $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .
18. Alternativa d).
19. Alternativa d).
20. Sejam  $a$  e  $b$  os lados do retângulo. Primeiro note que:
- (i)  $2a + 2b = 100$
- (ii)  $a \cdot b \geq 600$
- Isole uma incógnita em (i) e substitua em (ii), obtendo uma inequação. Se você isolar  $b$ , por exemplo, obterá a inequação  $-b^2 + 50b - 600 \geq 0$ . Tente reescrever essa inequação de uma forma conveniente para determinar para quais valores de  $b$  a inequação é satisfeita.
21. Alternativa b).

# Aula 2

## Polinômios

### 2.1 Introdução

Nessa aula estudaremos a definição, solução, igualdade e divisão de polinômios, bem como alguns teoremas relacionados.

### 2.2 Definição de Polinômio

**Definição 2.1.** Uma **função polinomial** ou simplesmente **polinômio** é toda função definida pela relação:

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0.$$

onde:  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$  e  $a$  são números reais chamados **coeficientes**,  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in \mathbb{R}$ .

São exemplos de polinômios:

- $P(x) = 5$
- $F(x) = 3x + 2$
- $G(x) = x^2 + 2x$
- $H(x) = x^4 - x^3 + 10x^2 + 1$

## 2.3 Definições básicas

### 2.3.1 Grau de um polinômio

**Definição 2.2.** O grau de um polinômio é o maior expoente que esse polinômio possui.

Ou seja, se  $a_n \neq 0$ , dizemos que o polinômio

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

possui grau  $n$ , denotamos também por  $gr(P) = n$ .

**Exemplos:**

- $P(x) = 5$  é um polinômio constante, ou seja, de grau 0, ou  $gr(P) = 0$ .
- $F(x) = 3x + 2x$  é um polinômio do primeiro grau, ou então, de grau 1, ou  $gr(F) = 1$ .
- $G(x) = x^2 + 2x$  é um polinômio do segundo grau, ou então, de grau 2, ou  $gr(G) = 2$ .
- $H(x) = x^4 - x^3 + 10x^2 + 1$  é um polinômio de grau 4, ou  $gr(H) = 4$ .

**Observação:** Se  $P(x) = 0$ , não definimos o grau do polinômio, mas podemos dizer que  $P(x) = 0$  é o **polinômio nulo**, pois todos os seus coeficientes são iguais a zero.

### 2.3.2 Valor numérico

**Definição 2.3.** O valor numérico de  $P(x)$  para  $x = a$  é o número que se obtém substituindo  $x$  por  $a$  e efetuando as operações da relação que define o polinômio  $P(x)$ .

**Exemplo 2.1.** Se  $P(x) = x^3 + 3x^2 + 10$ , encontre o valor numérico de  $P(x)$  para  $x = 2$ .

**Solução:**

$$P(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 10 = 8 + 12 + 10 = 20.$$

**Exemplo 2.2.** Encontre o valor numérico de  $P(x) = x^3 + 10x^2 + 2x + 5$  para  $x = 2$ .

**Solução:** Substituindo  $x$  por 2 no polinômio dado, temos:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 \\ &= 2^3 + 10 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 5 \\ &= 8 + 40 + 4 + 5 \\ &= 57. \end{aligned}$$

**Observação:** Se  $P(a) = 0$ , dizemos que  $a$  é um **zero** ou uma **raiz** de  $P(x)$ . Por exemplo, no polinômio  $P(x) = x^2 - 3x + 2$  temos  $P(1) = 0$ . Logo, 1 é **raiz** ou **zero** desse polinômio.

### 2.3.3 Multiplicidade das Raízes de um Polinômio

**Definição 2.4** (Multiplicidade das Raízes de um Polinômio). Se um polinômio  $P(x)$  possui uma raiz  $r$  de multiplicidade  $m$ , então  $P(x) = (x - r)^m \cdot Q(x)$ , com  $Q(r) \neq 0$ .

**Observação:** na definição acima, temos  $Q(r) \neq 0$  para garantir que  $P(x)$  não possua mais nenhum fator  $x - r$ , pois  $Q(x)$  não se anula com  $x = r$ .

**Exemplo 2.3.** Determine a multiplicidade de todas as raízes de  $P(x) = (x - 4)^2 \cdot (x + 1)^4 \cdot (x - 1)$ .

**Solução:** 4 possui multiplicidade 2, -1 possui multiplicidade 4 e 1 possui multiplicidade 1 (ou multiplicidade simples).

## 2.4 Igualdade de polinômios

Dizemos que dois polinômios  $A(x)$  e  $B(x)$  são iguais quando assumem o mesmo valor numérico para qualquer valor de  $x$ . Ou então,  $A = B$  se  $A(a) = B(a)$  para todo valor de  $a$ . A condição

para que dois polinômios sejam iguais é que os **coeficientes dos termos correspondentes sejam iguais**.

**Exemplo 2.4.** Calcule  $a, b$  e  $c$  sabendo que  $x^2 + 2x + 1 = a \cdot (x^2 + x + 1) + (bx + c) \cdot (x + 1)$

**Solução:** Primeiramente vamos desenvolver a expressão do lado direito da igualdade para explicitar os coeficientes:

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 &= a \cdot (x^2 + x + 1) + (bx + c) \cdot (x + 1) \\ &= ax^2 + ax + a + bx^2 + bx + cx + c \\ &= (a + b)x^2 + (a + b + c)x + (a + c).\end{aligned}$$

Agora podemos igualar os coeficientes dos termos correspondentes da seguinte forma:

$$x^2 = (a + b)x^2 \Rightarrow a + b = 1 \tag{2.1}$$

$$2x = (a + b + c)x \Rightarrow a + b + c = 2 \tag{2.2}$$

$$a + c = 1 \tag{2.3}$$

Substituindo (1) em (2) temos:

$$a + b + c = 2 \Rightarrow 1 + c = 2 \Rightarrow c = 1.$$

Substituindo  $c = 1$  em (3) temos:

$$a + c = 1 \Rightarrow a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0.$$

Por último, substituindo  $a = 0$  em (1) obtemos que  $b = 1$ . Então temos  $a = 0, b = 1$  e  $c = 1$ .

## 2.5 Divisão de polinômios

### 2.5.1 Introdução à Divisão de Polinômios

Assim como fazemos com números inteiros, podemos efetuar a divisão entre polinômios, estabelecendo um quociente e um resto.

Então sejam dois polinômios  $P(x)$  e  $D(x)$ , com  $D(x)$  não-nulo. Efetuar a divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$  é determinar dois polinômios  $Q(x)$  e  $R(x)$  que satisfaçam às duas condições abaixo:

1.  $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$

2.  $gr(R) < gr(D)$  ou  $R(x) = 0$

Nessas condições, dizemos que  $P(x)$  é o dividendo,  $D(x)$  é o divisor,  $Q(x)$  é o quociente e  $R(x)$  é o resto.

**Definição 2.5** (Divisão Exata). Se  $R(x) = 0$ , dizemos que a divisão é exata ou que  $D(x)$  divide  $P(x)$ , ou ainda, que  $P(x)$  é múltiplo de  $D(x)$ .

Existem diferentes métodos para efetuar a divisão entre dois polinômios. A seguir vamos explicar por partes o **método das chaves** com um exemplo numérico.

### 2.5.2 Método da Chave

Para facilitar o entendimento desse método, vejamos inicialmente exemplos numéricos de divisão de polinômios. Vamos efetuar a divisão de  $P(x) = 5x^5 - x + 1$  por  $D(x) = x + 2$ .

- **Passo 1:** Dividir o termo de maior grau do **dividendo** pelo termo de maior grau do **divisor** e, em seguida, multiplicar o quociente obtido por todo o divisor e subtrair o resultado do **dividendo** (assim como fazemos na divisão de números inteiros com o algoritmo da divisão).
- **Passo 2:** Repetir o passo anterior dividindo o resto obtido no **Passo 1** pelo divisor. Faça isso até que o grau do resto seja menor do que o grau do divisor, como segue:

$$\begin{array}{r}
5x^5 \\
-5x^5 - 10x^4 \\
\hline
-10x^4 \\
10x^4 + 20x^3 \\
\hline
20x^3 \\
-20x^3 - 40x^2 \\
\hline
-40x^2 - x \\
40x^2 + 80x \\
\hline
79x + 1 \\
-79x - 158 \\
\hline
-157
\end{array}
\quad -x + 1 \left| \begin{array}{l} x + 2 \\ \hline 5x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 40x + 79 \end{array} \right.$$

Logo, temos que  $Q(x) = 5x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 40x + 79$  e  $R(x) = -157$ . Com isso, podemos escrever  $P(x) = 5x^5 - x + 1 = (x + 2)(5x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 40x + 79) - 157$ .

Vejamos, a seguir, outros exemplos de divisão de polinômios pelo método da chave.

**Exemplo 2.5.** Efetue a divisão de  $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + x - 8$  por  $D(x) = x - 1$ .

**Solução:**

$$\begin{array}{r}
4x^3 + 3x^2 + x - 8 \\
-4x^3 + 4x^2 \\
\hline
7x^2 + x \\
-7x^2 + 7x \\
\hline
8x - 8 \\
-8x + 8 \\
\hline
0
\end{array}
\quad \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ \hline 4x^2 + 7x + 8 \end{array} \right.$$

Onde o quociente é  $Q(x) = 4x^2 + 7x + 8$  e o resto é  $R(x) = 0$ . Note que se  $R(x) = 0$ , então temos uma divisão exata. Nesse caso dizemos que  $P(x)$  é múltiplo de  $D(x)$  e  $Q(x)$ , ou ainda, que  $Q(x)$  e  $D(x)$  são divisores de  $P(x)$ . Portanto, podemos escrever  $P(x) = D(x) \cdot Q(x) \Rightarrow 4x^3 + 3x^2 + x - 8 = (x - 1) \cdot (4x^2 + 7x + 8)$ .

**Exemplo 2.6.** Efetue a divisão de  $P(x) = 6x^4 + 2x^2 + x + 1$  por  $D(x) = x^2 + 3$ .

**Solução:**

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 2x^2 + x + 1 \quad | \quad x^2 + 3 \\
 \underline{-6x^4 - 18x^2} \phantom{+ x + 1} \\
 -16x^2 + x + 1 \\
 \phantom{-16x^2} \underline{+ 48} \\
 x + 49
 \end{array}$$

Onde o quociente é  $Q(x) = 6x^2 - 16$  e o resto é  $R(x) = x + 49$ . Com isso, podemos escrever  $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \Rightarrow 6x^4 + 2x^2 + x + 1 = (x^2 + 3) \cdot (6x^2 - 16) + x + 49$ .

### 2.5.3 Divisão de um polinômio por um binômio da forma $ax + b$

Primeiramente, lembremos que um binômio é um polinômio de grau 1, com dois coeficientes, da seguinte forma:  $B(x) = ax + b$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

Veremos, nessa seção, uma forma mais simples de obter o resto da divisão de um polinômio  $P(x)$  por um binômio da forma  $ax + b$ . Para exemplificar, faremos a seguir a divisão de  $P(x) = 4x^2 - 2x + 3$  pelo binômio  $B(x) = 2x - 1$ :

$$\begin{array}{r}
 4x^2 - 2x + 3 \quad | \quad 2x - 1 \\
 \underline{-4x^2 + 2x} \phantom{+ 3} \\
 3
 \end{array}$$

Note que temos o resto  $R(x) = 3$ . Encontremos agora a raiz de  $B(x) = 2x - 1$ :

$$\begin{aligned}
 2x - 1 = 0 &\Rightarrow 2x = 1 \\
 &\Rightarrow x = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$



Calculemos agora  $P\left(-\frac{1}{3}\right)$ :

$$\begin{aligned}P\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \\&= 3 \cdot \left(-\frac{1}{27}\right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) + 2 \\&= -\frac{3}{27} - \frac{2}{9} + 2 \\&= -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} + \frac{18}{9} \\&= \frac{-1 - 2 + 18}{9} \\&= \frac{15}{9} \\&= \frac{5}{3}.\end{aligned}$$

Note que nesse caso também temos  $R(x) = \frac{5}{3} = P\left(-\frac{1}{3}\right)$ , onde  $-\frac{1}{3}$  é a raiz do divisor  $B(x) = 3x + 1$ .

De fato, isso é algo que sempre acontece e, com isso, temos o **Teorema do Resto**, que será enunciado a seguir.

## 2.5.4 Teorema do Resto

**Teorema 2.1** (Teorema do Resto). O resto da divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$  é igual ao valor numérico de  $P(x_1)$ , onde  $x_1$  é a raiz do divisor  $D(x)$ .

**Demonstração:** Seja a divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$ , onde  $Q(x)$  é o quociente e  $R(x)$  é o resto. Se  $D(x)$  for um binômio tal que  $D(x) = ax + b$ , encontremos primeiramente a raiz de  $D(x)$ :

$$\begin{aligned}D(x) = 0 &\Rightarrow ax + b = 0 \\&\Rightarrow ax = -b \\&\Rightarrow x = -\frac{b}{a}.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que  $x = -\frac{b}{a}$  é raiz de  $D(x)$ , ou seja,  $D\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ .

Lembremos que, na divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$ , sempre temos  $gr(R) < gr(D)$ . Ou seja, se  $D(x)$  possui grau 1, então  $R(x)$  possui grau zero e, portanto, o resto é uma constante tal que  $R(x) = k$ , com  $k \in \mathbb{R}$ . Considerando agora a divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$ , temos que  $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + k$ . Substituindo  $x$  por  $-\frac{b}{a}$  nessa última igualdade, temos:

$$\begin{aligned} P\left(-\frac{b}{a}\right) &= D\left(-\frac{b}{a}\right) \cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + k \\ &= 0 \cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right) + k \\ &= 0 + k \\ &= k. \end{aligned}$$

Com isso, temos que  $P\left(-\frac{b}{a}\right) = k$ , onde  $k$  é o resto da divisão de  $P(x)$  pelo binômio  $D(x) = ax + b$ .  $\square$

**Exemplo 2.7.** Decida se  $P(x) = 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1$  é divisível pelo binômio  $D(x) = 3x - 1$ .

**Solução:** Uma forma de resolver o problema é efetuando a divisão com o método da chave, da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1 & 3x - 1 \\ -6x^3 + 2x^2 & \hline 7x^2 + 2x & \\ -7x^2 + \frac{7}{3}x & \hline \frac{13}{3}x + 1 & \\ -\frac{13}{3}x + \frac{13}{9} & \hline \frac{22}{9} & \end{array}$$

Note que o resto obtido é  $R(x) = \frac{22}{9} \neq 0$  e, portanto,  $P(x)$  não é divisível por  $D(x)$ .

Outra forma, bem mais simples, de resolvermos o problema, é obtendo o resto por meio do Teorema do Resto, da seguinte maneira:

- 1º passo: Calculamos a raiz do divisor:

$$\begin{aligned}D(x) = 0 &\Rightarrow 3x - 1 = 0 \\&\Rightarrow 3x = 1 \\&\Rightarrow x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

- 2º passo: Calculamos  $P\left(\frac{1}{3}\right)$ :

$$\begin{aligned}P\left(\frac{1}{3}\right) &= 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 1 \\&= 6 \cdot \frac{1}{27} + 5 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1 \\&= \frac{6}{27} + \frac{5}{9} + \frac{2}{3} + 1 \\&= \frac{2}{9} + \frac{5}{9} + \frac{6}{9} + \frac{9}{9} \\&= \frac{2 + 5 + 6 + 9}{9} \\&= \frac{22}{9}.\end{aligned}$$

Usando o Teorema do Resto, temos que  $P\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{22}{9} = R(x)$  e, como o resto é diferente de zero, temos que  $P(x)$  não é divisível por  $D(x)$ .

**Exemplo 2.8.** Encontre o resto da divisão de  $P(x) = 3x^4 - x^3 + 2$  por  $D(x) = 2x - 1$ .

**Solução:** Vamos usar o Teorema do Resto. Para isso, encontraremos primeiramente  $x_1$ , que é a raiz de  $D(x)$ . Em seguida, calcularemos  $P(x_1)$  e usaremos a relação enunciada no Teorema do Resto, como segue:

- 1º passo: encontrar a raiz de  $D(x)$ :

$$\begin{aligned} D(x) = 0 &\Rightarrow 2x - 1 = 0 \\ &\Rightarrow 2x = 1 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- 2º passo: calcular  $P\left(\frac{1}{2}\right)$ :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \\ &= 3 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 2 \\ &= \frac{3}{16} - \frac{2}{16} + \frac{32}{16} \\ &= \frac{3 - 2 + 32}{16} \\ &= \frac{33}{16}. \end{aligned}$$

Por fim, o Teorema do Resto nos diz que  $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{16} = R(x)$ . Com isso, o resto da divisão é  $R(x) = \frac{33}{16}$ .

### 2.5.5 Divisão de um polinômio por um binômio da forma $x + b$

Um caso particular do Teorema do Resto se dá quando temos uma divisão de  $P(x)$  pelo binômio  $D(x) = ax + b$ , onde  $a = 1$ . Nesse caso, temos a divisão pelo binômio  $D(x) = x + b$ . Aplicando o mesmo raciocínio utilizado na demonstração do Teorema do Resto, temos o resultado que segue.

Seja a divisão de  $P(x)$  pelo binômio  $D(x) = x + b$ , com quociente  $Q(x)$  e resto  $k$ , com  $k \in \mathbb{R}$  ( $k \in \mathbb{R}$  pelo motivo que já foi explicado na demonstração do Teorema do Resto, na última seção). Então, vamos

determinar o resto  $k$  dessa divisão usando o Teorema do Resto, da seguinte forma:

- 1º passo: encontrar a raiz de  $D(x) = x + b$ :

$$\begin{aligned}D(x) = 0 &\Rightarrow x + b = 0 \\ &\Rightarrow x = -b.\end{aligned}$$

- 2º passo: calcular  $P(-b)$ :

$$\begin{aligned}P(-b) &= D(-b) \cdot Q(-b) + k \\ &= 0 \cdot Q(-b) + k \\ &= k.\end{aligned}$$

Com isso, temos que, dada a divisão de  $P(x)$  pelo binômio  $D(x) = x + b$ , o resto da divisão é  $k = P(-b)$ , o que sugere o teorema a seguir.

### 2.5.6 Teorema de D'Alembert

**Teorema 2.2** (Teorema de D'Alembert). A divisão de  $P(x)$  pelo binômio  $D(x) = x + b$  deixa resto  $k = P(-b)$ .

**Exemplo 2.9.** Prove que se  $x_1$  é raiz do polinômio  $P(x)$ , então  $P(x)$  é divisível por  $x - x_1$ .

**Solução.** Essa afirmação é uma consequência do Teorema de D'Alembert. Veja que se  $x_1$  é raiz de  $P(x)$ , então  $P(x_1) = 0$ . Pelo Teorema do Resto, temos que  $P(x_1) = k = 0$ , onde  $k$  é o resto da divisão de  $P(x)$  pelo binômio cuja raiz é  $x_1$ . Veja que o binômio cuja raiz é  $x_1$  é  $D(x) = x - x_1$ . Então, se a divisão de  $P(x)$  por  $D(x) = x - x_1$  deixa resto zero, temos que  $x - x_1$  é divisor de  $P(x)$ .

**Observação:** O exemplo 2.9 é muito importante. Veja que se  $P(x)$  possui as raízes  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , então  $P(x)$  é divisível pelos binômios  $(x - x_1)$ ,  $(x - x_2)$  e  $(x - x_3)$ . Esse fato será muito usado, tanto em outros exemplos desta aula, quanto na resolução dos exercícios propostos.

**Exemplo 2.10.** Calcule o resto da divisão de  $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + 5$  por  $D(x) = x + 5$ .

**Solução:** Pelo Teorema de D'Alembert, temos que o  $P(-5) = k$ , onde  $k$  é o resto da divisão. Então temos:

$$\begin{aligned}P(-5) &= 5 \cdot (-5)^4 - 3 \cdot (-5)^2 + 5 \\&= 5 \cdot 625 - 3 \cdot 25 + 5 \\&= 3125 - 75 + 5 \\&= 3055.\end{aligned}$$

Ou seja,  $k = 3055$  é o resto da divisão de  $P(x)$  por  $D(x)$ .

**Exemplo 2.11.** Determine  $p$  de modo que  $x^3 - 6x^2 + px - 1$  seja divisível por  $x - 3$ .

**Solução:** Note que a raiz de  $x - 3$  é  $x = 3$ . Então, queremos que  $P(3) = 0$ . Com isso, temos:

$$\begin{aligned}P(3) = 0 &\Rightarrow 3^3 - 6 \cdot 3 + 3p - 1 = 0 \\&\Rightarrow 27 - 18 + 3p - 1 = 0 \\&\Rightarrow 3p + 8 = 0 \\&\Rightarrow 3p = -8 \\&\Rightarrow p = -\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

## 2.5.7 O Dispositivo de Briot-Ruffini

Como vimos anteriormente, podemos facilmente determinar o resto da divisão de um polinômio  $P(x)$  por um binômio da forma  $D(x) = ax + b$  usando o Teorema do Resto. Esse teorema, porém, não nos dá o quociente  $Q(x)$  dessa divisão. Para encontrarmos o quociente e o resto dessa divisão, usamos o chamado Dispositivo de Briot-Ruffini.

Esse dispositivo, portanto, serve para efetuar a divisão de um polinômio  $P(x)$  por um binômio da forma  $D(x) = ax + b$ . A seguir, para apresentar essa ferramenta, vamos efetuar a divisão do polinômio  $P(x) = 5x^5 - x + 1$  por  $D(x) = x + 2$ :

- **1º passo:** Identificamos os coeficientes de  $P(x)$  e a raiz do divisor  $D(x)$ . Veja que  $P(x) = 5x^5 - x + 1$  possui os coeficientes 5, 0, 0, 0, -1 e 1. Além disso, a raiz de  $D(x) = x + 2$  é  $x = -2$ .
- **2º passo:** Desenhamos uma chave; escrevemos a raiz do divisor ao lado esquerdo e, os coeficientes de  $P(x)$ , dentro da chave.
- **3º passo:** repetimos o primeiro coeficiente na parte debaixo da chave e efetuamos a seguinte sequência de operações:
  - Multiplicamos o primeiro coeficiente pela raiz do divisor, somamos com o segundo coeficiente e escrevemos o resultado abaixo do segundo coeficiente.
  - Multiplicamos o resultado anterior pela raiz do divisor, somamos com o terceiro coeficiente e escrevemos o resultado abaixo do terceiro coeficiente.
  - Repetimos esse procedimento até acabarem os coeficientes, conforme o esquema abaixo:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 -2 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 & & -10 & 20 & -40 & 80 & -158 \\
 \hline
 & 5 & -10 & 20 & -40 & 79 & -157
 \end{array}$$

O último valor encontrado será o resto da divisão. Os demais valores encontrados na linha inferior serão os coeficientes do polinômio quociente da divisão.

Dessa forma, na divisão de  $P(x) = 5x^5 - x + 1$  por  $D(x) = x + 2$  temos o quociente  $Q(x) = 5x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 40x + 79$  e o resto  $k = -157$ .

A seguir, apresentaremos outros exemplos de divisões usando o Dispositivo de Briot-Ruffini.

**Exemplo 2.12.** Usando o Dispositivo de Briot-Ruffini, encontre o quociente e o resto da divisão de  $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 10$  por  $D(x) = 2x - 1$ .

**Solução:** Veja que  $P(x) = 5x^4 - 3x^2 + x - 10$  possui os coeficientes 5, 0, -3, 1 e -10. Além disso, o divisor  $D(x) = 2x - 1$  possui raiz  $x = \frac{1}{2}$ . Com isso, escrevemos a raiz  $x = \frac{1}{2}$  à esquerda da chave, os coeficientes de  $P(x)$  na parte superior e efetuamos a sequência de operações explicadas no exemplo anterior. Da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cccccc} & 5 & & 0 & & -3 & & 1 & & -10 \\ & & & \frac{5}{2} & & \frac{5}{4} & & -\frac{7}{8} & & \frac{1}{16} \\ \hline & 5 & & \frac{5}{2} & & -\frac{7}{4} & & \frac{1}{8} & & -\frac{159}{16} \end{array} \right.$$

Com isso, temos o quociente  $Q(x) = 5x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{8}$  e o resto  $k = -\frac{159}{16}$ .

### 2.5.8 Teorema das Raízes Racionais (ou teste das raízes racionais)

**Teorema 2.3** (Teorema das Raízes Racionais). Seja o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Seja  $\frac{p}{q}$  uma raiz racional de  $P(x)$ , ou seja,  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Então  $p$  é um divisor de  $a_0$  e  $q$  é um divisor de  $a_n$ .

**Demonstração:** Seja  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  para certos valores de  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ , e suponha que  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros e primos entre si (dizer que  $p$  e  $q$  são primos entre si é o mesmo que dizer que  $\text{mdc}(p, q) = 1$ ).

Multiplicando ambos os membros por  $q^n$ , temos:

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{p}{q}\right) &= 0 \\
 \Rightarrow a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 &= 0 \\
 \Rightarrow q^n \cdot \left[ a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 \right] &= 0 \\
 \Rightarrow a_n \left(\frac{p^n}{q^n}\right) \cdot q^n + a_{n-1} \left(\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}}\right) \cdot q^n + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) \cdot q^n + a_0 \cdot q^n &= 0.
 \end{aligned}$$

Somando  $-a_0 \cdot q^n$  em ambos os lados, temos:

$$\Rightarrow a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot q^1 + \dots + a_1 \cdot p \cdot q^{n-1} = -a_0 \cdot q^n.$$

Por fim, colocando  $p$  em evidência do lado esquerdo, obtemos:

$$\Rightarrow p \cdot (a_n \cdot p^{n-1} + a_{n-1} \cdot p^{n-2} \cdot q^1 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1}) = -a_0 \cdot q^n.$$

Veja que  $p$  divide a expressão do lado esquerdo, então  $p$  também divide a expressão do lado direito, ou seja,  $p \mid -a_0 \cdot q^n$  ( $p$  divide  $-a_0 \cdot q^n$ ). Mas  $p$  e  $q$  são primos entre si e, conseqüentemente,  $p$  e  $q^n$  também são. Se  $p \mid -a_0 \cdot q^n$  e  $p$  e  $q^n$  são primos entre si, então o Lema de Euclides nos diz que  $p \mid -a_0$  e, portanto,  $p \mid a_0$ .

Por outro lado, se, em vez de somar  $-a_0 \cdot q^n$  em ambos os lados, tivéssemos somado  $-a_n \cdot p^n$  e, em seguida, colocado  $q$  em evidência do lado esquerdo, chegaríamos à conclusão que  $q \mid a_n$ .  $\square$

O Teorema das Raízes Racionais é importante porque nos dá candidatos a serem raízes racionais de um determinado polinômio, como veremos nos exemplos a seguir.

**Exemplo 2.13.** Encontre as raízes de  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ .

**Solução:** Vamos usar o Teorema das Raízes Racionais para encontrar os candidatos à raiz de  $P(x)$ . Então seja  $\frac{p}{q}$  uma raiz de  $P(x)$ ,

com  $p$  e  $q$  inteiros e primos entre si. O teorema nos diz que  $p$  é um divisor de 3 e  $q$  é um divisor de 1. Com isso, temos que  $p = 1, -1, 3$  ou  $-3$  e  $q = 1$  ou  $-1$ . Consequentemente, temos que  $\frac{p}{q} = 1, -1, 3$  ou  $-3$ . A partir disso, podemos testar qual desses números é uma raiz de  $P(x)$ , da seguinte forma:

$$P(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 2 + 3 = 2$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = -1 - 4 - 2 + 3 = -4$$

$$P(3) = 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 3 = 27 - 4 \cdot 9 + 6 + 3 = 27 - 36 + 6 + 3 = 0.$$

Veja que, aplicando  $P(x)$  nos candidatos, obtemos que  $P(3) = 0$  e, portanto, 3 é uma raiz de  $P(x)$ . Consequentemente,  $x - 3$  é um divisor de  $P(x)$  (conforme explicamos no "Exemplo 16").

Dividindo  $P(x)$  por  $x - 3$  com o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$3 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -4 & 2 & 3 \\ & 3 & -3 & -3 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right.$$

Ou seja, na divisão de  $P(x)$  por  $x - 3$  obtemos resto zero e quociente  $Q(x) = x^2 - x - 1$ . Isso significa que podemos escrever  $P(x)$  da seguinte forma:

$$P(x) = (x - 3) \cdot (x^2 - x - 1).$$

Com isso, as demais raízes de  $P(x)$  são as raízes de  $Q(x) = x^2 - x - 1$ . Usando a Fórmula de Bhaskara, obtemos que as raízes de  $Q(x)$  são  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Portanto, as três raízes de  $P(x)$  são 3,  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**Exemplo 2.14.** Resolva a equação  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ .

**Solução:** Seja  $\frac{p}{q}$  uma solução da equação dada. Pelo Teorema das Raízes Racionais, temos que  $p$  é um divisor de -6 e  $q$  é um

divisor de 1. Com isso,  $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$  e  $q \in \{\pm 1\}$ . Fazendo todas as combinações possíveis, chegamos à conclusão de que  $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ . Substituindo esses valores na equação dada, percebemos que  $x = 1$  é uma solução. Então  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  é divisível por  $x - 1$ . Efetuando essa divisão com o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$1 \left| \begin{array}{cccc} 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array} \right.$$



Como esperado, o resto da divisão é zero e temos o quociente  $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ . Com isso, temos que:

$$3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = (x - 3) \cdot (x^2 - 5x + 6).$$

As demais soluções da equação dada são as raízes de  $P(x) = x^2 - 5x + 6$ . Pelo método de soma e produto, podemos ver facilmente que as raízes de  $P(x)$  são 2 e 3. Portanto, as soluções da equação inicial são 1, 2 e 3.

## Problemas Propostos

			
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1.  Determine o grau de:
  - a) 12
  - b)  $35x^3$
  - c)  $3x^3 - 5x^4 + 3x^2 + 9$
  - d)  $x^8 - 64$
  
2.  Sejam os polinômios  $A = x^3 + 6x^2 - 2x + 4$  e  $B = x^2 + 1$ . Determine o quociente e o resto de  $A$  na divisão por  $B$ .

3. ● Sejam os polinômios  $A = 3x^3 - 4x^2 + x$  e  $B = x^2 + 3$ . Determine se  $A$  é múltiplo de  $B$ .
4. ● Fatore:
- $15x^4 - 10x^3 + 25x^2$
  - $x^2 + 12x + 20$
  - $9x^2 - 25y$
  - $3(x + 3)^2(x - 8)^4 + 4(x + 3)^3(x - 8)^3$
5. ▲ Prove que  $(x + 1)^2 | x^{4n+2} + 2x^{2n+1} + 1$ .
6. ▲ (ITA - 2011) Se 1 é raiz de multiplicidade 2 da equação  $x^4 + x^2 + ax + b = 0$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $a^2 - b^3$  é igual a:
- 64
  - 36
  - 28
  - 18
  - 27
7. ▲ (ITA - 2008) Sendo  $c$  um número real a ser determinado, decomponha o polinômio  $9x^2 - 63x + c$  numa diferença de dois cubos  $(x + a)^3 - (x + b)^3$ . Neste caso,  $|a + |b| - c|$  é igual a:
- 104
  - 114
  - 124
  - 134
  - 144
8. ▲ (ITA - 2005) No desenvolvimento de  $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$  obtém-se um polinômio cujos coeficientes somam 32. Se 0 e  $-1$  são raízes de  $p(x)$ , então a soma  $a + b + c$  é igual a:
- $-\frac{1}{2}$
  - $-\frac{1}{4}$
  - $\frac{1}{2}$
  - 1
  - $\frac{3}{2}$
9. ▲ Dos polinômios abaixo, o que pode ser identicamente nulo é:
- $P(x) = (a^2 - 4)x^2 + (b - 1)x + (a + 1)$
  - $P(x) = (b - 2)x^2 + (a - 1)x + (b + 2)$
  - $P(x) = (a^2 + 4)x^2 + bx$
  - $P(x) = (b - 1)x^2 + 3x + (b - 1)$
  - $P(x) = (b + 2)x^2 + (a - 2)x + b^2 - 4$
10. ▲ Determine  $m \in \mathbb{R}$  para que o polinômio  $(m^2 - 16)x^3 + (m - 4)x^2 + (m + 4)x + 4$  seja de grau 2.

11.  $\blacklozenge$  (IME - 2015) Qual o resto da divisão do polinômio  $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$  pelo polinômio  $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ?  
 a)  $x^2 + x - 2$     b)  $6x^2 - 4x + 3$     c)  $3x - 9$     d)  $6x^2 - 17x - 3$   
 e)  $6x + 1$
12.  $\blacklozenge$  Se  $x = 2$  é uma das raízes da equação  $x^3 - 4x^2 + mx - 4 = 0$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , então as suas outras raízes são números:  
 a) negativos.  
 b) inteiros.  
 c) racionais não inteiros.  
 d) irracionais.  
 e) não reais.
13.  $\blacklozenge$  O polinômio  $P(x) = x^4 + mx^2 + n$  é divisível por  $x^2 - 4$  e também por  $x^2 - 3$ . Qual é o valor do produto  $mn$ ?
14.  $\blacklozenge$  Um polinômio  $P(x)$ , de grau mínimo, tem raízes duplas  $-1$  e  $1$ , é divisível por  $x^2 + 1$  e satisfaz  $P(0) = 3$ . Calcule  $P(3)$ . (Dizer que  $P(x)$  é de grau mínimo significa que  $P(x)$  é o polinômio de menor grau que atende às condições estabelecidas).
15.  $\blacklozenge$  Determine os valores reais de  $a$  e  $b$  de modo que o polinômio  $2x^3 - 5ax^2 - 3bx + 1$  seja divisível por  $x + 2$ , e que na divisão por  $x - 2$  deixe resto 7.
16.  $\blacklozenge$  (ITA - 2003) Dividindo-se o polinômio  $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$  por  $(x - 1)$ , obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se  $P(x)$  por  $x + 1$ , obtém-se resto igual a 3. Sabendo que  $P(x)$  é divisível por  $(x - 2)$ , tem-se que o valor de  $\frac{(a \cdot b)}{c}$  é igual a:  
 a) -6    b) -4    c) 4    d) 7    e) 9
17.  $\blacklozenge$  (ITA - 2008) Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Considere o polinômio  $p(x)$  dado por
- $$x^5 - 9x^4 + (a - b - 2c)x^3 + (a - 2b - 2c - 2)x^2 + (a - b - c + 1)x + (2a - b + c - 1).$$

encontre todos os valores de  $a, b$  e  $c$  de modo que  $x = 0$  seja uma raiz com multiplicidade 3 de  $p(x)$ .

18.  $\blacklozenge$  (IME 2008) (Modificada) Considere o polinômio  $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1$ , em que umas das raízes é  $x = 1$ : sabendo-se que  $a_1, a_2, a_3, a_4$  e  $a_5$  são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com  $a_4 = \frac{1}{2}$ , então  $p(2)$  é igual a:
- a) 25    b) 27    c) 37    d) 39    e) 40
19.  $\star$  (UECE) Se os polinômios  $p(x) = (x^3) + (mx^2) + nx + k$  e  $g(x) = (x^3) + (ux^2) + vx + w$  são divisíveis por  $(x^2) \smile x$ , então o resultado da soma  $m + n + u + v$  é:
- a) -2    b) -1    c) 0    d) 1

---

## Dicas e Soluções

- Zero, três, quatro e oito, respectivamente.
- Temos o quociente  $Q(x) = x + 6$  e o resto  $R(x) = -3x - 2$ .
- $A$  não é múltiplo de  $B$ .
- a)  $5x^2 \cdot (3x^2 - 2x + 5)$ .  
b)  $(x + 2) \cdot (x + 10)$ .  
c) Não é possível fatorar.  
d)  $(x + 3)^2(x - 8)^3(7x - 12)$ .
- A expressão dada pode ser reescrita como  $P(x) = (x^{2n+1} + 1)^2$ .  
Veja que  $x = 1$  é raiz de multiplicidade 2 de  $P(x)$  e, portanto,  $(x - 1)^2 | P(x)$ .
- c) -28.
- b) 114.

8. a)  $-\frac{1}{2}$ .
9. e). Basta que  $b = -2$  e  $a = 2$ .
10.  $m = -4$ .
11. d)  $6x^2 - 17x - 3$ .
12. e) não reais.
13.  $mn = -84$ .
14.  $P(3) = 1920$ .
15.  $a = -\frac{1}{8}$  e  $b = \frac{25}{12}$ .
16. e) 9.
17. Se  $x$  é raiz de multiplicidade 3, então  $(x - 0)^3 = x^3 | P(x)$ .  
Divida  $P(x)$  por  $x^3$  usando o Método da Chave, o resto obtido nessa divisão deve ser zero. Igualando o resto a zero você terá um sistema de equações, de onde são obtidos os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Para conferir se os valores encontrados estão corretos, substitua-os em  $P(x)$  e efetue novamente a divisão por  $x^3$ . O resto dessa última divisão deve ser zero e o quociente  $Q(x)$  deve ser tal que  $Q(0) \neq 0$  (pois se  $Q(0) = 0$ , então  $x = 0$  seria uma raiz de multiplicidade maior do que 3).
18. b) 37.
19. a) -2.



# Aula 3

## Relações de Girard

### 3.1 Introdução

Nessa aula estudaremos o conceito, a forma de obtenção e as aplicações das Relações de Girard: relações entre as raízes de uma equação polinomial e seus coeficientes.

Como vimos anteriormente, podemos determinar a soma e o produto das raízes de uma equação polinomial do segundo grau, mesmo sem conhecê-las. De início, vamos recordar a obtenção desse resultado, enunciando também as Relações de Girard para uma equação polinomial de grau 2.

### 3.2 Relações de Girard para uma Equação Polinomial de Grau 2

Seja a equação polinomial do segundo grau  $ax^2 + bx + c = 0$ , com raízes  $x_1$  e  $x_2$ . Conforme vimos na aula sobre Equações do Segundo Grau, podemos reescrever essa equação da seguinte forma:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Desenvolvendo o produto do lado direito da igualdade, temos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x^2 - x \cdot x_2 - x \cdot x_1 + x_1x_2) \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \end{aligned}$$

Note que temos uma igualdade de polinômios. Isso implica que os coeficientes do primeiro membro sejam iguais aos coeficientes correspondentes do segundo membro, ou seja:

$$b = -a(x_1 + x_2) \Rightarrow -\frac{b}{a} = x_1 + x_2.$$

$$c = ax_1x_2 \Rightarrow \frac{c}{a} = x_1x_2.$$

Assim, obtemos as relações de soma e produto das raízes, que também podemos chamar de Relações de Girard para uma equação polinomial de grau 2.

A fim de ilustrar melhor a estrutura das Relações de Girard faremos, na próxima seção, um procedimento similar para encontrarmos essas relações em uma equação polinomial de grau 3.

### 3.3 Relações de Girard para uma Equação Polinomial de Grau 3

Seja a equação  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ , cujas raízes são  $x_1, x_2$  e  $x_3$ . Podemos reescrever essa equação da seguinte forma:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Desenvolvendo o produto do lado direito da igualdade, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 \\ &\quad + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x \\ &\quad - ax_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Se igualarmos termo a termo, obtemos as igualdades:

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow -\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \Rightarrow \frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$d = ax_1x_2x_3 \Rightarrow -\frac{d}{a} = x_1x_2x_3.$$

E assim obtemos as Relações de Girard para uma equação polinomial de grau 3.

### 3.4 Generalização

Para facilitar o entendimento das Relações de Girard, podemos pensar que, para uma equação de grau 2, temos a soma das raízes separadamente, depois a soma das raízes aos pares, o que coincide com o produto das raízes. Para uma equação de grau 3, temos a soma das raízes separadamente, depois a soma das raízes aos pares, e depois a soma das raízes aos trios, o que coincide com o produto das raízes.

Sendo assim, para a equação  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , de grau 4 e raízes  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ , temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}.$$

E isso pode ser estendido para equações polinomiais de qualquer grau, sempre dividindo os coeficientes  $b, c, d, e, \dots$  por  $a$  e fazendo a alternância de sinais.

**Exemplo 3.1.** Seja a equação  $2x^4 + 3x^2 + 8x + 1 = 0$ , com as raízes  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ . Determine os valores numéricos das Relações de Girard para essa equação.

**Solução.**

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$x_1x_1x_3x_4 = \frac{e}{a} = \frac{1}{2}.$$

Veja que as Relações de Girard são importantes, pois permitem a obtenção de resultados acerca de uma equação mesmo sem antes conhecermos suas soluções.

**Exemplo 3.2.** Determine uma equação de grau 3 cujas raízes sejam 1, 2 e 3.

**Solução.** Resolveremos esse problema de duas maneiras diferentes. A primeira maneira é a que segue.

Como já vimos, podemos escrever a equação do terceiro grau  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  como  $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ , onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as raízes. Como temos as raízes 1, 2 e 3, vamos substituí-las no lugar de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} a(x - 1)(x - 2)(x - 3) &= 0 \\ \Rightarrow a[x^3 - (1 + 2 + 3)x^2 + (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3)x - 1 \cdot 2 \cdot 3] &= 0 \\ \Rightarrow a(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) &= 0. \end{aligned}$$

Repare que podemos atribuir qualquer valor para  $a$ , desde que  $a \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$  (pois se  $a = 0$  a equação não seria de grau 3). Assim, obteremos uma equação do terceiro grau com as raízes desejadas. Em particular, podemos considerar  $a = 1$ . Dessa forma, temos a equação:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Repare que essa equação atende às condições iniciais, pois  $x = 1$ ,  $x = 2$  e  $x = 3$  são soluções.

Outra forma de resolvermos o problema é utilizando as Relações de Girard, como faremos a seguir.

Sabemos que  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = 3$  são as raízes da equação que queremos determinar. Então, usando as Relações de Girard temos:

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\frac{c}{a} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 2 + 3 + 6 = 11$$

$$-\frac{d}{a} = x_1x_2x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Note que temos 3 igualdades para determinar 4 incógnitas ( $a, b, c$  e  $d$ ). Então precisamos inicialmente estabelecer um valor para uma delas para, em seguida, determinar as outras. Note que a maneira mais fácil de fazermos isso é estabelecendo um valor para  $a$ . Então, para simplificar as expressões, consideremos  $a = 1$ . Dessa forma, temos  $b = -6$ ,  $c = 11$  e  $d = -6$ . Com isso, temos a equação:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

Note que, por substituirmos  $a = 1$  nas duas resoluções, obtivemos a mesma equação em ambas.

Essa, porém, não é a única solução do problema. Repare que, se tivéssemos considerado  $a = 2$ , teríamos  $b = -12$ ,  $c = 22$  e  $d = -12$ . Assim, teríamos a equação:

$$2x^3 - 12x^2 + 22x - 12 = 0.$$

Veja que essa última equação também possui como raízes os números 1, 2 e 3.

**Exemplo 3.3.** Resolva a equação polinomial  $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$  sabendo que umas de suas raízes é 1.

**Solução 1:** Sejam  $x_1, x_2$  e 1 as raízes da equação dada. Pelas Relações de Girard temos:

$$x_1 + x_2 + 1 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{1} = -4 \Rightarrow x_1 + x_2 = -5 \quad (3.1)$$

$$x_1x_2 + x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow x_1x_2 + x_1 + x_2 = 1 \quad (3.2)$$

$$x_1x_2 \cdot 1 = -\frac{d}{a} = -\frac{-6}{1} = 6 \Rightarrow x_1x_2 = 6 \quad (3.3)$$

Note que, com as equações (1) e (3), já podemos concluir que as outras soluções procuradas são  $x_1 = -2$  e  $x_2 = -3$ .  $\square$

**Solução 2:** Note que, caso não quiséssemos usar as Relações de Girard, poderíamos resolver o problema a partir de uma divisão de polinômios. Se  $x = 1$  é solução da equação dada, então o polinômio  $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$  é divisível por  $x - 1$ . Efetuando esse divisão com o Método da Chave, temos:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 + x - 6 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \underline{x^2 + 5x + 6} \\ \hline 5x^2 + x & \\ -5x^2 + 5x & \underline{6x - 6} \\ \hline 6x - 6 & \\ -6x + 6 & \underline{0} \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como esperado, o resto é zero e temos o quociente  $Q(x) = x^2 + 5x + 6$ . Portanto, podemos escrever  $P(x) = (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$  e, portanto, as raízes de  $Q(x)$  são as outras raízes de  $P(x)$  que procurávamos. Usando o método de soma e produto, podemos ver facilmente que  $Q(x)$  possui as raízes  $-2$  e  $-3$ .  $\square$

**Observação:** Note que a Solução 1, usando as Relações de Girard, é muito simples. Por outro lado, na Solução 2, tivemos que fazer uma divisão de polinômios e resolver uma equação do segundo grau, um procedimento muito mais longo.

**Exemplo 3.4.** Se  $A, B$  e  $C$  são as raízes da equação  $5x^3 - 7x + 12 = 0$ , determine o valor de  $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC}$ .

**Solução.** Primeiramente, somando as frações temos o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} &= \frac{C}{ABC} + \frac{B}{ABC} + \frac{A}{ABC} \\ &= \frac{A+B+C}{ABC}.\end{aligned}$$

Repare que  $A+B+C$  e  $ABC$  são valores que podem ser determinados com as Relações de Girard para uma equação polinomial de grau 3, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}A+B+C &= -\frac{b}{a} = -\frac{0}{5} = 0 \\ ABC &= -\frac{d}{a} = -\frac{12}{5}.\end{aligned}$$

Com isso, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{BC} &= \frac{A+B+C}{ABC} \\ &= \frac{0}{\left(-\frac{12}{5}\right)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

**Exemplo 3.5.** Determine o quadrado da soma de todas as raízes da equação  $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ .

**Solução.** Primeiramente, usando Girard, vamos determinar a soma de todas as raízes da equação dada. Sejam  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  as raízes da equação. Então temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{1} = -3.$$

Portanto, o quadrado da soma é  $(-3)^2 = 9$ .

---

## Problemas Propostos

●	▲	◆	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

- Calcule o valor de  $k$  na equação  $(k + 5)x^2 - 10x + 3 = 0$  para que o produto das raízes seja  $\frac{3}{8}$ .
- Encontre uma equação polinomial de grau 3 cujas raízes são números inteiros consecutivos.
- Resolva a equação polinomial  $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$  sabendo que umas de suas raízes é 2.
- (EEM-SP) Dada a equação  $x^3 - 9x^2 + 26x + a = 0$ , determine  $a$  para que as raízes sejam consecutivas.
- Se  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são raízes da equação  $x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$ , então os valores de  $x_1 + x_2 + x_3$  e de  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$  são, respectivamente,
  - 3 e -2
  - 4 e 3
  - 4 e 2
  - 1 e 3
- ▲ (ITA) As raízes da equação  $x^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0$ , com  $q, r, s, t \in \mathbb{Q}_+^*$ , são  $L, M, N, P$ . Determine o valor de

$$\frac{L}{MNP} + \frac{M}{LNP} + \frac{N}{LMP} + \frac{P}{LMN}.$$

- ▲ (ITA) Se  $a, b, c$  são as raízes da equação  $x^3 - 2x^3 + x - 4 = 0$ , determine o valor de  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .
- ▲ Determine  $p$  na equação  $x^2 + p^2x + 2px + x - 4 = 0$  para termos raízes de mesmo módulo e sinais contrários.

9. ▲ Determine os valores de  $m$  e  $n$  na equação  $x^2 + (m - n + 2)x + n + 1 = 0$  para que a mesma tenha raízes nulas.
10. ▲ Calcule o valor de  $m$  na equação  $x^2 - 6x + 2m = 0$ , de modo que uma de suas raízes seja o dobro da outra.
11. ▲ Determinar a equação do 2º grau para a qual uma das raízes é o triplo da outra e a soma dos quadrados das raízes é 40.
12. ▲ Determine  $m$  na equação  $3x^2 - 2x + 5m = 0$ , de modo que a diferença entre suas raízes seja 1.
13. ▲ Os três números distintos  $a, b, c$  verificam as igualdades:

$$\begin{cases} a^3 + pa + q = 0 \\ b^3 + pb + q = 0 \\ c^3 + pc + q = 0 \end{cases}$$

Prove que  $a + b + c = 0$ .

14. ◆ (ITA) As raízes da equação de coeficientes reais  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  são inteiros positivos consecutivos. A soma dos quadrados dessas raízes é igual a 14. Determine o valor de  $a^2 + b^2 + c^2$ .
15. ◆ Determine o valor da soma  $a + b$  para que as raízes do polinômio  $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b = 0$  estejam em progressão aritmética de razão  $\frac{1}{2}$ .
16. ◆ Determine  $k$  na equação  $x^2 + kx + 36 = 0$ , de modo que a soma dos inversos de suas raízes seja igual a 512.
17. ◆ Dada a equação  $2x^2 + 8x + k = 0$ , determine o valor de  $k$  de modo que a soma dos quadrados de suas raízes seja igual a 7.
18. ◆ Considere a equação  $x^2 - mx + 1 = 0$  cujas raízes são  $a$  e  $b$  reais e desiguais. Componha a equação do 2º grau que admita as raízes  $a + 1$  e  $b + 1$ .

19.  $\blacklozenge$  Sejam  $a$  e  $b$  as raízes da equação  $2x^2 - 3x + k = 0$ . Determine  $k$  de modo que  $a^3 + b^3 = -2438$ .
20.  $\star$  Provar que a condição para que uma raiz de  $ax^2 + bx + c = 0$  seja  $n$  vezes a outra é  $b^2 = \frac{(n+1)^2}{n}ac$ .
- 

## Dicas e Soluções

1.  $k = 3$ .
2. Considere a igualdade  $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ , com  $x_2 = x_1 + 1$  e  $x_3 = x_1 + 2$ . Ou então, use as Relações de Girard para uma equação polinomial de grau 3.
3. As outras soluções são 3 e 5.
4.  $a = -24$ .
5. c) 4 e 2.
6. Dica: iguale o denominador e use as Relações de Girard.
7.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ .
8.  $p = -1$ .
9.  $m = -3$  e  $n = -1$ .
10.  $m = 4$ .
11.  $x^2 + 8x + 12 = 0$  e  $x^2 - 8x + 12 = 0$ .
12.  $m = -\frac{1}{12}$ .
13. Dica:  $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$ .
14.  $a^2 + b^2 + c^2 = 193$ .

15.  $a + b = 41$ .

16.  $k = -18432$ .

17.  $k = 9$ .

18.  $x^2 - (m + 2)x + m + 2 = 0$ .

19.  $k = \frac{261}{18}$ .

20. Dica: sejam as raízes  $x_1$  e  $x_2$ , então  $x_1 = nx_2$ ; use as Relações de Girard com essas raízes.



## Aula 4

# Números Complexos

GUSTAVO RODRIGUES DA SILVA

### 4.1 Introdução

Nesta aula, estudaremos os Números Complexos. Apresentaremos, inicialmente, a forma algébrica, as operações básicas nessa forma e as classificações dos números complexos. Em seguida, serão abordadas as equações do segundo grau com soluções imaginárias, a interpretação geométrica dos números complexos, a definição e as propriedades do conjugado e as potências da unidade imaginária, apresentando sua periodicidade. Por fim, será apresentada a forma trigonométrica de um número complexo, bem como as operações básicas nessa forma.

### 4.2 Unidade Imaginária e Forma Algébrica

**Definição 4.1** (Unidade Imaginária). Definimos  $i = \sqrt{-1}$  como a unidade imaginária.

**Definição 4.2** (Número Complexo).  $z$  é um número complexo se  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Definição 4.3** (Forma Algébrica). Seja o número complexo  $z =$

$a + bi$ . Nesse caso, dizemos que  $a$  é a parte real de  $z$  e  $b$  é a parte imaginária. Denotamos por  $a = \text{Re}(z)$  e  $b = \text{Im}(z)$ . Chamamos  $z = a + bi$  como a forma algébrica de  $z$ .

**Exemplo 4.1.** Seja  $z = (3 + i)^2 + 5i + 2$ . Escreva  $z$  na sua forma algébrica.

**Solução.**

$$\begin{aligned} z &= (3 + i)^2 + 5i + 2 \\ &= 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot i + i^2 + 5i + 2 \\ &= 9 + 6i + (\sqrt{-1})^2 + 5i + 2 \\ &= 9 + 6i - 1 + 5i + 2 \\ &= 10 + 11i. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $z = 10 + 11i$  é a forma algébrica de  $z$ , onde 10 é sua parte real e 11 é sua parte imaginária, ou então,  $\text{Re}(z) = 10$  e  $\text{Im}(z) = 11$ .  $\square$

## 4.3 Operações com Números Complexos

**Definição 4.4** (Igualdade de Números Complexos). Sejam os números complexos  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$ . Dizemos que  $z_1 = z_2$  se, e somente se,  $a = c$  e  $b = d$ .

**Observação:** no conjunto dos números complexos não há comparações do tipo  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ , isso ocorre porque esse conjunto não é ordenado de maneira usual como o conjunto dos reais, por exemplo.

### 4.3.1 Soma de Números Complexos

Para efetuar a soma entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , simplesmente somamos as partes reais de  $z_1$  e  $z_2$  e as partes imaginárias de  $z_1$  e  $z_2$ . Assim, obtemos a forma algébrica do número complexo  $z_1 + z_2$ .

**Definição 4.5** (Soma de Números Complexos).  $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

**Exemplo 4.2.** Sejam  $z_1 = 3 + 5i$ ,  $z_2 = 8 - 2i$  e  $z_3 = 3i$ . Determine o valor de  $z_1 + z_2 + z_3$ .

**Solução.**

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 + z_3 &= 3 + 5i + 8 - 2i + 3i \\ &= 11 + 6i.\end{aligned}$$

□

### 4.3.2 Produto de Números Complexos

Para efetuar a multiplicação entre dois números complexos, simplesmente utilizamos a propriedade distributiva e o fato de que  $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)i^2 \\ &= ac + (ad + bc)i - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte definição:

**Definição 4.6** (Produto de Números Complexos).  $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

**Exemplo 4.3.** Sejam  $z = 4 + 2i$  e  $w = 5 - i\sqrt{2}$ . Determine o produto  $zw$ .

**Solução.** Usando a propriedade distributiva e o fato de que  $i^2 = -1$ , temos:

$$\begin{aligned}zw &= (4 + 2i) \cdot (5 - i\sqrt{2}) \\ &= 4 \cdot 5 - (4\sqrt{2})i + (2 \cdot 5)i - (2\sqrt{2})i^2 \\ &= 20 - (4\sqrt{2})i + 10i - 2\sqrt{2} \cdot (-1) \\ &= 20 + (10 - 4\sqrt{2})i + 2\sqrt{2} \\ &= (20 + 2\sqrt{2}) + (10 - 4\sqrt{2})i.\end{aligned}$$

□

### 4.3.3 Divisão Entre Números Complexos

Primeiro, vamos definir o conjugado de um número complexo:

**Definição 4.7** (Conjugado de um Número Complexo). O conjugado de um número complexo  $z$  é denotado por  $\bar{z}$ . Se  $z = a + bi$ , então  $\bar{z} = a - bi$ .

Seja o número complexo  $z = a + bi$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i$  é a unidade imaginária. Note que, ao efetuar a multiplicação  $z \cdot \bar{z}$ , temos:

$$\begin{aligned}z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2(i^2) \\ &= a^2 - b^2(-1) \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

Veja que  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$  é um número real. Ou seja, sempre que multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado, obtemos um número real.

Sabendo disso, para efetuarmos a divisão entre dois números complexos, o procedimento que fazemos é multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador e, em seguida, desenvolvermos o resultado. Isso é feito com o intuito de eliminar a parte imaginária do denominador, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\frac{a + bi}{c + di} &= \left( \frac{a + bi}{c + di} \right) \cdot \left( \frac{c - di}{c - di} \right) \\ &= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.\end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte definição:

**Definição 4.8** (Divisão de Números Complexos). Se  $c + di \neq 0$ , temos:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \left( \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) i.$$

**Exemplo 4.4.** Sejam  $z = 2 - 3i$  e  $w = 5 + 4i$ . Efetue a divisão de  $z$  por  $w$ .

**Solução.** Para efetuar a divisão, basta multiplicar a fração  $\frac{z}{w}$  por  $\frac{\bar{w}}{\bar{w}}$ , como segue:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{2 - 3i}{5 + 4i} \\ &= \frac{2 - 3i}{5 + 4i} \cdot \frac{5 - 4i}{5 - 4i} \\ &= \frac{(2 - 3i)(5 - 4i)}{(5 + 4i)(5 - 4i)} \\ &= \frac{2 \cdot 5 - (2 \cdot 4)i - (3 \cdot 5)i + (3 \cdot 4)i^2}{5^2 - (4i)^2} \\ &= \frac{10 - 8i - 15i - 12}{25 + 16} \\ &= \frac{-2 - 23i}{41} \\ &= -\frac{2}{41} - \left( \frac{23}{41} \right) i. \end{aligned}$$

□

## 4.4 Classificação dos Números Complexos

Primeiramente, usando a definição de número complexo que vimos anteriormente, note que, se  $z \in \mathbb{R}$ , podemos escrever  $z = z + 0i$ , com  $z, 0 \in \mathbb{R}$  e  $i = \sqrt{-1}$  e, portanto,  $z$  é um número complexo. Ou seja,  $z \in \mathbb{C}$ . Dessa forma, todo número real é também um número

complexo. Então, o conjunto dos reais está contido no conjunto dos complexos. Simbolizamos por  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Agora, vamos às classificações dos números complexos. Um número complexo pode ter três classificações: real, imaginário e imaginário puro. Seja o número complexo  $z = a + bi$ . A classificação de  $z$  ocorre da seguinte forma:

- **Real:** dizemos que  $z \in \mathbb{R}$  se  $Im(z) = 0$ , ou seja, se  $b = 0$ .
- **Imaginário:** dizemos que  $z$  é um número imaginário se  $Im(z) \neq 0$ , ou seja, se  $b \neq 0$ .
- **Imaginário Puro:** dizemos que  $z$  é imaginário puro se  $Im(z) \neq 0$  e  $Re(z) = 0$ , ou seja, se  $b \neq 0$  e  $a = 0$ .

**Observação:** Note que, se  $z$  é imaginário puro, então  $z$  também é imaginário. Porém, se  $z$  é imaginário, não necessariamente será imaginário puro.

**Exemplo 4.5.** Seja  $z = (3 - 5m) + (2k + 3)i$ . Determine  $m$  e  $k$  de modo que:

1.  $z$  seja real.

**Solução.** Para que  $z$  seja real, precisamos que  $Im(z) = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned} 2k + 3 = 0 &\Rightarrow 2k = -3 \\ &\Rightarrow k = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, para que  $z \in \mathbb{R}$ , basta que  $k = -\frac{3}{2}$ . □

2.  $z$  seja imaginário puro.

**Solução.** Para que  $z$  seja imaginário puro, precisamos que

$Im(z) \neq 0$  e  $Re(z) = 0$ . Então temos:

$$\begin{aligned}2k + 3 \neq 0 &\Rightarrow 2k \neq -3 \\ &\Rightarrow k \neq -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3 - 5m = 0 &\Rightarrow -5m = -3 \\ &\Rightarrow m = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Portanto, para que  $z$  seja imaginário puro, temos que  $k \neq -\frac{3}{2}$  e  $m = \frac{3}{5}$ .  $\square$

**Exemplo 4.6.** (UFPA) Qual é o valor de  $m$  para que o produto  $(2 + mi)(3 + i)$  seja imaginário puro?

**Solução.** Primeiro, vamos efetuar a multiplicação e escrever o resultado na forma algébrica:

$$\begin{aligned}(2 + mi)(3 + i) &= 2 \cdot 3 + 2i + 3mi + mi^2 \\ &= 6 + (2 + 3m)i - m \\ &= (6 - m) + (2 + 3m)i.\end{aligned}$$

Agora, para que o produto seja imaginário puro, queremos que sua parte real seja nula, e sua parte imaginária, não-nula. Então temos:

$$\begin{aligned}6 - m = 0 &\Rightarrow m = 6 \\ 2 + 3m \neq 0 &\Rightarrow 3m \neq -2 \Rightarrow m \neq -\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Ou seja, basta que  $m = 6$ .  $\square$

## 4.5 Equações do Segundo Grau com Raízes Imaginárias

Após definirmos a unidade imaginária  $i = \sqrt{-1}$ , podemos determinar as soluções imaginárias de uma equação do segundo grau

com discriminante negativo. Como vimos na aula sobre Equações do Segundo grau, se o discriminante de uma equação é negativo, não temos soluções reais para essa equação. Por outro lado, temos as soluções imaginárias, como veremos no exemplo que segue.

**Exemplo 4.7.** Encontre as soluções da equação  $x^2 + x + 1 = 0$ .

**Solução.** Primeiro, vamos determinar o discriminante da equação dada:

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3.\end{aligned}$$

Veja que  $\Delta = -3$  é um discriminante negativo. Ou seja, não existem soluções reais para a equação dada. Por outro lado, podemos prosseguir com a Fórmula de Bháskara, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3 \cdot (-1)}}{2}.\end{aligned}$$

Aqui, usaremos a seguinte propriedade da radiciação:  $\sqrt{g \cdot h} = \sqrt{g} \cdot \sqrt{h}$ . Depois, substituiremos  $i = \sqrt{-1}$ . Então temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-1 \pm \sqrt{3 \cdot (-1)}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Assim, obtemos as duas soluções imaginárias da equação dada:  $-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$  e  $-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ .  $\square$

De forma geral, sempre que uma equação quadrática tiver o discriminante negativo, podemos prosseguir com a Fórmula de Bháskara, usar a propriedade da radiciação mencionada na solução acima e efetuar a substituição  $i = \sqrt{-1}$ . Dessa maneira, determinamos as soluções imaginárias de uma equação quadrática.

## 4.6 Interpretação Geométrica dos Complexos

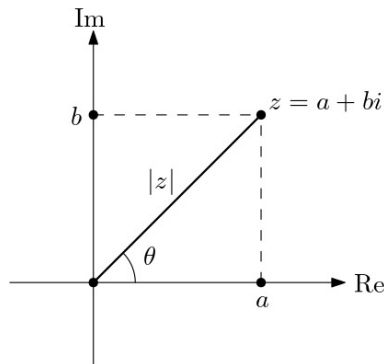


Figura 4.1: O número complexo  $z = a + bi$  no plano complexo.

A imagem acima mostra o complexo  $z = a + bi$  no plano complexo. O eixo horizontal possui os números reais e o eixo vertical possui os números imaginários puros. A distância do ponto  $z$  à origem é chamada de "módulo de  $z$ " e denotada por  $|z|$ . Além disso, o ângulo  $\theta$  é chamado de "argumento de  $z$ " e denotado por  $\arg(z)$ .

Note que, usando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Assim, conseguimos determinar o módulo de um número complexo com base na sua forma algébrica.

**Exemplo 4.8.** Encontre o módulo do número complexo  $z = 4 - 5i$ .

**Solução.** Usando a definição do módulo, temos:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{4^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{16 + 25} \\ &= \sqrt{41}. \end{aligned}$$

□

## 4.7 O conjugado e suas propriedades

Primeiramente, recordemos que, se  $z = a + bi$ , então seu conjugado é  $\bar{z} = a - bi$ . Abaixo, temos a representação geométrica do número complexo  $z = a + bi$  e o seu conjugado no plano complexo.

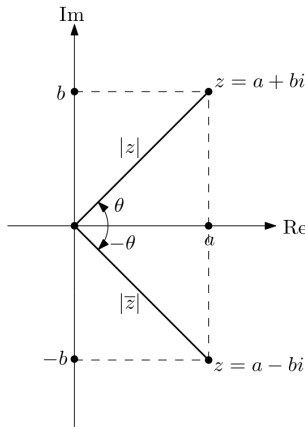


Figura 4.2: O número complexo  $z = a + bi$  e o seu conjugado  $\bar{z} = a - bi$  no plano complexo.

### 4.7.1 Propriedades do conjugado

Para facilitar nas demonstrações das proposições a seguir, considere sempre  $z = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Exercício:** Para as 9 propriedades abaixo, tente demonstrar sua validade pelo menos uma vez antes de conferir a demonstração.

O conjugado de  $\bar{z}$  é  $z$ , ou seja,  $\overline{\bar{z}} = z$ . Por isso dizemos que  $z$  e  $\bar{z}$  são mutuamente conjugados. Por definição, o conjugado de  $z$  é  $\bar{z} = a - bi$ . Com isso, o conjugado de  $\bar{z}$  é  $\overline{\bar{z}} = a - (-bi) = a + bi$ . Portanto,  $\overline{\bar{z}} = z$ .  $\square$

O módulo de  $z$  é igual ao módulo de  $\bar{z}$ , ou seja,  $|z| = |\bar{z}|$ . Como vimos anteriormente,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Pela definição de módulo de um número complexo, também temos que  $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ .  $\square$

$$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

- Primeiramente, vamos provar que  $z \in \mathbb{R} \Rightarrow z = \bar{z}$ :

Se  $z = \bar{z}$ , então  $a + bi = a - bi \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0$ . Ou seja,  $z$  não possui parte imaginária, portanto,  $z \in \mathbb{R}$ .

- Agora, vamos provar que  $z = \bar{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$ :

Se  $z \in \mathbb{R}$ , então  $z$  possui parte imaginária nula, ou seja,  $b = 0$ .  $\square$

$z = -\bar{z} \Leftrightarrow z$  é imaginário puro. Se  $z = -\bar{z}$ , então  $a + bi = -(a - bi) = -a + bi \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z = 0 + bi$ . Ou seja,  $z$  é imaginário puro.  $\square$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}. \quad z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 \cdot i^2 = a^2 + b^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = |z|^2. \quad \square$$

**Observação:** Essa última propriedade é muito importante, pois permite eliminar o módulo dos cálculos.

A soma e o produto de números mutuamente conjugados é um número real.

- Soma:  $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a \in \mathbb{R}$
- Produto:  $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ , como vimos na proposição acima.  $\square$

Para facilitar na demonstração das próximas proposições, considere  $z_1 = a_1 + b_1i$  e  $z_2 = a_2 + b_2i$ , com  $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= (a_1 - b_1i) + (a_2 - b_2i) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

□

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i)} \\ &= \overline{a_1a_2 + a_1b_2i + a_2b_1i + b_1b_2i^2} \\ &= \overline{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i} \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)i. \end{aligned}$$

Por outro lado, veja que:

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (a_1 - b_1i) \cdot (a_2 - b_2i) \\ &= a_1a_2 - a_1b_2i - a_2b_1i + b_1b_2i^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ .

□

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}. \quad \text{Exercício.}$$

Um fato importante sobre as raízes imaginárias de uma equação do segundo grau, que envolve o conjugado de um número complexo, será mostrado com a próxima proposição.

Se  $z$  é solução de uma equação quadrática, então  $\bar{z}$  também é. Sejam a equação quadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  e o número imaginário  $z = p + qi$ , onde  $z$  é solução da equação dada. Primeiramente, se a equação em questão admite solução imaginária, então seu discriminante é negativo. Sendo assim, podemos escrever  $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{h}$ , com

$h > 0$ . Então, sejam  $x_1$  e  $x_2$  as soluções da equação dada. Usando a Fórmula de Bháskara, temos que  $x_1$  e  $x_2$  são da forma:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} - \frac{i\sqrt{h}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} + \frac{i\sqrt{h}}{2a}.$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir  $z = x_1$ . Então temos que:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \overline{x_1} \\ &= \overline{\frac{-b}{2a} - \frac{i\sqrt{h}}{2a}} \\ &= \frac{-b}{2a} + \frac{i\sqrt{h}}{2a} \\ &= x_2. \end{aligned}$$

Ou seja, concluímos que  $\bar{z}$  é a outra solução da equação inicial.  $\square$

## 4.8 Potências da unidade imaginária

As potências de  $i = \sqrt{-1}$  são periódicas. Veja na tabela a seguir:

Potência	Resultado
$i^1$	$i$
$i^2$	$-1$
$i^3$	$-i$
$i^4$	$1$
$i^5$	$i$
$i^6$	$-1$
$\dots$	$\dots$
$i^n$	$i^r$

Onde  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por 4. Ou seja, a repetição ocorre a cada 4 potências. Saber disso facilita muito o cálculo de potências de  $i$  com o expoente grande, como veremos no próximo exemplo.

**Exemplo 4.9.** Determine  $i^{37}$ .

**Solução.** Fazendo a divisão de 37 por 4, obtemos o resto 1. Isso significa que  $i^{37} = i^1 = i$ .  $\square$

Reconhecer esse tipo de repetição em potências é muito importante. Encontramos a necessidade disso em outras situações também, como veremos no exemplo que segue.

**Exemplo 4.10.** Determine  $(1 + i)^{25}$ .

**Solução.** Primeiramente, note que  $(1 + i)^2 = 1^2 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$ . Usaremos isso para determinar  $(1 + i)^{25}$  com mais facilidade. Veja que podemos decompor  $(1 + i)^{25}$  da seguinte forma:

$$(1 + i)^{25} = [(1 + i)^2]^{12} \cdot (1 + i).$$

Substituindo  $(1 + i)^2 = 2i$ , temos:

$$(1 + i)^{25} = (2i)^{12} \cdot (1 + i) = 2^{12} \cdot i^{12} \cdot (1 + i).$$

Agora, vamos determinar  $i^{12}$  da maneira vista anteriormente. Note que 12 deixa resto 0 na divisão por 4, então temos que  $i^{12} = i^0 = 1$ . Substituindo isso na expressão anterior, temos:

$$\begin{aligned}(1 + i)^{25} &= 2^{12} \cdot 1 \cdot (1 + i) \\ &= 2^{12} \cdot (1 + i) \\ &= 2^{12} + 2^{12}i.\end{aligned}$$

$\square$

Observe que, da mesma forma, podemos usar que  $(1 - i)^2 = -2i$  para resolver potências desse tipo com expoentes maiores. Ilustraremos isso no próximo exemplo, envolvendo também as situações já vistas anteriormente.

**Exemplo 4.11.** Calcule  $i^{113} \cdot (1 + i)^{19} \cdot (1 - i)^{15}$

**Solução.** Primeiramente, vamos escrever  $(1 + i)^{19}$  e  $(1 - i)^{15}$  de uma forma conveniente e utilizar o fato de que  $(1 + i)^2 = 2i$  e  $(1 - i)^2 = -2i$ . Em seguida, desenvolveremos o produto e escreveremos as

potências de  $i$  de uma forma conveniente, utilizando o fato de que  $i^4 = 1$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 i^{113} \cdot (1+i)^{19} \cdot (1-i)^{15} &= i^{113} \cdot [(1+i)^2]^9 \cdot (1+i) \cdot [(1-i)^2]^7 \cdot (1-i) \\
 &= i^{113} \cdot (2i)^9 \cdot (1+i) \cdot (-2i)^7 \cdot (1-i) \\
 &= i^{113} \cdot (2i)^9 \cdot (-2i)^7 \cdot (1+i) \cdot (1-i) \\
 &= i^{113} \cdot (2^9 \cdot i^9) \cdot [(-2)^7 \cdot i^7] \cdot (1^2 - i^2) \\
 &= i^{113} \cdot 2^9 \cdot i^9 \cdot (-2)^7 \cdot i^7 \cdot 2 \\
 &= 2^9 \cdot (-2)^7 \cdot 2 \cdot i^{113} \cdot i^9 \cdot i^7 \\
 &= -2^9 \cdot 2^7 \cdot 2 \cdot i^{129} \\
 &= -2^{17} \cdot i^{129} \\
 &= -2^{17} \cdot (i^4)^{32} \cdot i \\
 &= -2^{17} \cdot 1^{32} \cdot i \\
 &= -2^{17} \cdot i.
 \end{aligned}$$

## 4.9 Forma Trigonométrica

### 4.9.1 Como Determinar a Forma Trigonométrica de Um Número Complexo

Além de representar um número complexo na forma algébrica, podemos representá-lo por meio da forma trigonométrica:

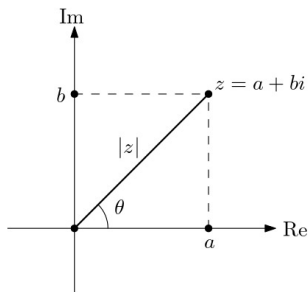


Figura 4.3: O número complexo  $z = a + bi$  no plano complexo.

Como vimos anteriormente, o ângulo  $\theta$  é o argumento de  $z$ , denotado também por  $\arg(z)$ . Note que, com base nas relações de seno e cosseno, podemos escrever  $a$  e  $b$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z|\cos\theta \\ \text{sen}\theta &= \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z|\text{sen}\theta. \end{aligned}$$

Com isso, podemos substituir  $a$  e  $b$  em  $z$ , obtendo o seguinte:

$$\begin{aligned} z &= a + bi \Rightarrow z = |z|\cos\theta + |z|\text{sen}\theta i \\ &\Rightarrow z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta). \end{aligned}$$

Dessa maneira, conseguimos especificar as coordenadas de  $z$  no plano complexo com base no seu módulo e seu argumento.

Portanto, para encontrarmos a forma trigonométrica de  $z$ , precisamos, primeiramente, encontrar  $|z|$ . Feito isso, vamos usar as seguintes relações, que obtemos logo acima:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{|z|} \\ \text{sen}\theta &= \frac{b}{|z|}. \end{aligned}$$

Com isso, encontramos os valores de  $\cos\theta$  e  $\text{sen}\theta$ . Com base nesses valores, conseguimos determinar o ângulo  $\theta$ . Para fazermos isso, é essencial termos termos uma boa noção do círculo trigonométrico e lembrarmos dos arcos notáveis:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

A seguir, vamos ilustrar melhor esse procedimento com alguns exemplos.

**Exemplo 4.12.** Escreva o número 2 na forma trigonométrica:

**Solução.** Primeiro, vamos representar o número  $z = 2 + 0i$  no plano complexo:

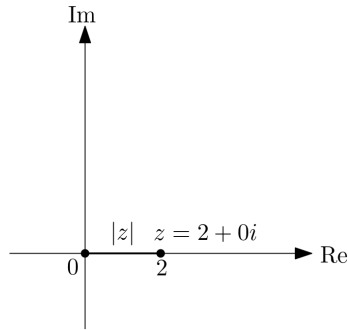


Figura 4.4: O número complexo  $z = 2 + 0i$  no plano complexo.

Veja que como 2 não possui parte imaginária, temos  $|2| = 2$  e  $\theta = 0$ . Portanto, escrevendo na forma trigonométrica, temos  $2 = 2 \cdot [\cos(0) + i\text{sen}(0)]$ .  $\square$

**Exemplo 4.13.** Escreva o número  $3i$  na forma trigonométrica:

**Solução.** Representando o número  $z = 0 + 3i$  no plano complexo, temos:

Veja que como  $3i$  não possui parte real, temos  $|3i| = 3$  e  $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ . Então temos  $3i = 3 \cdot [\cos(90^\circ) + i\text{sen}(90^\circ)]$  ou  $3i = 3 \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$ .  $\square$

**Exemplo 4.14.** Escreva o número  $1 + i$  na forma trigonométrica:

**Solução.** Representando o número  $z = 1 + 1i$  no plano complexo, temos:

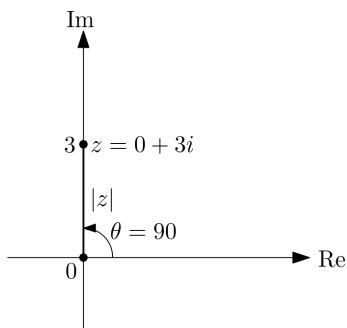


Figura 4.5: O número complexo  $z = 0 + 3i$  no plano complexo.

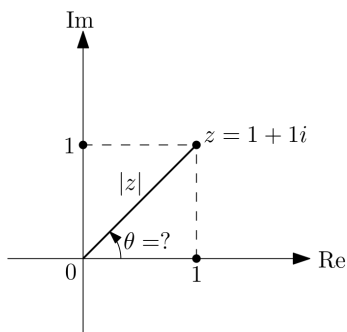


Figura 4.6: O número complexo  $z = 1 + 1i$  no plano complexo.

Primeiro, vamos calcular  $|1 + 1i|$

$$|1 + 1i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Agora, com base nos valores de  $\cos\theta$  e  $\sen\theta$ , vamos determinar o ângulo  $\theta$ :

$$\cos\theta = \frac{a}{|1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sen\theta = \frac{b}{|1 + i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Veja que o ângulo  $\theta$  é tal que  $\cos\theta = \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . O único valor de  $\theta$  que satisfaz isso é  $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ . Portanto, temos que  $1 + i = \sqrt{2} \cdot [\cos(45^\circ) + i\operatorname{sen}(45^\circ)]$  ou  $1 + i = \sqrt{2} \cdot \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]$ .

□

**Exemplo 4.15.** Escreva o número  $1 + i\sqrt{3}$  na forma trigonométrica:

**Solução.** Representando o número  $z = 1 + i\sqrt{3}$  no plano complexo, temos:

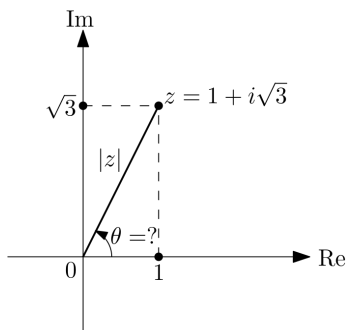


Figura 4.7: O número complexo  $z = 1 + i\sqrt{3}$  no plano complexo.

Agora, vamos encontrar  $|1 + i\sqrt{3}|$ :

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2.$$

Feito isso, usando os valores de  $\cos\theta$  e  $\operatorname{sen}\theta$ , vamos determinar o ângulo  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{a}{|1 + i\sqrt{3}|} = \frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{b}{|1 + i\sqrt{3}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Veja que  $\theta$  é tal que  $\cos\theta = \frac{1}{2}$  e  $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . O único valor de

$\theta$  possível é  $\theta = 60^\circ = \frac{2\pi}{3}$ . Portanto, temos que  $1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot [\cos(60^\circ) + i\text{sen}(60^\circ)]$  ou  $1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \left[ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$ .  $\square$

### 4.9.2 Multiplicação na Forma Trigonométrica

Assim como fazemos a multiplicação de números complexos na forma algébrica, podemos também fazê-la na forma trigonométrica.

Sejam os números complexos  $z_1$  e  $z_2$ , cujas formas trigonométricas são, respectivamente,  $z_1 = |z_1| \cdot [\cos(\theta_1) + i\text{sen}(\theta_1)]$  e  $z_2 = |z_2| \cdot [\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)]$ . Sabendo das relações

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a)\cos(b) - \text{sen}(a)\text{sen}(b) \\ &\text{e} \\ \text{sen}(a + b) &= \text{sen}(a)\cos(b) + \text{sen}(b)\cos(a), \end{aligned}$$

temos que o produto  $z_1 \cdot z_2$  é dado por:

$$\begin{aligned} & z_1 \cdot z_2 \\ = & \{|z_1| \cdot [\cos(\theta_1) + i\text{sen}(\theta_1)]\} \cdot \{|z_2| \cdot [\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)]\} \\ = & \{|z_1||z_2|\} \{[\cos(\theta_1) + i\text{sen}(\theta_1)] \cdot [\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)]\} \\ = & |z_1||z_2| \cdot [\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1)i \\ & \quad + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)i - \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)] \\ = & |z_1||z_2| \cdot \{[\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \text{sen}(\theta_1)\text{sen}(\theta_2)] \\ & \quad + [\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_1) + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_2)]i\} \\ = & |z_1||z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

Portanto, para fazer a multiplicação números complexos  $z_1 = |z_1| \cdot [\cos(\theta_1) + i\text{sen}(\theta_1)]$  e  $z_2 = |z_2| \cdot [\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)]$  na forma trigonométrica, temos a fórmula:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)].$$

A seguir, vamos aplicar essa fórmula em um exemplo.

**Exemplo 4.16.** Sejam os números complexos  $z = 2 \cdot [\cos(45^\circ) + i\text{sen}(45^\circ)]$  e  $w = \sqrt{3} \cdot [\cos(30^\circ) + i\text{sen}(30^\circ)]$ . Determine  $z \cdot w$ .

**Solução.** Usando a fórmula obtida, temos:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w| \cdot [\cos(45^\circ + 30^\circ) + i\text{sen}(45^\circ + 30^\circ)] \\ &= 2\sqrt{3} \cdot [\cos(75^\circ) + i\text{sen}(75^\circ)]. \end{aligned}$$

□

### 4.9.3 Divisão na Forma Trigonométrica

Sejam os números complexos  $z_1 = |z_1| \cdot [\cos(\theta_1) + i\text{sen}\theta_1]$  e  $z_2 = |z_2| \cdot [\cos(\theta_2) + i\text{sen}(\theta_2)]$ . Para fazermos a divisão entre  $z_1$  e  $z_2$ , temos a seguinte fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)].$$

**Observação:** a demonstração dessa fórmula é um exercício (Exercício 20, item (a)) presente no caderno de questões, no fim da aula.

**Exemplo 4.17.** Usando a fórmula da divisão na forma trigonométrica, efetue a divisão de  $z \cdot w = 2\sqrt{3} \cdot [\cos(75^\circ) + i\text{sen}(75^\circ)]$  por  $z = 2 \cdot [\cos(45^\circ) + i\text{sen}(45^\circ)]$ . Veja que, conforme o Exemplo 31, devemos obter  $\frac{z \cdot w}{z} = w = \sqrt{3} \cdot [\cos(30^\circ) + i\text{sen}(30^\circ)]$ .

**Solução.** Aplicando os valores na fórmula, temos:

$$\begin{aligned} \frac{z \cdot w}{z} &= \frac{|z \cdot w|}{|z|} \cdot [\cos(75^\circ - 45^\circ) + i\text{sen}(75^\circ - 45^\circ)] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot [\cos(30^\circ) + i\text{sen}(30^\circ)] \\ &= \sqrt{3} \cdot [\cos(30^\circ) + i\text{sen}(30^\circ)]. \end{aligned}$$

Note que obtemos o resultado esperado. □

**Exemplo 4.18.** Sejam os números complexos  $z = 2 \cdot [\cos(45^\circ) + i\text{sen}(45^\circ)]$  e  $w = \sqrt{3} \cdot [\cos(30^\circ) + i\text{sen}(30^\circ)]$ . Determine o valor de  $\frac{z}{w}$ .

**Solução.** Aplicando a fórmula da divisão na forma trigonométrica, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|} \cdot [\cos(45^\circ - 30^\circ) + i\operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ)] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot [\cos(15^\circ) + i\operatorname{sen}(15^\circ)] \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot [\cos(15^\circ) + i\operatorname{sen}(15^\circ)] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot [\cos(15^\circ) + i\operatorname{sen}(15^\circ)]. \end{aligned}$$

□

### Problemas Propostos

●	▲	◆	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Calcule  $i^{2011}, i^{2012}, i^{2013}$ .
2. ● Calcule  $i^{8n+3} + i^{4n+1}$ .
3. ● Calcule:
  - (a)  $(1 + i)^{2011}$ .
  - (b)  $(1 - i)^{2012}$ .
  - (c)  $(1 + i)^{2013}$ .
4. ● O conjugado de  $\frac{1 + 3i}{2 - i}$  é:
  - (a)  $\frac{-1 - 7i}{5}$ .
  - (b)  $\frac{1 - i}{5}$ .

(c)  $\frac{1+2i}{7}$ .

(d)  $\frac{-1+7i}{5}$ .

(e)  $\frac{1+i}{5}$ .

5. ● Mostre que os números  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 1 - i$  satisfazem à equação  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .

6. ▲ Resolva a equação  $|z| - z = 2 + 2i$ .

7. ▲ Simplifique a expressão abaixo, reescrevendo-a em sua forma algébrica:

$$\frac{(3+i) \cdot (3-i)}{(2+i) \cdot (3-2i)}$$

8. ▲ Encontre números reais  $x, y, u, v$  satisfazendo

$$\begin{cases} z = x + i \\ w = 3 + yi \\ z + w = u - i \\ zw = 14 + iv \end{cases}$$

9. ▲ Seja  $z = a + bi$ , em que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Encontre condições sobre  $a, b$  para que:

(a)  $z^3$  seja real.

(b)  $z^3$  seja imaginário puro.

10. ▲ Para  $z \in \mathbb{C}$ , prove que  $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$ .

11. ▲ Prove que  $|1 + iz| = |1 - iz|$  se, e somente se,  $z \in \mathbb{R}$ .

12. ▲ Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Se  $a + bi \neq 0$ , determine a forma algébrica do número  $\frac{1}{a + bi}$ .

13. ▲ Sejam  $z = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ$  e  $w = \cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ$ .
- Quanto vale  $z^{10}$ ?
  - Quanto vale  $zw$ ? (Faça essa conta sem transformar na forma algébrica)
  - Escreva  $zw$  na forma algébrica.
14. ▲ Determine o número complexo  $z$  na seguinte igualdade:  $3i - 2z = (z + 7)i - 7$ .
15. ◆ (ITA) Seja  $z = a + bi$  um número complexo. Se  $z + \frac{1}{z}$  é um número real, então mostre que  $b = 0$  ou  $|z| = 1$ .
16. ◆ (ITA) Se  $z_1$  e  $z_2$  são números complexos, e  $z_1 + z_2$  e  $z_1 \cdot z_2$  são ambos reais, então mostre que  $z_1$  e  $z_2$  são ambos reais ou  $\bar{z} = z$ .
17. ◆ Prove que se  $z$  é raiz de uma função polinomial  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , com  $a_0, a_1, \dots, a_n$  reais, então  $\bar{z}$  também é raiz de  $p(x)$ .
18. ◆ Calcule o valor de  $(1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{100}$ .
19. ◆ O número  $(a + bi)^4$ ,  $a$  e  $b$  reais, é real e estritamente negativo se, e somente se:
- $a = 0$ .
  - $b = 0$ .
  - $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ .
  - $a \neq 0$  e  $b \neq 0$  e  $a = \pm b$ .
  - Nenhuma das alternativas acima.
20. ◆ Seja  $z = |z|(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$  e  $w = |w|(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os argumentos de  $z$  e  $w$ , respectivamente.
- Mostre a fórmula da divisão na forma trigonométrica:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} [\cos(\alpha - \beta) + i \operatorname{sen}(\alpha - \beta)].$$

- (b) Prove a Fórmula de De'Moivre:  $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha))$ , para  $n \in \mathbb{N}$ .
21.  $\blacklozenge$  Encontre todos os valores de  $z$  que satisfazem  $z^3 - 1 = 0$ . Tente fazer isso usando a forma trigonométrica.
22.  $\star$  Sejam  $z = |z|(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ ,  $w = |w|(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)$ ,  $w \neq 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ .
- (a) Mostre que se  $z^n = w$ , então

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left[ \cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right].$$

- (b) Determine quantas raízes tem a seguinte equação:

$$z = \sqrt[n]{|w|} \left[ \cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) \right].$$

Há alguma ligação com  $k$ ?

### Dicas e soluções

- $i^{2011} = -i$ ,  $i^{2012} = 1$  e  $i^{2013} = i$ .
- $i^{8n+3} + i^{4n+1} = 0$ .
- $(1 + i)^{2011} = -2^{1005} + 2^{1005}i$ .
  - $(1 - i)^{2012} = -2^{1006}$ .
  - $(1 + i)^{2013} = -2^{1006} - 2^{1006}i$ .
- Alternativa a)  $\frac{-1 - 7i}{5}$ .
- Basta substituir  $z_1$  e  $z_2$  na equação dada e verificar que isso leva a uma igualdade.

6.  $z = -2i$ .
7.  $\frac{(3+i) \cdot (3-i)}{(2+i) \cdot (3-2i)} = \frac{16}{13} + \left(\frac{2}{13}\right)i$ .
8.  $x = 4, y = -2, u = 7$  e  $v = -5$ .
9. (a)  $b = 0$  ou  $a = \pm b\sqrt{3}$ .  
(b)  $a = 0$ .
10. Primeiro, suponha que  $|z| = 1$  e use a definição do módulo para concluir que  $\bar{z} = \frac{1}{z}$ . Depois, suponha que  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  e use a definição do conjugado para concluir que  $|z| = 1$ .
11. Primeiro, suponha que  $|1 + iz| = |1 - iz|$  e conclua que  $z = 0$  e, portanto,  $z \in \mathbb{R}$ . Depois, suponha que  $z \in \mathbb{R}$  para concluir que  $|1 + iz| = |1 - iz|$ .
12.  $\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right)i$ .
13. (a)  $z^{10} = -1$ .  
(b)  $zw = \cos(135^\circ) + i\sin(135^\circ)$ .  
(c)  $zw = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i$
- 14.
15. Escreva  $z + \frac{1}{z}$  na forma algébrica. O que é necessário para que  $z + \frac{1}{z}$  seja real?
16. Escreva  $z_1 + z_2$  e  $z_1 \cdot z_2$  na forma algébrica. Sabendo que ambos os números são reais, analise suas partes imaginárias.
17. A Proposição 26 pode ajudar.
18.  $(1 + i) + (1 + i)^2 + \dots + (1 + i)^{100} = (-2^{50} - 1) + 2^{50}i$ .

19. Alternativa (e) Nenhuma das alternativas acima. O número  $(a + bi)^4$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ , é real e estritamente negativo se, e somente se,  $|a| = |b|$ .
20. (a) Use a fórmula da multiplicação na forma trigonométrica.  
(b) Use a fórmula trigonométrica da multiplicação e aplique indução em  $n$ .
21.  $z = -1$ ,  $z = -\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$  e  $z = -\frac{1}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ .
22. Resolver o exercício 21 usando a forma trigonométrica pode ajudar a resolver essa questão.



# Aula 5

## Equações de Grau Maior do Que 2

GUSTAVO RODRIGUES DA SILVA

### 5.1 Introdução

Nesta aula, serão abordadas diferentes maneiras de resolver uma equação de grau 3 ou grau maior. Algumas dessas maneiras já foram trabalhadas nas aulas anteriores, outras não. De início, serão listados os passos para resolver uma equação desse tipo. Depois, cada passo será trabalhado separadamente em uma seção, com a ajuda de vários exemplos.

### 5.2 Passos para Resolver uma Equação de Grau Maior do Que 2

Para resolver uma equação de grau maior do que 2, podemos seguir os seguintes passos:

- **Relações de Girard:** verificar se as Relações de Girard podem ajudar em alguma coisa, principalmente se já temos alguma informação sobre as raízes da equação dada. Saber se

as raízes são inteiras, ou se existem duas raízes opostas ou inversas, são algumas informações relevantes que indicam o uso dessas relações;

- **Se Uma Raiz é Complexa:** quando a equação tem coeficientes reais e é dada uma raiz complexa, então o conjugado dessa raiz complexa também é raiz da equação em questão. Sabendo disso, trabalhamos com Girard ou podemos dividir o polinômio a fim de obter outro com 2 graus abaixo. Uma variante desta regra é quando temos coeficientes racionais e sabemos que existe uma raiz irracional, então o “conjugado” desta raiz irracional também será raiz da equação.
- **Mudança de Variável:** verificar se uma mudança de variável pode transformar toda a equação numa equação de grau menor. Um exemplo disso dá-se quando temos equações biquadradas, bicúbicas ou triquadradas;
- **Fatoração em Polinômios de Grau Menor:** verificar a possibilidade de fatorar o polinômio característico da equação em produtos de polinômios menores. Por exemplo, podemos escrever um polinômio de grau 4 como produto de dois polinômios de grau 2;
- **Procurar Possíveis Raízes Racionais e Reduzir o Grau:** se os coeficientes do polinômio característico da equação forem todos inteiros, podemos procurar as possíveis raízes racionais deste polinômio. Depois de achar algumas raízes, podemos efetuar a divisão utilizando o Dispositivo de Briot-Ruffini ou o Método da Chave, a fim de reduzir o grau do polinômio;
- **Identificar Equações Recíprocas e Resolvê-las:** verificar se os coeficientes do polinômio formam um palíndromo ou um palíndromo com sinais trocados (equações recíprocas);
- **Resolver equações do tipo:**  $f(f(f(f\dots(f(x)))))) = x$ .

A seguir, cada forma de resolução acima listada será trabalhada em uma seção separada, com o auxílio de exercícios para exemplificar cada uma.

### 5.3 Relações de Girard

Primeiramente, vamos recordar brevemente a construção dessas relações. Conforme vimos na Aula 3, sobre Relações de Girard, dada a equação polinomial do terceiro grau  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com as raízes  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , temos as seguintes relações sobre essas raízes:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a} \\x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}.\end{aligned}$$

Além disso, se temos a equação de grau 4  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , cujas raízes são  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$ , as Relações de Girard nos dizem que:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{b}{a} \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 &= \frac{c}{a} \\x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -\frac{d}{a} \\x_1x_2x_3x_4 &= \frac{e}{a}.\end{aligned}$$

Veja que, do lado esquerdo das igualdades, temos a soma das raízes separadamente, depois a soma das raízes aos pares, depois a soma das raízes aos trios, e depois a soma das raízes aos quartetos, o que coincide com o produto das raízes. Por outro lado, do lado direito da igualdade temos a divisão dos coeficientes  $b, c, d, e...$  por  $a$ , fazendo a alternância de sinais. Isso pode ser estendido para equações polinomiais de qualquer grau.

De maneira geral, as Relações de Girard mostram-se eficientes para solucionar problemas de equações polinomiais onde já conhecemos algumas informações sobre suas raízes.

Agora que já recordamos a construção das Relações de Girard, vamos aos exemplos. A seguir, temos exercícios cujas resoluções demandam o uso dessas relações para a obtenção das raízes de equações de grau maior do que 2.

**Exemplo 5.1.** As raízes da equação polinomial  $x^3 - 15x^2 + 71x - 105 = 0$  estão em progressão aritmética. Calcule essas raízes.

**Solução.** Sejam  $x_1, x_2$  e  $x_3$  as raízes da equação dada. Se essas estão em progressão aritmética de razão  $r$ , então  $a_1 = a_2 - r$  e  $a_3 = a_2 + r$ . Com isso, temos que as raízes da equação dada são  $a_2 - r, a_2$  e  $a_2 + r$ . Agora, usando as Relações de Girard para a soma e o produto das raízes:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a} \Rightarrow (a_2 - r) + (a_2) + (a_2 + r) = -\frac{-15}{1} \\ &\Rightarrow 3a_2 = 15 \\ &\Rightarrow a_2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a} \Rightarrow (5 - r) \cdot 5 \cdot (5 + r) = -\frac{-105}{1} \\ &\Rightarrow (5 - r) \cdot (5 + r) \cdot 5 = 105 \\ &\Rightarrow (5^2 - r^2) \cdot 5 = 105 \\ &\Rightarrow 5^2 - r^2 = 21 \\ &\Rightarrow r^2 = 4 \\ &\Rightarrow r = \pm 2. \end{aligned}$$

Veja que obtemos  $r = \pm 2$ , mas como  $r$  é a razão da P.A., deve ser um número não-negativo. Portanto, temos que  $r = 2$ . Com isso, as raízes são  $x_1 = 3, x_2 = 5$  e  $x_3 = 7$ .  $\square$

**Observação:** note que, uma vez que as raízes estão em P.A. de razão  $r$ , poderíamos escrevê-las como  $x_1, x_1 + r$  e  $x_1 + 2r$ . Porém,

ao escrevermos as raízes como  $x_2 - r, x_2$  e  $x_2 + r$ , simplificamos as contas com alguns cancelamentos da constante  $r$ .

**Exemplo 5.2.** (ITA) Seja  $k \in \mathbb{R}$  tal que a equação  $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$  possua uma raiz dupla e inteira  $x_1$  e uma raiz  $x_2$ , distinta de  $x_1$  (ou seja, as raízes são  $x_1, x_1$  e  $x_2$ ). Determine o valor de  $(k + x_1) \cdot x_2$ .

**Solução.** Vamos utilizar as Relações de Girard para a soma e soma aos pares das raízes:

$$x_1 + x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = -\frac{7}{2} \quad (5.1)$$

$$x_1x_1 + x_1x_2 + x_1x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 = \frac{4}{2} = 2 \quad (5.2)$$

Isolando  $x_2$  em (1), temos:

$$2x_1 + x_2 = -\frac{7}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{7}{2} - 2x_1$$

Substituindo  $x_2$  em (2):

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_1x_2 &= \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 \left( -\frac{7}{2} - 2x_1 \right) = 2 \\ &\Rightarrow x_1^2 - 7x_1 - 4x_1^2 = 2 \\ &\Rightarrow -3x_1^2 - 7x_1 - 2 = 0 \\ &\Rightarrow 3x_1^2 + 7x_1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Analisando as soluções da equação acima, notamos que a única so-

lução inteira é  $x_1 = -2$ . Substituindo  $x_1$  na expressão de  $x_2$ , temos:

$$\begin{aligned}x_2 &= -\frac{7}{2} - 2x_1 \\&= -\frac{7}{2} - 2 \cdot (-2) \\&= -\frac{7}{2} + 4 \\&= -\frac{7}{2} + \frac{8}{2} \\&= \frac{8-7}{2} \\&= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Portanto, temos  $x_2 = \frac{1}{2}$ . Usando novamente as Relações de Girard, dessa vez para o produto das raízes, temos:

$$\begin{aligned}x_1 x_1 x_2 &= -\frac{d}{a} \Rightarrow (-2) \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{k}{2} \\&\Rightarrow 2 = -\frac{k}{2} \\&\Rightarrow -k = 4 \\&\Rightarrow k = -4.\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo os valores em  $(k + x_1) \cdot x_2$ , temos:

$$\begin{aligned}(k + x_1) \cdot x_2 &= (-4 - 2) \cdot \frac{1}{2} \\&= -6 \cdot \frac{1}{2} \\&= -3.\end{aligned}$$

□

## 5.4 Se Uma Raiz é Complexa

Primeiramente, lembremos que, se  $z = a + bi$ , então o conjugado de  $z$  é dado por  $\bar{z} = a - bi$ . Conforme a demonstração feita na Aula

4, sobre Números Complexos, sabemos que a seguinte proposição é verdadeira: Se o número complexo  $z$  é raiz de uma função polinomial  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , com  $a_0, a_1, \dots, a_n$  reais, então  $\bar{z}$  também é raiz de  $p(x)$ .

Sabendo disso, quando uma equação tem coeficientes reais e é dada uma raiz complexa, então o conjugado dessa raiz complexa também é raiz da equação em questão. Sendo assim, podemos prosseguir no problema utilizando as Relações de Girard ou abaixando o grau da equação com a qual estamos trabalhando.

Veja que, se  $z = a + bi$  é raiz de um polinômio  $p(x)$ , então  $\bar{z} = a - bi$  também é. Dessa forma,  $p(x)$  é divisível por  $z$  e por  $\bar{z}$  e, conseqüentemente,  $p(x)$  será divisível por  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ . Com isso, ao efetuarmos a divisão de  $p(x)$  por  $z \cdot \bar{z}$ , obtemos um polinômio  $q(x)$  com dois graus abaixo de  $p(x)$ .

Agora, vamos às resoluções de alguns exercícios que exigem a aplicação desses conceitos.

**Exemplo 5.3.** (ITA 2005 - Modificada) O número complexo  $2 + i$  é raiz do polinômio  $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$ , com  $p, q \in \mathbb{R}$ . Sabendo que as demais raízes de  $f(x)$  são reais, a alternativa que mais se aproxima da soma dessas raízes reais de  $f$  é:

- (a) 4
- (b) -4
- (c) 6
- (d) 5
- (e) -5

**Solução.** Como  $2 + i$  é raiz de  $f(x)$  e os coeficientes são todos reais, então  $2 - i$  também é raiz de  $f(x)$ . Sejam  $x_1$  e  $x_2$  as demais raízes. Usando a Relação de Girard para a soma das raízes, temos:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + (2 + i) + (2 - i) &= -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 + 4 = -\frac{1}{1} \\ &\Rightarrow x_1 + x_2 = -5.\end{aligned}$$

Ou seja, a soma das raízes reais de  $f(x)$  é igual a  $x_1 + x_2 = -5$ . Portanto, a alternativa correta é a (e) -5.  $\square$

**Exemplo 5.4.** (ITA 2006) Seja  $p$  um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite  $1 - i$  como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de  $p$  são, respectivamente, 10 e  $-40$ . Sendo afirmado que três raízes de  $p$  são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são:

(a)  $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{193}}{6}$ , 3 e  $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{193}}{6}$ .

(b)  $2 - 4\sqrt{13}$ , 2 e  $2 + 4\sqrt{13}$ .

(c)  $-4$ , 2 e 8.

(d)  $-2$ , 3 e 8.

(e)  $-1$ , 2 e 5.

**Solução.** Se um polinômio  $p$  de grau 7, com coeficientes reais, admite  $1 - i$  como raiz de multiplicidade 2, então, também admite  $1 + i$  como raiz de multiplicidade 2. Dessa forma, já temos quatro raízes para o polinômio dado. Sabemos que  $p$  possui três raízes reais e distintas que estão em progressão aritmética. Então, sejam  $\alpha - r$ ,  $\alpha$  e  $\alpha + r$ , com  $\alpha, r \in \mathbb{R}$ , essas outras três raízes de  $p$ . Sendo assim, usando as Relações de Girard para a soma e o produto das raízes, temos:

$$(1 - i) + (1 - i) + (1 + i) + (1 + i) + (\alpha - r) + \alpha + (\alpha + r) = 10$$

$$(1 - i) \cdot (1 - i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (\alpha - r) \cdot \alpha \cdot (\alpha + r) = -40.$$

Da primeira equação, obtemos:

$$4 + 3\alpha = 10 \Rightarrow 3\alpha = 6$$

$$\Rightarrow \alpha = 2.$$

Lembremos que  $(1 + i)^2 = 2i$  e  $(1 - i)^2 = -2i$ . Usando isso para simplificar a segunda equação e, sabendo que  $\alpha = 2$ , temos:

$$\begin{aligned} & (1 - i)^2 \cdot (1 + i)^2 \cdot [(\alpha - r) \cdot (\alpha + r)] \cdot \alpha = -40 \\ \Rightarrow & (-2i) \cdot (2i) \cdot (\alpha^2 - r^2) \cdot \alpha = -40 \\ \Rightarrow & 4 \cdot (\alpha^2 - r^2) \cdot \alpha = -40 \\ \Rightarrow & 4 \cdot (2^2 - r^2) \cdot 2 = -40 \\ \Rightarrow & 8 \cdot (4 - r^2) = -40 \\ \Rightarrow & 32 - 8r^2 + 40 = 0 \\ \Rightarrow & -8r^2 + 72 = 0 \\ \Rightarrow & -r^2 + 9 = 0 \\ \Rightarrow & r^2 = 9 \\ \Rightarrow & r = \pm 3. \end{aligned}$$

Com isso, as três raízes reais de  $p$  são  $-1, 2$  e  $5$ . Portanto, a alternativa correta é (e)  $-1, 2$  e  $5$ .  $\square$

## 5.5 Mudança de Variável

A mudança de variável é uma técnica utilizada para simplificar a escrita de expressões matemáticas. Quando tratamos de equações, essa técnica serve para reescrevermos a equação de uma forma conveniente, facilitando a obtenção de suas soluções.

Algumas aplicações básicas da mudança de variável se dão quando estamos trabalhando com equações biquadradas, bicúbicas ou triquadradas, conforme segue.

- **Equações biquadradas:** são equações da forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . Para resolver uma equação desse tipo, precisamos fazer uma mudança de variável, substituindo  $x^2 = y$ . Dessa forma, obtemos a equação do segundo grau  $ay^2 + by + c = 0$ . Depois disso, encontramos os possíveis valores de  $y$  e substituímos na igualdade  $x^2 = y$ . Assim, obtemos os valores de  $x$ .

- **Equações bicúbicas:** são equações da forma  $ax^6 + bx^4 + cx^2 + d = 0$ . Para resolver uma equação assim, podemos efetuar a substituição de  $x^2 = y$ , obtendo a equação cúbica  $ay^3 + by^2 + cy + d = 0$ . Após encontrar os valores de  $y$  que satisfazem à essa equação, substituímos os três valores de  $y$  encontrados na igualdade  $x^2 = y$ , obtendo três equações de grau 2, de onde descobrimos as 6 soluções da equação do sexto grau.
- **Equações triquadradas:** são equações da forma  $ax^6 + bx^3 + c = 0$ . Para solucionar uma equação desse tipo, basta efetuar a substituição  $x^3 = y$ . Assim, obtemos a equação  $y^2 + by + c = 0$  e prosseguimos como nos casos anteriores.

**Exemplo 5.5.** Encontre as soluções da equação  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .

**Solução.** Primeiramente, note que a equação  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  é biquadrada, pois está escrita na forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . Sendo assim, podemos efetuar a substituição  $x^2 = y$ , obtendo a seguinte equação:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Resolvendo essa equação do segundo grau, encontramos as soluções  $y = 1$  e  $y = 4$ . Agora, vamos substituir cada um desses valores na igualdade  $x^2 = y$ :

- Substituindo  $y = 1$ , obtemos a equação  $x^2 = 1$ , cujas soluções são -1 e 1.
- Substituindo  $y = 4$ , chegamos à equação  $x^2 = 4$ , que possui as soluções -2 e 2.

Com isso, o conjunto solução da equação inicial é  $S = \{-1, 1, -2, 2\}$ .  
□

**Exemplo 5.6.** Resolva a equação  $x^6 + 4x^3 + 1 = 0$ .

**Solução.** Veja que a equação dada é triquadrada. Sendo assim, vamos efetuar a substituição  $x^3 = y$  para obtermos uma equação

quadrática com a variável  $y$ , então temos:

$$\begin{aligned}x^6 + 4x^3 + 1 = 0 &\Rightarrow (x^3)^2 + 4x^3 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow y^2 + 4y + 1 = 0.\end{aligned}$$

A equação acima possui as soluções  $-2 \pm \sqrt{3}$ . Então temos:

- Se  $y = -2 - \sqrt{3}$ , então  $x^3 = \sqrt{-2 \pm \sqrt{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\sqrt{-2 \pm \sqrt{3}}}$ .
- Se  $y = -2 + \sqrt{3}$ , então  $x^3 = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}}$ .

□

Por outro lado, a mudança de variável necessária pode não ser tão trivial, como no exemplo que segue.

**Exemplo 5.7.** Encontre as soluções reais da equação  $\sqrt{x^2 - x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 7} = \sqrt{2x^2 - 2x + 21}$ .

**Solução.** Vamos introduzir uma nova variável  $y = x^2 - x + 2$ . Então, teremos a equação:

$$\sqrt{y} + \sqrt{y + 5} = \sqrt{y + 17}.$$

Note que, se queremos soluções reais, devemos assumir  $y \geq 0$ . Caso contrário, teríamos  $\sqrt{y} \notin \mathbb{R}$ . Sendo assim, podemos determinar  $y$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sqrt{y} + \sqrt{y + 5} = \sqrt{y + 17} &\Rightarrow (\sqrt{y} + \sqrt{y + 5})^2 = (\sqrt{2y + 17})^2 \\ &\Rightarrow y + 2 \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{y + 5} + y + 5 = 2y + 17 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \sqrt{y^2 + 5y} = 12 \\ &\Rightarrow \sqrt{y^2 + 5y} = 6 \\ &\Rightarrow y^2 + 5y = 36 \\ &\Rightarrow y^2 + 5y - 36 = 0.\end{aligned}$$

A equação acima possui as soluções  $y = -9$  e  $y = 4$ . Porém, como havíamos estabelecido  $y \geq 0$ , temos que  $y = 4$  é a única solução. Por

último, lembremos que  $y = x^2 - x + 2$  e, agora que conhecemos  $y$ , podemos determinar os possíveis valores de  $x$  da seguinte maneira:

$$x^2 - x + 2 = y = 4 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Podemos ver facilmente que a equação acima tem as soluções  $x = -1$  e  $x = 2$ , que são as soluções do problema.  $\square$

## 5.6 Fatoração em Polinômios de Grau Menor

De início, vamos relembrar brevemente uma consequência muito importante do Teorema de D'Alembert: assunto que foi trabalhado na Aula 2, sobre Polinômios. A afirmação referida é a seguinte: Se  $x_1$  é raiz do polinômio  $P(x)$ , então  $P(x)$  é divisível por  $x - x_1$ . Saber disso é essencial para que consigamos reduzir o grau de um polinômio com base em uma de suas raízes. Por exemplo, se  $x_1$  é raiz do polinômio  $P(x)$ , de grau  $n$ , então sabemos que  $P(x)$  é divisível por  $x - x_1$ . Com isso, podemos efetuar essa divisão e escrever  $P(x) = (x - x_1) \cdot Q(x)$ , onde  $Q(x)$ , de grau  $n - 1$ , é o quociente da divisão realizada. Note que, feito isso, transformamos o polinômio  $P(x)$  em um produto de dois polinômios de grau menor. Além disso, vale lembrar que as demais raízes de  $P(x)$  serão as raízes de  $Q(x)$ .

Agora, vamos apresentar alguns exercícios cujas resoluções exigem o conhecimento da fatoração de polinômios.

**Exemplo 5.8.** Encontre todas as raízes do polinômio  $p(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$  sabendo que 2 é uma raiz de  $p(x)$ .

**Solução.** Se  $p(2) = 0$ , então  $p(x)$  é divisível por  $x - 2$ . Podemos efetuar essa divisão pelo Método da Chave, da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 5x^2 - 2x - 24 & x - 2 \\
-x^3 + 2x^2 & \\
\hline
7x^2 - 2x & \\
-7x^2 + 14x & \\
\hline
12x - 24 & \\
-12x + 24 & \\
\hline
0 & 
\end{array}$$

Veja que, na divisão de  $p(x)$  por  $x - 2$ , obtemos o quociente  $q(x) = x^2 + 7x + 12$ . Isso significa que podemos escrever  $p(x) = (x - 2) \cdot (x^2 + 7x + 12)$ .

Agora, se queremos encontrar as demais raízes de  $p(x)$ , basta encontrar os valores de  $x$  tais que  $q(x) = 0$ , ou seja, as raízes da equação  $x^2 + 7x + 12 = 0$ . Usando o Método de Soma e Produto, queremos encontrar  $x_1$  e  $x_2$  tais que:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -7 \\
x_1 x_2 &= 12.
\end{aligned}$$

Com isso, temos que  $x_1 = -3$  e  $x_2 = -4$  são as demais raízes de  $p(x)$ .  $\square$

**Exemplo 5.9.** Considere o polinômio  $p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$ .

- (a) Determine os números reais  $a$  e  $b$  tais que  $p(x) = (x^2 + ax + 1) \cdot (x^2 + bx + 2)$ .

**Solução.** Primeiramente, efetuando o produto dos dois fatores de  $p(x)$ , temos:

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x^2 + ax + 1) \cdot (x^2 + bx + 2) \\
&= x^4 + (a + b)x^3 + (3 + ab)x^2 + (2a + b)x + 2.
\end{aligned}$$

Mas veja que o valor de  $p(x)$  dado no enunciado é  $p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$ , então temos:

$$\begin{aligned}
&x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2 \\
&= x^4 + (a + b)x^3 + (3 + ab)x^2 + (2a + b)x + 2.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, temos as seguintes equações:

$$a + b = -1 - 2\sqrt{3} \quad (5.3)$$

$$3 + ab = 3 + 2\sqrt{3} \Rightarrow ab = 2\sqrt{3} \quad (5.4)$$

$$2a + b = -1 - 4\sqrt{3} \quad (5.5)$$

Isolando  $a$  em (3):

$$a + b = -1 - 2\sqrt{3} \Rightarrow a = -1 - 2\sqrt{3} - b.$$

Substituindo esse valor de  $a$  em (5):

$$\begin{aligned} 2a + b &= 1 + 4\sqrt{3} \Rightarrow 2(-1 - 2\sqrt{3} - b) + b = -1 - 4\sqrt{3} \\ &\Rightarrow -2 - 4\sqrt{3} - 2b + b = -1 - 4\sqrt{3} \\ &\Rightarrow -b = -1 + 2 \\ &\Rightarrow b = -1. \end{aligned}$$

Substituindo  $b = -1$  em (4), temos:

$$\begin{aligned} ab &= 2\sqrt{3} \Rightarrow a \cdot (-1) = 2\sqrt{3} \\ &\Rightarrow -a = 2\sqrt{3} \\ &\Rightarrow a = -2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que  $a = -2\sqrt{3}$  e  $b = -1$ . □

(b) Determine as raízes de  $p(x)$ .

**Solução.** Veja que, no item anterior, vimos que  $p(x)$  pode ser escrito como  $p(x) = (x^2 + ax + 1) \cdot (x^2 + bx + 2)$ , com  $a = -2\sqrt{3}$  e  $b = -1$ , ou seja:

$$p(x) = (x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) \cdot (x^2 - x + 2).$$

Com isso, temos que  $p(x) = 0$  quando  $(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1) = 0$  ou  $(x^2 - x + 2) = 0$ . Com a Fórmula de Bhaskara, podemos facilmente ver que a primeira equação tem raízes  $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ , e a segunda tem raízes  $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ . Portanto, as raízes do polinômio  $p(x)$  são:

$$\sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{3} + \sqrt{2}, \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \text{ e } \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}.$$

□

## 5.7 Procurar Possíveis Raízes Racionais e Reduzir o Grau

De início, vamos relembrar o Teorema das Raízes Racionais, que foi enunciado e demonstrado na Aula 2, sobre Polinômios. Esse teorema é muito importante, pois permite encontrar raízes racionais de um polinômio quando seus coeficientes são todos inteiros. O enunciado desse teorema é o que segue.

**Teorema 5.1** (Teorema das Raízes Racionais). Seja o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ com } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}.$$

Seja  $\frac{p}{q}$  uma raiz racional de  $P(x)$ , ou seja,  $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ , com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e  $\text{mdc}(p, q) = 1$ . Então  $p$  é um divisor de  $a_0$  e  $q$  é um divisor de  $a_n$ .

Então, quando um polinômio  $p(x)$  possui todos os coeficientes inteiros, podemos encontrar os possíveis candidatos às raízes racionais de  $p(x)$ . Em seguida, devemos testar cada um dos candidatos para verificar se algum é, de fato, uma raiz de  $p(x)$ . Caso encontremos uma raiz  $x_1$  desse polinômio, podemos dividir  $p(x)$  por  $x - x_1$  usando o Método da Chave ou o Dispositivo de Briot-Ruffini. Dessa forma, conseguimos fatorar  $p(x)$  em um produto de dois polinômios de grau menor. A seguir veremos isso com alguns exemplos.

**Exemplo 5.10.** Encontre as soluções da equação  $x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$ .

**Solução.** Vamos usar o Teorema das Raízes Racionais para encontrar candidatos às soluções da equação. Então, seja  $\frac{p}{q}$  uma solução racional da equação dada, com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e primos entre si. O teorema nos diz que  $p$  é um divisor de 30 e  $q$  é um divisor de 1. Então

$p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$  e  $q \in \{\pm 1\}$ . Com isso, temos que  $\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30\}$ . Feito isso, na tentativa de encontrar alguma solução para o problema, devemos substituir cada um dos possíveis valores de  $\frac{p}{q}$  na equação dada, como faremos a seguir.

- Substituindo  $x = -1$ :

$$(-1)^3 - 6(-1)^2 - (-1) + 30 = -1 - 6 + 1 + 30 = 24 \neq 0.$$

- Substituindo  $x = 1$ :

$$1^3 - 6 \cdot 1^2 - 1 + 30 = 1 - 6 - 1 + 30 = 24 \neq 0.$$

- Substituindo  $x = -2$ :

$$(-2)^3 - 6(-2)^2 - (-2) + 30 = -8 - 24 + 2 + 32 = 0.$$

Veja que, ao fazermos os testes, descobrimos que  $x = -2$  é uma solução da equação dada. Com isso, sabemos que o polinômio  $p(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$  é divisível por  $x + 2$ . Efetuando essa divisão com o Dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & -6 & -1 & 30 \\
 & & -2 & 16 & -30 \\
 \hline
 & 1 & -8 & 15 & 0
 \end{array}$$

Ou seja, obtemos o quociente  $q(x) = x^2 - 8x + 15$  e podemos escrever:

$$p(x) = (x + 2) \cdot q(x) = (x + 2) \cdot (x^2 - 8x + 15).$$

Agora, veja que as demais raízes de  $p(x)$  são as raízes de  $q(x)$ . Usando o Método de Soma e Produto, temos que as raízes  $x_1$  e  $x_2$  de  $q(x)$  são tais que:

$$x_1 + x_2 = 8$$

$$x_1 x_2 = 15.$$

Ou seja, as demais raízes são  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 5$ . Portanto, as soluções da equação dada são  $-2, 3$  e  $5$ .  $\square$

**Exemplo 5.11.** Resolva a equação  $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$ .

**Solução.** Usando o Teorema das Raízes Racionais, vamos encontrar os candidatos a raiz de  $p(x) = 6x^3 - x^2 - 20x + 12$ . Então, seja  $\frac{p}{q}$  um candidato, com  $p, q \in \mathbb{Z}$  e primos entre si. O teorema nos diz que  $p$  é um divisor de 12 e  $q$  é um divisor de 6. Então  $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$  e  $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$ . Com isso, temos que  $\frac{p}{q} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{6} \right\}$ .

Ao testarmos as possíveis raízes, vemos que  $p\left(\frac{2}{3}\right) = 0$  e, portanto,  $x = \frac{2}{3}$  é uma solução da equação inicial. Sabendo disso, podemos dividir  $p(x)$  por  $x - \frac{2}{3}$ , como faremos a seguir com o Dispositivo de Briot-Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{2}{3} & 6 & -1 & -20 & 12 \\ & & 4 & 2 & -12 \\ \hline & 6 & 3 & -18 & 0 \end{array}$$

Veja que obtemos o quociente  $q(x) = 6x^2 + 3x - 18$  e, com isso, podemos escrever:

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot (6x^2 + 3x - 18).$$

Agora, resta encontrar as raízes de  $q(x) = 6x^2 + 3x - 18$ . Usando a

Fórmula de Bhaskara, temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-18)}}{2 \cdot 6} \\&= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 432}}{12} \\&= \frac{-3 \pm \sqrt{441}}{12} \\&= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 \cdot 7^2}}{12} \\&= \frac{-3 \pm 3 \cdot 7}{12} \\&= \frac{-1 \pm 7}{4}.\end{aligned}$$

Com isso, temos que as outras raízes que procurávamos são  $x_1 = \frac{-1 - 7}{4} = \frac{-8}{4} = -2$  e  $x_2 = \frac{-1 + 7}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ . Portanto, concluímos que a equação  $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$  possui o conjunto solução  $S = \left\{ \frac{2}{3}, -2, \frac{3}{2} \right\}$ .  $\square$

## 5.8 Identificar Equações Recíprocas e Resolvê-las

### 5.8.1 Definição de Equação Recíproca

Chamamos uma equação de recíproca quando os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos forem iguais ou opostos (tiverem sinais trocados), quando ordenados segundo as potências decrescentes da variável. O estudo das equações recíprocas é importante por conta do seguinte teorema:

**Teorema 5.2.** Seja a equação recíproca  $P(x) = 0$ . Se  $r$  for uma de suas soluções, então  $\frac{1}{r}$  também é.

**Observação:** a demonstração desse teorema é um exercício presente no caderno de questões, no fim da aula. Os números  $r$  e  $\frac{1}{r}$  são

chamados de números recíprocos, o que é o mesmo que dizer que são inversos.

## 5.8.2 Classificações das Equações Recíprocas

As equações recíprocas possuem duas classificações. Uma equação desse tipo é de primeira espécie ou de segunda espécie, conforme veremos a seguir.

- **Equação Recíproca de 1ª Espécie:** uma equação recíproca de primeira espécie é tal que os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são **iguais**.

Como exemplo, considere a seguinte equação:

$$3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 2x + 3 = 0. \quad (5.6)$$

Note que, quando organizamos as variáveis conforme a ordem decrescente da potência, os coeficientes são 3, 2, 5, 2 e 3. Ou seja, os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais. Portanto, a equação (6) é recíproca de 1ª espécie.

Outro exemplo desse tipo de equação é a que segue:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0. \quad (5.7)$$

É importante lembrarmos que, se não temos as parcelas com  $x^3$  e  $x$ , então seus coeficientes são zero. Com isso, temos os seguintes coeficientes: 1, 0, 2, 0, 1. Veja que, como os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais, a equação (7) é, de fato, recíproca de primeira espécie.

- **Equação Recíproca de 2ª Espécie:** uma equação recíproca de primeira espécie é tal que os coeficientes das parcelas equidistantes dos extremos são **opostos**, ou seja, de sinais trocados.

Como exemplo, considere a seguinte equação:

$$x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 2x - 1 = 0. \quad (5.8)$$

Note que, quando organizamos as variáveis conforme a ordem decrescente da potência, os coeficientes são 1, 2, 3, -3, -2 e -1. Note que os coeficientes equidistantes dos extremos são opostos. Com isso, a equação (8) é recíproca de 2ª espécie.

Outro exemplo é a seguinte equação:

$$5x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5 = 0. \quad (5.9)$$

Veja que os coeficientes são 5, -4, 7, 2, -7, 4 e -5 e os equidistantes dos extremos são opostos. Com isso, a equação (9) também é recíproca de 2ª espécie.

**Exemplo 5.12.** A equação  $(x - 2)^4 = -11x^3 + 12x^2 - 35x + 15$  é recíproca? Se sim, classifique-a.

**Solução.** Primeiro, precisamos escrever as variáveis conforme a ordem decrescente da potência, como segue:

$$\begin{aligned} (x - 2)^4 &= -11x^3 + 12x^2 - 35x + 15 \\ \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 &= -11x^3 + 12x^2 - 35x + 15 \\ \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 11x^3 + 24x^2 - 12x^2 - 32x + 35x + 16 - 15 &= 0 \\ \Rightarrow x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 3x + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Note que as variáveis já estão organizadas em ordem decrescente de potência. Nessa ordem, os coeficientes são 1, 3, 12, 3, 1. Note que os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais. Com isso, a equação dada é recíproca e, além disso, é de primeira espécie.  $\square$

**Exemplo 5.13.** Seja  $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ , com  $P(2) = 0$ . Resolva a equação  $P(x) = 0$ .

**Solução.** Veja que  $P(x) = 0$  é uma equação recíproca de primeira espécie, pois os coeficientes do primeiro termo são 2, -5 e 2. Sabemos que  $x = 2$  é raiz da equação em questão, e como essa é recíproca, temos que  $\frac{1}{2}$  também é. Note que  $P(x) = 0$  é uma equação de grau 2, então possui apenas duas soluções. Sendo assim, já conhecemos todas as soluções da equação: 2 e  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

**Exemplo 5.14.** (ITA 2008) É dada a equação polinomial  $(a + c + 2)x^3 + (b + 3c + 1)x^2 + (c - a)x + (a + b + 4) = 0$ , com  $a, b, c$  reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto  $abc$  é igual a:

- (a) -2.
- (b) 4.
- (c) 6.
- (d) 9.
- (e) 12.

**Solução.** Sabemos que uma equação é recíproca de primeira espécie quando os coeficientes equidistantes dos extremos são iguais e, tendo a informação de que 1 é raiz da equação dada, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a + c + 2 = a + b + 4 \\ b + 3c + 1 = c - a \\ (a + c + 2) + (b + 3c + 1) + (c - a) + (a + b + 4) = 0 \end{cases}$$

Simplificando cada uma das equações, temos:

$$\begin{cases} c = b + 2 \\ a + b + 2c + 1 = 0 \\ a + 2b + 5c + 7 = 0 \end{cases}$$

Substituindo  $c = b + 2$  nas demais equações, temos:

$$\begin{aligned} a + b + 2c + 1 = 0 &\Rightarrow a + b + 2(b + 2) + 1 = 0 \\ &\Rightarrow a + b + 2b + 4 + 1 = 0 \\ &\Rightarrow a + 3b + 5 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + 2b + 5c + 7 = 0 &\Rightarrow a + 2b + 5(b + 2) + 7 = 0 \\ &\Rightarrow a + 2b + 5b + 10 + 7 = 0 \\ &\Rightarrow a + 7b + 17 = 0. \end{aligned}$$

Veja que agora temos as equações:

$$a + 3b + 5 = 0 \quad (5.10)$$

$$a + 7b + 17 = 0. \quad (5.11)$$

Isolando  $a$  em (10), temos que  $a = -3b - 5$ . Substituindo isso em (11):

$$\begin{aligned} a + 7b + 17 = 0 &\Rightarrow (-3b - 5) + 7b + 17 = 0 \\ &\Rightarrow 4b + 12 = 0 \\ &\Rightarrow 4b = -12 \\ &\Rightarrow b = -3. \end{aligned}$$

Sabendo que  $b = -3$ , podemos obter  $a$  e  $c$ :

$$\begin{aligned} a = -3b - 5 &\Rightarrow a = -3b - 5 \\ &\Rightarrow a = -3 \cdot (-3) - 5 \\ &\Rightarrow a = 9 - 5 \\ &\Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c = b + 2 &\Rightarrow c = -3 + 2 \\ &\Rightarrow c = -1. \end{aligned}$$

Por fim, encontramos  $a = 4, b = -3$  e  $c = -1$ . Portanto,  $abc = 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = 12$ .  $\square$

### 5.8.3 -1 e 1 Como Soluções

Seja a seguinte equação recíproca de grau  $n$ , com  $a_n \neq 0$ :

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Analisemos as soluções dessa equação de acordo com a paridade de  $n$ :

- **Se  $n$  for par:** note que se  $n$  for par, então temos uma quantidade ímpar de coeficientes do lado esquerdo. Com isso, temos um coeficiente central. Se a equação  $p(x) = 0$  for recíproca de primeira ordem, independente do valor do coeficiente central, temos que  $-1$  e  $1$  são soluções. Caso  $p(x) = 0$  seja uma equação recíproca de segunda ordem com o coeficiente central igual a  $0$ , então  $-1$  e  $1$  serão soluções.
- **Se  $n$  for ímpar:** se  $p(x) = 0$  for de primeira espécie, o valor  $-1$  é sempre uma solução. Se  $p(x) = 0$  for de segunda espécie, o valor  $1$  é sempre uma solução.

**Observação:** de maneira mais prática, sempre que estivermos diante de uma equação recíproca, os valores  $1$  e  $-1$  são fortes candidatos às soluções dessa equação. Portanto, devemos substituir esses valores na equação dada para verificar se são raízes.

**Exemplo 5.15.** Encontre todas as soluções da equação  $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$ .

**Solução.** Note que a equação dada possui grau ímpar e é recíproca de primeira espécie, isso significa que possui  $-1$  como solução. De fato, pois:

$$\begin{aligned}
 p(-1) &= 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 \\
 &= -2 - 3 + 3 + 2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Sabendo que  $-1$  é raiz, podemos abaixar o grau da equação dividindo o primeiro membro por  $x + 1$ . Faremos isso utilizando o Método da Chave:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 & x + 1 \\
 -2x^3 - 2x^2 & \hline
 -5x^2 - 3x & \\
 5x^2 + 5x & \hline
 2x + 2 & \\
 -2x - 2 & \hline
 0 & 
 \end{array}$$

Veja que o quociente obtido é  $q(x) = 2x^2 - 5x + 2$ . Então, podemos reescrever a equação inicial como:

$$(x + 1) \cdot (2x^2 - 5x + 2) = 0.$$

Com isso, as demais soluções são as raízes de  $q(x)$ . Vemos facilmente que  $q(x)$  tem raízes 2 e  $\frac{1}{2}$ . Portanto, as soluções da equação inicial são  $-1, 2$  e  $\frac{1}{2}$ . □

### 5.8.4 Técnica para Resolver uma Equação Recíproca

De forma geral, podemos seguir alguns passos para resolver uma equação recíproca. Isso será mostrado a seguir com o auxílio de um exemplo.

**Exemplo 5.16.** Resolva a equação  $12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$ .

**Observação:** note que a equação desse exemplo é recíproca de primeira espécie. Porém, a solução a seguir também serve de exemplo para a resolução de uma equação recíproca de segunda espécie, uma vez que os passos a serem tomados são os mesmos.

**Solução.** Primeiro, reorganizamos as parcelas da equação de forma que os coeficientes iguais (ou opostos) fiquem próximos. Assim:

$$12x^4 + 12 - 56x^3 - 56x + 89x^2 = 0.$$

Veja que, como temos pares de coeficientes iguais, podemos colocá-los em evidência, como segue:

$$12(x^4 + 1) - 56(x^3 + x) + 89x^2 = 0.$$

Feito isso, vamos dividir toda a equação por  $x^2$ :

$$\begin{aligned} & \frac{12(x^4 + 1) - 56(x^3 + x) + 89x^2}{x^2} = \frac{0}{x^2} \\ \Rightarrow & 12 \cdot \left( \frac{x^4 + 1}{x^2} \right) - 56 \cdot \left( \frac{x^3 + x}{x^2} \right) + \left( \frac{89x^2}{x^2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & 12 \cdot \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 56 \cdot \left( x + \frac{1}{x} \right) + 89 = 0. \end{aligned}$$

Por último, devemos analisar as expressões dentro dos parênteses e efetuarmos a mudança de variável apropriada. Nesse caso, podemos tomar  $y = x + \frac{1}{x}$ . Com isso, precisamos também escrever a expressão  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  em função de  $y$ . Podemos fazer isso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} y = x + \frac{1}{x} &\Rightarrow y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \\ &\Rightarrow y^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\ &\Rightarrow y^2 = x^2 + 2 \left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &\Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Veja que, fazendo essa manipulação algébrica, conseguimos escrever o termo desejado em função de  $y$ . Agora, temos que  $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$ . Feito isso, podemos substituir os termos na equação anterior:

$$\begin{aligned} 12 \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 56 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 &= 0 \\ \Rightarrow 12 \cdot (y^2 - 2) - 56y + 89 &= 0 \\ \Rightarrow 12y^2 - 24 - 56y + 89 &= 0 \\ \Rightarrow 12y^2 - 56y + 65 &= 0. \end{aligned}$$

Da equação quadrática acima, temos que  $y = \frac{5}{2}$  ou  $y = \frac{13}{6}$ . Recordemos que  $y = x + \frac{1}{x}$ , então:

- Se  $y = \frac{5}{2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} &\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{x^2 + 1}{x} \\ &\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)x = x^2 + 1 \\ &\Rightarrow x^2 - \left(\frac{5}{2}\right)x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Podemos facilmente ver que a equação acima tem soluções 2 e  $\frac{1}{2}$ .

- Se  $y = \frac{13}{6}$ :

$$\begin{aligned} \frac{13}{6} = x + \frac{1}{x} &\Rightarrow \frac{13}{6} = \frac{x^2 + 1}{x} \\ &\Rightarrow \left(\frac{13}{6}\right)x = x^2 + 1 \\ &\Rightarrow x^2 - \left(\frac{13}{6}\right)x + 1 = 0. \end{aligned}$$

Usando a Fórmula de Bhaskara, vemos que os valores de  $x$  que satisfazem a equação acima são  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{2}{3}$ .

Portanto, obtemos o seguinte conjunto solução para a equação inicial:  $S = \left\{2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$ . □

**Observação:** veja que, como esperado, para cada solução da equação dada, seu inverso também é solução. Isso ocorreu porque a equação inicial é recíproca.

## 5.9 Resolver Equações do Tipo $f(f(f(\dots(f(x)))) = x$

Se temos uma equação do tipo  $f(f(f(\dots(f(x)))) = x$ , podemos buscar suas raízes de uma maneira relativamente simples, como segue. Veja que, pela construção dessa função composta, se  $f(x) = x$ , então  $f(f(x)) = f(x) = x$ , conseqüentemente temos  $f(f(f(x))) = f(f(x)) = f(x) = x$ , e assim por diante. Isso quer dizer que, se  $x_0$  é raiz da equação  $f(x) = x$ , então  $x_0$  também será raiz da equação  $f(f(f(\dots(f(x)))) = x$ . Assim, podemos achar raízes dessas funções compostas olhando primeiramente para a raiz de  $f(x) = x$ .





**Exemplo 5.17.** Resolva a equação  $x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2 + \sqrt{x}}}}$ , de onde se extrai a raiz quadrada  $n$  vezes, com  $n \geq 2$ .


**Solução.** Veja que, se  $x = 2 + \sqrt{x}$ , então  $2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}} = 2 + \sqrt{x} = x$ , e assim sucessivamente. Portanto, se  $x_0$  é raiz de  $x = 2 + \sqrt{x}$ , também será raiz da equação inicial. Analisemos então as soluções de  $x = 2 + \sqrt{x}$ :

$$\begin{aligned} x = 2 + \sqrt{x} &\Rightarrow x - 2 = \sqrt{x} \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 = (\sqrt{x})^2 \\ &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = x \\ &\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0. \end{aligned}$$

A equação acima tem soluções 1 e 4, que são as soluções da equação inicial. □

## Problemas Propostos

			
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1.  (Ufmg 95) A soma dos quadrados das raízes da equação  $(3x - 1)(3x^2 - 2x - 1) = 0$  é:
  - (a) 0.
  - (b)  $\frac{1}{9}$ .
  - (c)  $\frac{2}{3}$ .
  - (d)  $\frac{11}{9}$ .
  - (e)  $\frac{11}{3}$ .

2. ● (Cesgranrio 97) Se  $a, b$  e  $c$  são raízes da equação  $x^3 - 10x^2 - 2x + 20 = 0$ , então o valor da expressão  $a^2bc + ab^2c + abc^2$  é igual a:
- (a) 400.
  - (b) 200.
  - (c) -100.
  - (d) -200.
  - (e) -400.
3. ● (Uel 96) A equação  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  admite como raízes os números  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$  e 3. Nessas condições, a soma  $a + b + c$  é igual a:
- (a)  $\frac{3}{2}$ .
  - (b)  $\frac{3}{4}$ .
  - (c)  $-\frac{5}{2}$ .
  - (d)  $-\frac{11}{4}$ .
  - (e)  $-\frac{7}{2}$ .
4. ● (Mackenzie 98) Na equação  $x^3 - 5x^2 + 5x - 2 = 0$ , de raízes  $a, b$  e  $c$ , o produto  $(a + 2) \cdot (b + 2) \cdot (c + 2)$  vale:
- (a) 45.
  - (b) 40.
  - (c) 35.
  - (d) 30.
  - (e) 25.
5. ▲ (IME 2005) Determine o valor das raízes comuns das equações  $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$  e  $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$ .

6. ▲ IME (2016/2017) O polinômio  $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$  possui três raízes inteiras positivas e distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de  $c$  menores do que  $c$  é  $c^2$ . Qual é o valor de  $b$ ?
- (a) 11.
  - (b) 13.
  - (c) 17.
  - (d) 23.
  - (e) 29.
7. ▲ (Unesp 96) Sabe-se que a unidade imaginária  $i$  é raiz do polinômio real  $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + 2$ . Nessas condições:
- (a) Determine o valor de  $a$ .
  - (b) Encontre o conjunto solução da equação  $p(x) = 0$ .
8. ▲ (Mackenzie 96) Com as raízes da equação  $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x = 0$  formam-se  $k$  números de quatro algarismos. Então  $k$  vale:
- (a) 27.
  - (b) 54.
  - (c) 81.
  - (d) 162.
  - (e) 12.
9. ▲ (IME 2012) As dimensões dos lados de um paralelepípedo reto-retângulo, em metros, valem  $a, b$  e  $c$ . Sabe-se que  $a, b$ , e  $c$  são raízes da equação  $6x^3 - 5x^2 + 2x - 3 = 0$ . Determine, em metros, o comprimento da diagonal deste paralelepípedo.
- (a)  $\frac{1}{6}$ .

- (b)  $\frac{1}{3}$ .
- (c)  $\frac{1}{2}$ .
- (d)  $\frac{2}{3}$ .
- (e) 1.
10. ▲ (Puccamp 98) Sabe-se que a equação  $2x^3 + x^2 - 6x - 3 = 0$  admite uma única raiz racional e não inteira. As demais raízes dessa equação são:
- (a) Irracionais e positivas.
- (b) Irracionais e de sinais contrários.
- (c) Inteiras e de sinais contrários.
- (d) Inteiras e positivas.
- (e) Não reais.
11. ▲ (Uel 98) Dada a equação  $x^3 + 6x^2 - 4x + t = 0$ , cujos coeficientes são números inteiros, sabe-se que uma de suas raízes é a média aritmética das outras duas. O produto das raízes dessa equação é:
- (a) 36.
- (b) 24.
- (c) 12.
- (d) -24.
- (e) -36.
12. ▲ (IME 2006) Considere o polinômio  $p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$ . Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a  $3 - i$  e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes imaginárias são inteiras e não-nulas, encontre todas as raízes do polinômio dado.

13.  $\blacklozenge$  (Unicamp 96) Encontre os valores inteiros de  $m$  para os quais a equação  $x^3 - mx^2 + mx - m^2 = 1$  tem pelo menos uma raiz inteira. Para cada um desses valores de  $m$ , ache as 3 raízes das equações (do terceiro grau) correspondentes.
14.  $\blacklozenge$  (Ita 98) Considere  $a, b \in \mathbb{R}$  e a equação  $2e^{3x} + ae^{2x} + 7e^x + b = 0$ . Sabendo que as três raízes reais  $x_1, x_2$  e  $x_3$  desta equação formam, nesta ordem, uma progressão aritmética cuja soma é igual a zero, então  $a - b$  vale:
- (a) 5.  
 (b) -7.  
 (c) -9.  
 (d) -5.  
 (e) 9.
15.  $\blacklozenge$  (Unicamp 99)
- (a) Resolva a equação:  $x^4 - 5x - 6 = 0$ .  
 (b) Mostre que, se  $a$  e  $b$  são números reais e se não são ambos nulos, então as raízes da equação  $x^4 + ax + b = 0$  não podem ser todas reais.
16.  $\blacklozenge$  Encontre as soluções da equação  $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36 = 0$ .
17.  $\blacklozenge$  Resolva a equação  $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$
18.  $\blacklozenge$  Resolva a equação  $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$ .
19.  $\blacklozenge$  (IME 2011) Resolva a equação  $z^2 + \frac{9z^2}{(z+3)^2} = -5$ , onde  $z$  pertence ao conjunto dos números complexos.
20.  $\blacklozenge$  Resolva a equação  $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$ .

21.  $\blacklozenge$  Resolva a equação  $\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} - x^2 + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = 0$ .
22.  $\blacklozenge$  Resolva a equação  $\sqrt{2x^2 + 3} + \sqrt{x + 1} = 2\sqrt{2x^2 + 5x + 3} + 3x - 16$ .
23.  $\blacklozenge$  (Moldávia) Resolva em  $\mathbb{R}$  a equação:  $(x^2 - 3x - 2)^2 - 3 \cdot (x^2 - 3x - 2) - 2 - x = 0$ .
24.  $\blacklozenge$  (IME - 2014) O polinômio  $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$  possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.
25.  $\star$  Resolva em  $\mathbb{R}$  as equações:
- (a)  $x^3 - 6 = \sqrt[3]{x + 6}$ .
- (b)  $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1$ .
- (c)  $(x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 = x$ .
- (d)  $x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 6 = \sqrt[3]{2 - x}$ .

### Dicas e Soluções

- Alternativa (d)  $\frac{11}{9}$ .
- Alternativa (d)  $-200$ .
- Alternativa (c)  $-\frac{5}{2}$ .
- Alternativa (b)  $40$ .
- Não existem raízes comuns entre as equações dadas.
- Alternativa (e)  $29$ .
- (a)  $a = -3$ .

(b)  $S = \{-i, i, 1, 2\}$ .

8. Alternativa (b) 54.

9. Alternativa (a)  $\frac{1}{6}$ .

10. Alternativa (b) Irracionais e de sinais contrários.

11. Alternativa (b) 24.

12.  $S = \{1 - i, 1 + i, 2 - i, 2 + i, -3\}$ .

13. • Para  $m = 0$ , temos:

$$S_1 = \left\{ 1, \frac{(-1 + i\sqrt{3})}{2}, \frac{(-1 - i\sqrt{3})}{2} \right\}.$$

• Para  $m = -3$ , temos:

$$S_2 = \left\{ -2, \frac{(-1 + \sqrt{21})}{2}, \frac{(-1 - \sqrt{21})}{2} \right\}.$$

14. Alternativa (d) -5.

15. (a)  $S = \left\{ -1, 2, \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2} \right\}$ .

(b) Uma dica é supor que  $p$  e  $q$  são raízes e analisar a fatoração da equação dada.

16.  $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ .

17.  $x = 3$ .

18.  $S = \left\{ 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3} \right\}$ .

19.  $S = \left\{ \frac{-5 \pm i\sqrt{35}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2} \right\}$ .

20.  $S = \{1 \pm \sqrt{19}, -10 \pm 4i\sqrt{5}\}$ .
21.  $S = \{-2, 2\}$ .
- 22.
- 23.
24.  $S = \{3, \sqrt{2} + \sqrt{7}i, \sqrt{2} - \sqrt{7}i, -\sqrt{2} + \sqrt{7}i, -\sqrt{2} - \sqrt{7}i\}$ .
25. (a)  $x = 2$ .
- (b)  $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ .
- (c)  $S = \{-2, -1\}$ .
- (d) Dica: comece reescrevendo o lado esquerdo da equação como  $(x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 8) + 2$ . A expressão dentro dos parênteses pode ser fatorada como  $(a - b)^3$ . Em seguida, você deve manipular a equação obtida de forma a obter uma equação do tipo  $f(f(\dots(f(x)))) = x$ .
- Solução:  $S = \left\{1, \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}\right\}$ .

## Aula 6

# Progressões Aritmética e Geométrica

GUSTAVO RODRIGUES DA SILVA

### 6.1 Introdução

Nesta aula, trabalharemos as Progressões Aritméticas (P.A.'s) e as Progressões Geométricas (P.G.'s). Ao longo da aula, serão apresentadas as definições de cada tipo de progressão, suas classificações e a dedução de suas fórmulas gerais e das fórmulas para efetuar a soma dos termos. Além disso, esta aula conta com vários exemplos para trabalhar a aplicação de cada fórmula demonstrada.

### 6.2 Progressões Aritméticas (P.A.'s)

#### 6.2.1 Definição de P.A.

Progressão aritmética é uma sequência numérica na qual, a partir do segundo, cada termo é igual à soma de seu antecessor com uma constante, denominada **razão**. Em outras palavras, uma P.A. é uma sequência de números onde a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma, chamamos essa diferença entre dois

termos consecutivos de razão.

**Exemplo 6.1.** Seja a sequência numérica (2, 5, 8, 11 ...). Essa sequência é uma P.A.?

**Solução.** Veja que a diferença entre dois termos consecutivos dessa sequência é 3:

$$\begin{aligned}5 - 2 &= 3 \\8 - 5 &= 3 \\11 - 8 &= 3 \\&\dots\end{aligned}$$

Com isso, a sequência dada é uma P.A. cuja razão é  $r = 3$ . □

**Exemplo 6.2.** Qual é a razão da P.A. (15, 7, -1, -9)?

**Solução.** Note que a diferença entre dois termos consecutivos é  $-8$ , pois:

$$\begin{aligned}7 - 15 &= -8 \\-1 - 7 &= -8 \\-9 - (-1) &= -8.\end{aligned}$$

Portanto, a razão dessa P.A. é  $r = -8$ . □

### 6.2.2 Classificações das P.A.'s

Uma P.A. que possui termo inicial e termo final é chamada **finita**. Caso contrário, é chamada **infinita**. Veja que no Exemplo 6.1 temos uma P.A. infinita e, no Exemplo 6.2, temos uma finita.

Além disso, podemos classificar uma P.A. com base na sua razão. Seja uma P.A. de razão  $r$ , então temos:

- Se  $r < 0$ , então a P.A. é **decrecente**.
- Se  $r = 0$ , a P.A. é **constante**.
- Por último, se  $r > 0$ , a P.A. é chamada **crecente**.

### 6.2.3 Fórmula do Termo Geral de uma P.A.

Seja a seguinte sequência numérica:

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$$

Se essa sequência for uma P.A. de razão  $r$  então temos os termos:

$$\begin{aligned} a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r = a_1 + 2r \\ a_4 &= a_3 + r = a_1 + 3r \\ &\dots \end{aligned}$$

Note que o terceiro termo é  $a_3 = a_1 + (3 - 1)r$ , o quarto termo é  $a_4 = a_1 + (4 - 1)r$ , e assim sucessivamente. De maneira geral, o  $n$ -ésimo termo será a soma do primeiro termo  $a_1$  com  $n - 1$  vezes a razão da P.A., ou seja:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

A igualdade acima é chamada de **Fórmula do Termo Geral de uma P.A.**. Veja que essa fórmula depende de 4 variáveis:  $a_n$ ,  $a_1$ ,  $n$  e  $r$ . Sendo assim, se conhecemos três dessas variáveis, podemos usar a fórmula para determinar a quarta.

Por outro lado, veja que a fórmula dada depende do primeiro termo  $a_1$ . Porém, caso não conhecemos  $a_1$ , mas conhecemos outro termo  $a_k$  dessa P.A., podemos determinar o  $n$ -ésimo termo da progressão com a seguinte fórmula:

$$a_n = a_k + (n - k)r.$$

A demonstração dessa fórmula compõe o exercício 5 do caderno de questões desta aula.

A seguir, aplicaremos a fórmula do termo geral de uma P.A. em alguns exemplos.

**Exemplo 6.3.** Dada a P.A.  $(-19, -15, -11, \dots)$  calcule o seu  $n$ -ésimo termo (o termo que está na posição  $n$ ).

**Solução.** Primeiro, precisamos encontrar a razão. Veja que a diferença entre dois termos consecutivos é  $-15 - (-19) = 4$ . Então, a P.A. possui razão  $r = 4$ . Sabemos que o primeiro termo é  $a_1 = -19$ . Com isso, usando a Fórmula do Termo Geral de uma P.A., o  $n$ -ésimo termo será dado por:

$$\begin{aligned} a_n &= -19 + 4 \cdot (n - 1) \Rightarrow a_n = -19 + 4n - 4 \\ &\Rightarrow a_n = 4n - 23. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 6.4.** Sabendo que o primeiro termo de uma P.A. é  $a_1 = -8$  e o último é  $a_8 = 13$ , Determine os outros termos da progressão.

**Solução.** Primeiro, vamos encontrar a razão usando a fórmula do termo geral:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_8 = -8 + (8 - 1)r \\ &\Rightarrow 13 = -8 + 7r \\ &\Rightarrow 21 = 7r \\ &\Rightarrow r = 3. \end{aligned}$$

Sabendo que a razão é  $r = 3$ , basta somar a razão sucessivas vezes ao termo inicial  $a_1 = -8$  para encontrar os demais termos. Fazendo isso, determinamos a P.A.:

$$(-8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13).$$

□

## 6.2.4 Soma dos Termos de uma P.A. Finita

Se uma P.A. possui uma quantidade finita de termos, podemos encontrar uma fórmula para determinar a soma de todos esses termos. Primeiramente, enunciaremos essa fórmula com dois exemplos numéricos. Em seguida, demonstraremos formalmente.

**Exemplo 6.5.** Determine a soma de todos os termos da P.A.  $(1, 2, 3, \dots, 98, 99, 100)$ .

**Solução.** Veja que, ao somarmos o primeiro termo com o último, temos  $1 + 100 = 101$ . Ao somarmos o segundo termo com o penúltimo, temos  $2 + 99 = 101$ . Continuando, temos  $3 + 98 = 101$ ,  $4 + 97 = 101$ , e assim sucessivamente. Note que, como a P.A. tem 100 termos, que é uma quantidade par, podemos formar  $\frac{100}{2} = 50$  pares de termos desse tipo, cuja soma é sempre 101. Então, a soma  $S_{100}$  de todos os termos é:

$$S_{100} = \frac{100}{2} \cdot (1 + 100) = 50 \cdot (101) = 5050.$$

Note que, nesse caso, para obtermos a soma de todos os termos, somamos o primeiro termo com o último e multiplicamos o resultado obtido por 50, que é a metade do número de termos da P.A..  $\square$

**Exemplo 6.6.** Determine a soma de todos os termos da P.A.  $(1, 2, 3, \dots, 99, 100, 101)$ .

**Solução 1.** Veja que, pelo Exemplo 6.5, conhecemos a soma da P.A.  $(1, 2, 3, \dots, 100)$ , que é  $S_{100} = 5050$ . Portanto, para determinar a soma  $S_{101}$  da P.A.  $(1, 2, 3, \dots, 101)$ , basta fazermos:

$$S_{101} = S_{100} + 101 = 5050 + 101 = 5151.$$

$\square$

Outra maneira de solucionarmos esse problema é fazendo um raciocínio semelhante ao feito no Exemplo 6.5, como faremos a seguir.

**Solução 2.** Veja que, ao somarmos o primeiro termo com o último, temos  $1 + 101 = 102$ . Ao somarmos o segundo termo com o penúltimo, temos  $2 + 100 = 102$ . Se continuarmos, teremos  $3 + 99 = 102$ ,  $4 + 98 = 102$ , e assim por diante. Porém, nesse caso, temos uma quantidade ímpar de termos, ou seja, teremos um termo central. Note que, nesse caso, temos os 50 primeiros termos, depois temos o 51º termo e, por último, mais 50 termos. Sendo assim, temos 50 pares de termos, cuja soma é 102, e o termo central, que é o 51. Somando tudo isso, temos:

$$S_{101} = 50 \cdot (1 + 101) + 51 = 50 \cdot (102) + 51 = 5100 + 51 = 5151.$$

□

**Observação:** veja que, na Solução 2, para determinarmos a soma  $S_{100}$ , somamos o primeiro termo com o último, multiplicamos o resultado obtido por  $101 - 1 = 100$  (onde 101 é a quantia ímpar de termos) e, por fim, adicionamos o termo central. Perceba que o resultado obtido nas duas soluções foi o mesmo.

Agora, vamos à generalização dos resultados obtidos, para determinar a fórmula da soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A..

**Proposição 6.1.** Seja a P.A. com os  $n$  termos  $(a_1, \dots, a_n)$ . A soma desses  $n$  primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

**Demonstração.** Suponha que a razão dessa P.A. é  $r$ . Separemos em dois casos:

- **Se  $n$  é par:** como  $n$  é par, temos uma quantidade par de termos a serem somados. A soma do primeiro termo com o último é  $a_1 + a_n$ . Veja o que acontece com as somas  $a_2 + a_{n-1}$ ,  $a_3 + a_{n-2}$ , e assim por diante:

$$\begin{aligned} a_2 + a_{n-1} &= (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n \\ a_3 + a_{n-2} &= (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n \\ a_4 + a_{n-3} &= (a_1 + 3r) + (a_n - 3r) = a_1 + a_n \\ &\dots \\ a_{\left(\frac{n}{2}\right)} + a_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} &= \left[ a_1 + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) r \right] + \left[ a_n - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) r \right] \\ &= a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Veja que temos  $\frac{n}{2}$  pares de termos cuja soma é igual a  $a_1 + a_n$ . Sendo assim, a soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. quando  $n$  é par é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \quad (6.1)$$

- **Se  $n$  é ímpar:** se  $n$  é ímpar, então  $n - 1$  é par. Com isso, podemos calcular a soma dos  $n - 1$  primeiros termos da P.A. usando a fórmula 6.1 e, por fim, adicionar o último termo  $a_n$ , como segue:

$$S_n = S_{n-1} + a_n = \frac{(n-1) \cdot (a_1 + a_{n-1})}{2} + a_n.$$

Note que  $a_{n-1} = a_n - r$ . Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{(n-1) \cdot (a_1 + a_n - r)}{2} + \frac{2a_n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n) - nr - a_1 - a_n + r + 2a_n}{2} \\ &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n) - nr + (a_n + r) - a_1}{2} \\ &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n) - nr + a_{n+1} - a_1}{2}. \end{aligned}$$

Usando a Fórmula do Termo Geral de uma P.A., temos que  $a_{n+1} = a_1 + nr$ . Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n) - nr + a_1 + nr - a_1}{2} \\ \Rightarrow S_n &= \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}. \end{aligned}$$

Note que provamos para  $n$  par e para  $n$  ímpar. Assim, finalizamos a demonstração. ■

Agora, vejamos a aplicação dessa fórmula da soma com um exemplo.

**Exemplo 6.7.** A soma dos  $n$  primeiros números pares positivos é 132. Encontre o valor de  $n$ .

**Solução.** Veja que a soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.A. é dada por:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Com isso, para determinarmos  $n$  com essa fórmula, precisamos conhecer a soma  $S_n$ , o primeiro termo  $a_1$  e o último termo  $a_n$ . Note que  $S_n = 132$ ,  $a_1 = 2$  e  $a_n = 2n$ . Substituindo na fórmula, temos:

$$\begin{aligned} 132 &= \frac{n \cdot (2 + 2n)}{2} \Rightarrow 132 = n \cdot (1 + n) \\ &\Rightarrow 132 = n^2 + n \\ &\Rightarrow n^2 + n - 132 = 0. \end{aligned}$$

A equação acima possui soluções  $n = -12$  e  $n = 11$ . Porém,  $n$  é uma posição da P.A., portanto, deve ser um número positivo. Com isso, temos  $n = 11$ .  $\square$

### 6.2.5 Uma Escrita Conveniente dos Termos de uma P.A.

É comum escrevermos os termos de uma P.A. em função do primeiro termo  $a_1$ , da seguinte forma:

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots$$

Porém, na resolução de alguns problemas, escrevermos os termos da P.A. em função do termo central pode facilitar bastante, permitindo algumas simplificações. Por exemplo, outra forma de escrevermos os termos de uma P.A. com 3, 5 e 7 termos é a seguinte:

- **3 termos:**  $a_2 - r, a_2, a_2 + r$ .
- **5 termos:**  $a_3 - 2r, a_3 - r, a_3, a_3 + r, a_3 + 2r$ .
- **7 termos:**  $a_4 - 3r, a_4 - 2r, a_4 - r, a_4, a_4 + r, a_4 + 2r, a_4 + 3r$ .

## 6.3 Progressões Geométricas (P.G.'s)

### 6.3.1 Definição de P.G.

Uma progressão geométrica é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior

por uma constante, denominada razão. Sendo  $q$  o valor da razão constante, temos a seguinte lei de formação para os termos de uma P.G.:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

Veja que o termo  $a_n$  é o produto do seu antecessor  $a_{n-1}$  pela constante  $q$ , chamada de razão.

### 6.3.2 Classificações das P.G.'s

Assim como as P.A.'s, uma P.G. pode ser finita ou infinita. Além disso, com base na razão  $q$  e no primeiro termo  $a_1$ , podemos classificar uma P.G. da seguinte forma:

- **Decrescente:** ocorre quando  $0 < q < 1$  e o primeiro termo  $a_1$  é positivo, como no exemplo:

$$\left(100, 10, 1, \frac{1}{10}, \dots\right), \text{ com } q = \frac{1}{10}.$$

Ou então, quando  $q > 0$  e o primeiro termo  $a_1$  é negativo, como no caso:

$$(-1, -3, -9, -27, -81, \dots), \text{ onde } q = 3.$$

- **Crescente:** ocorre quando  $0 < q < 1$  e o primeiro termo  $a_1$  é negativo, como segue:

$$\left(-100, -10, -1, -\frac{1}{10}, \dots\right), \text{ com } q = \frac{1}{10}.$$

Ou então, quando  $q > 1$  e o primeiro termo  $a_1$  é positivo, como no exemplo:

$$(1, 3, 9, 27, 81, \dots), \text{ onde } q = 3.$$

- **Oscilante:** ocorre sempre que a razão é negativa, ou seja,  $q < 0$ . Por exemplo:

$$(1, -3, 9, -27, 81, \dots), \text{ onde } q = -3.$$

Veja que os termos dessa P.A. alternam entre positivos e negativos.

- **Constante:** uma P.G. é constante quando a razão é  $q = 1$ . Assim, todos os termos da P.G. são iguais. Por exemplo:

$$(3, 3, 3, 3, \dots), \text{ com } q = 1.$$

De forma geral, para classificarmos uma P.G., precisamos analisar tanto a sua razão, quanto o seu primeiro termo.

### 6.3.3 Fórmula do Termo Geral de uma P.G.

**Proposição 6.2.** A Fórmula do Termo Geral de uma P.G. é  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ , onde  $a_n$  é o  $n$ -ésimo termo da sequência,  $a_1$  é o primeiro e  $q$  é a razão.

**Demonstração.** Veja que, de acordo com a definição de P.G., os termos são:

$$\begin{aligned} & a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q^1 \\ a_3 &= a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ & \dots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

■

### 6.3.4 Soma dos $n$ Primeiros Termos de uma P.G.

**Proposição 6.3.** A soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.G. é  $S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$ , onde  $a_1$  é o primeiro termo e  $q$  é a razão,  $q \neq 1$ .

**Demonstração.** Seja uma P.G. de razão  $q$  com os termos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ . Como já vimos anteriormente, podemos reescrever esses termos como:

$$a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}.$$

Sendo assim, a soma desses  $n$  termos da P.G. será dada por:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}.$$

Para determinarmos a fórmula da soma, basta multiplicarmos a equação acima por  $q$  e subtrairmos  $S_n$  dos dois lados. Em seguida, resta isolar  $S_n$  novamente, como faremos a seguir:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \\ S_nq &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^n \\ \Rightarrow S_nq - S_n &= \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \dots + a_1q^n \\ &\quad - (a_1 + \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \dots + \cancel{a_1q^{n-1}}) \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_1q^n - a_1 \\ S_n &= \frac{a_1q^n - a_1}{q - 1} \\ S_n &= \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

■

**Observação:** veja que assumimos  $q \neq 1$  para não termos uma divisão por zero, que não está definida. Além disso, quando a razão é  $q = 1$ , todos os elementos da P.G. são iguais. Então, nesse caso, se queremos a soma dos  $n$  primeiros termos, basta fazer  $S_n = a_1 \cdot n$ .

### 6.3.5 Soma dos Termos de uma P.G. Decrescente Infinita

A fórmula que obteremos é para o caso da P.G. decrescente com a razão  $0 < q < 1$  e o primeiro termo  $a_1 > 0$ . Ilustremos essa situação com um exemplo e, em seguida, vamos à demonstração da fórmula da soma para este caso.

**Exemplo 6.8.** Seja a P.G. decrescente infinita:

$$\left[ 1, \left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{1}{3}\right)^3, \dots \right].$$

Calcule a soma de todos os termos dessa P.G..

**Solução.** Seja  $S_\infty$  a soma de todos os termos dessa P.G., então:

$$S_\infty = 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

Agora, multiplicando ambos os lados da equação acima por 3, temos:

$$S_\infty \cdot 3 = 3 + 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots$$

Por fim, vamos subtrair  $S_\infty$  dos dois lados da última equação e isolarmos  $S_\infty$ , como segue:

$$= \left[ 3 + 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots \right] - \left[ 1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \right]$$

Veja que, do lado direito da igualdade, ao efetuarmos a subtração, o único termo que não será cancelado é o 3. Com isso, temos:

$$S_\infty \cdot 2 = 3 \Rightarrow S_\infty = \frac{3}{2}.$$

□

Fazendo um procedimento similar a esse para uma P.G. desconhecida, obtemos a fórmula da soma dos termos de uma P.G. decrescente infinita.

**Proposição 6.4.** A soma dos termos de uma P.G. decrescente infinita com a razão  $0 < q < 1$  e o primeiro termo  $a_1 > 0$  é  $S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$ .

**Observação:** a demonstração dessa proposição é muito parecida com a demonstração da proposição 6.3 e compõe o exercício 6 do caderno de questões desta aula. Uma dica para fazer essa demonstração é usar o exemplo 6.8 como base.

### 6.3.6 Produto dos $n$ Primeiros Termos de uma P.G.

A fórmula do produto dos  $n$  primeiros termos pode ser apresentada de 2 maneiras:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ ou } P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n.$$

As demonstrações das fórmulas acima compõem o exercício 19.

---

## Problemas Propostos

●	▲	◆	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Dada a P.A.  $(-19, -15, -11, \dots)$ , calcule o seu  $n$ -ésimo termo.
2. ● Os ângulos de um triângulo estão em P.A., prove que um dos ângulos é  $60^\circ$ .
3. ● Calcule a soma dos 1000 primeiros múltiplos positivos de 7.
4. ● Prove que numa P.A., um termo qualquer é sempre a média aritmética entre seu sucessor e seu antecessor, e vice-versa.
5. ● Sejam  $a_n$  e  $a_k$  termos de uma P.A. com a razão  $r$ . Prove a seguinte igualdade:

$$a_n = a_k + (n - k)r.$$

6. ▲ Prove a proposição ?? (fórmula da soma dos termos de uma P.G. decrescente infinita), que é a seguinte:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ com } a_1 > 0 \text{ e } 0 < q < 1.$$

7. ▲ (EUA) Os quatro primeiros termos de uma P.A. são  $a, x, b, 2x$ . Determine o valor da razão  $\frac{a}{b}$ .

8. ▲ Observe a disposição, abaixo, da sequência dos números naturais ímpares.

$$1^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 1$$

$$2^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 3, 5$$

$$3^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 7, 9, 11$$

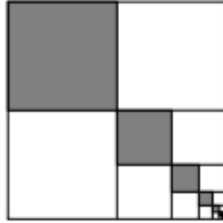
$$4^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 13, 15, 17, 19$$

$$5^{\text{a}} \text{ linha} \longrightarrow 21, 23, 25, 27, 29$$

...

Determine o 4º termo da 20ª linha.

9. ▲ (Espanha) Encontre uma P.A. tal que a soma de seus  $n$  primeiros termos seja igual a  $n^2$  para qualquer valor de  $n$ .
10. ▲ Cada uma das progressões aritméticas a seguir tem 80 termos:  $(a_n) = (9, 13, \dots)$  e  $(b_n) = (10, 13, \dots)$ . Quantos números são, ao mesmo tempo, termos das duas progressões?
11. ▲ Se  $(a, b, c)$  formam, nesta ordem, uma P.A. e uma P.G. simultaneamente, mostre que  $a = b = c$ .
12. ▲ Sejam  $a, b, c$  números reais não-nulos, com  $a \neq c$ , tais que  $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + b^2}$ . Prove que  $a, b$  e  $c$  formam uma P.G.
13. ▲ (EUA) O 5º e o 8º termos de uma progressão geométrica de números reais são  $7!$  e  $8!$ , respectivamente. Qual é o 1º termo?
14. ▲ Um quadrado de área 54 é dividido em quatro quadrados iguais. O quadrado superior esquerdo é de cor cinza; a parte inferior direita do quadrado é de novo dividida em quatro quadrados iguais, e assim por diante. O padrão continua indefinidamente (infinitas vezes). Qual é a área total da área cinzenta do quadrado?



15. ♦ (OCM) Determine a soma dos  $n$  primeiros termos da sequência:
- $$1, (1+2), (1+2+2^2), (1+2+2^2+2^3), \dots, (1+2+2^2+2^3+\dots+2^{k-1}).$$
16. ♦ Encontre o valor de  $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{98}$  se  $a_1, a_2, a_3, \dots$  é uma P.A. de razão 1 e  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{98} = 137$ .
17. ♦ Numa P.A., tem-se  $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ , sendo  $S_m$  e  $S_n$  as somas dos  $m$  primeiros termos e dos primeiros  $n$  termos, respectivamente, com  $m \neq n$ . Prove que a razão da P.A. é o dobro do primeiro termo.
18. ♦ (EUA) Os três primeiros termos de uma progressão aritmética são  $2x - 3$ ,  $5x - 11$  e  $3x + 1$ , respectivamente. O  $n$ -ésimo termo da sequência é 2009. Qual é o valor de  $n$ ?
19. ♦ A fórmula do produto dos  $n$  primeiros termos de uma P.G. pode ser apresentada de 2 maneiras:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ ou } P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n.$$

Prove pelo menos uma dentre essas duas fórmulas.

20. ★ Calcule a soma  $S$ :

(a)  $S = 1 + 11 + 111 + 1111 + 11111 + \dots + \underbrace{1111\dots 111111}_{2016 \text{ "1s"}}$ .

(b)  $S = 1 + 121 + 1221 + 12221 + \dots + \underbrace{12222\dots 22221}_{2016 \text{ "2s"}}$ .

---

## Dicas e Soluções

1.  $a_n = 4n - 23$ .
2. Dica: analise a soma dos três ângulos internos do triângulo sabendo que essa soma deve ser igual a  $180^\circ$ .
3.  $S_{1000} = 3503500$ .
4. Dica: use o fato de que o antecessor do termo  $a_i$  é  $a_i - r$  e o seu sucessor é  $a_i + r$ , onde  $r$  é a razão da P.A..
5. Dica: use a fórmula do termo geral de uma P.A. para substituir o valor do termo  $a_k$ .
6. Dica: leia a subseção 6.3.5 da aula.
7. Dica: use o resultado obtido no exercício 4.  
Solução:  $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ .
8. Dica: veja que 1 é o primeiro número ímpar positivo, 3 é o segundo, 5 é o terceiro... seguindo essa enumeração, qual é a posição do número ímpar que está na 4ª posição da 20ª linha? Para determinar isso, experimente somar a quantidade de termos listados até a 19ª linha e utilizar isso.  
Solução: Esse termo é o número 387.
9. A P.A. procurada é  $1, 3, 5, 7, \dots$
10. Dica:  $mmc(4, 3) = 12$ , onde 4 e 3 são as razões das duas P.A.'s. Além disso, encontre qual é o último termo de cada progressão.  
Solução: 20 termos em comum.
11. Dica: sabendo que  $(a, b, c)$  é uma P.A. de razão  $r$ , temos que  $b = a + r$  e  $c = a + 2r$ . Além disso, se  $(a, b, c)$  é uma P.G. de razão  $q$ , temos  $b = aq$  e  $c = aq^2$ . Com isso, temos duas igualdades que levam à solução.

12. Dica: multiplique os dois lados por  $c^2 + b^2$ . Use o fato de que se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são não-nulos e  $b^2 = ac$ , então  $(a, b, c)$  é uma P.G. (tente provar essa afirmação).
13.  $a_1 = 315$ .
14. A área cinza é igual a 18.
15.  $S_n = 2^{(n+1)} - n - 2$ .
16. Dica: você pode reescrever os termos ímpares de um jeito conveniente.  
Solução: 93.
17. Dica: use as fórmulas de soma.
18.  $n = 502$ .
19. Dica: dada a P.G.  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  de razão  $q$ , reescreva-a como  $(a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1})$  e faça o produto de todos esses termos. Além disso, as duas fórmulas podem ser provadas com o Princípio da Indução Finita.
20. Dica: é necessário escrever os termos da sequência de uma forma conveniente. A fórmula do termo geral de uma P.G. será útil.



# Aula 7

## Princípio da Indução Finita

### 7.1 Introdução

O Princípio da Indução Finita é utilizado como ferramenta de demonstração. Nesta aula, estudaremos esse princípio e sua aplicação em alguns problemas.

### 7.2 O Princípio da Indução Finita

#### 7.2.1 Sobre igualdades e desigualdades

Primeiramente, vale ressaltar que, quando queremos provar uma igualdade (ou até mesmo uma desigualdade), podemos partir de qualquer um dos dois lados. Por exemplo, se queremos mostrar que  $(2 - 8) \cdot 3 = -18$ , podemos fazer das seguintes maneiras:

1. Começando pelo lado esquerdo:

$$\begin{aligned}(2 - 8) \cdot 3 = -18 &\Rightarrow -6 \cdot 3 = -18 \\ &\Rightarrow -18 = -18.\end{aligned}$$

2. Começando pelo lado direito:

$$\begin{aligned}(2 - 8) \cdot 3 = -18 &\Rightarrow (2 - 8) \cdot 3 = -6 \cdot 3 \\ &\Rightarrow (2 - 8) \cdot 3 = (2 - 8) \cdot 3.\end{aligned}$$

3. A última maneira é manipulando os termos de forma a obter qualquer igualdade explícita:

$$\begin{aligned}(2 - 8) \cdot 3 = -18 &\Rightarrow (2 - 8) \cdot 3 + 18 = -18 + 18 \\ &\Rightarrow -6 \cdot 3 + 18 = 0 \\ &\Rightarrow -18 + 18 = 0 \\ &\Rightarrow 0 = 0.\end{aligned}$$

Veja que, em todos os casos acima, provamos que a igualdade inicial é verdadeira, mas de formas diferente. O mesmo acontece com as desigualdades, basta fazermos operações corretas.

## 7.2.2 Motivação

Agora, consideremos o seguinte exemplo:

**Exemplo 7.1** (Soma dos  $n$  primeiros números naturais). Prove a seguinte igualdade para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

Veja que 1 é o primeiro valor de  $n$  a ser testado, pois é o primeiro número natural. Para entender melhor o problema, façamos o teste substituindo  $n = 1$  em ambos os lados da igualdade:

$$1 = \frac{(1 + 1) \cdot 1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

Veja que a igualdade em questão é verdadeira para  $n = 1$ . Testemos agora se o mesmo funciona para  $n = 2$ :

$$1 + 2 = \frac{(1 + 2) \cdot 2}{2} \Rightarrow 3 = 3.$$

Note que, novamente, chegamos a uma igualdade. Ou seja, a igualdade também é verdadeira para  $n = 2$ . Por curiosidade, façamos mais um teste, substituindo  $n = 3$ :

$$1 + 2 + 3 = \frac{(1 + 3) \cdot 3}{2} \Rightarrow 6 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Veja que, mais uma vez, a igualdade foi verdadeira. Isso nos leva a pensar que essa igualdade, de fato, deve funcionar para qualquer valor natural de  $n$ .

Porém, e se não for verdadeira para  $n = 4$ ? Ou ainda, se testarmos todos os valores naturais até  $n = 100$ , o que garante que, quando substituirmos  $n = 101$ , a igualdade também seja verdadeira?

De forma geral, podemos testar a validade da igualdade em questão para todos os valores naturais até  $n = k$ , mas restará ainda provar para  $n = k + 1$ , para  $n = k + 2$  e assim por diante, pois o conjunto dos naturais tem infinitos elementos.

Visto isso, como fazemos para provar a igualdade do Exemplo 7.1? Uma alternativa é o uso do **Princípio da Indução Finita**.

### 7.2.3 Analogia com o Efeito Dominó

Antes de enunciar formalmente esse princípio, é muito útil pensar no **efeito dominó**. Suponha que temos uma enorme fila de dominós em pé, um próximo ao outro. Além disso, suponha que podemos garantir o seguinte:

- O primeiro dominó cairá.
- Se um dominó cair, o dominó seguinte também cairá.



Figura 7.1: Efeito dominó.

Veja que, com base no **passo indutivo**, é verdade que se o sétimo dominó cair, então o oitavo cairá. Além disso, se o oitavo cair, então o nono também cairá e, por sua vez, derrubará o décimo, e assim por diante. Ou seja, todos os dominós - a partir do sétimo - cairão.

Agora veja que, com a **base**, garantimos que o primeiro dominó cairá. Juntamente com o passo indutivo, isso garante que todos os dominós cairão. O princípio da indução, que será enunciado formalmente a seguir, utiliza esse mesmo raciocínio.

### 7.2.4 Explicação do Princípio da Indução Finita

Suponha que queremos demonstrar a validade de uma proposição qualquer. Esse princípio é dividido em duas partes:

- **A base:** mostrar que a proposição vale para um valor inicial. Por exemplo, para  $n = 1$ .
- **O passo indutivo:** mostrar que, se a proposição vale para um determinado valor de  $n$ , então valerá para o seguinte (ou então, se vale para  $n = k$ , devemos mostrar que também vale para  $n = k + 1$ ).

**Observação:** supor que a proposição vale para  $n = k$  é o que chamamos de **hipótese de indução**.

Assim como explicado na analogia com o efeito dominó, essas duas partes são suficientes para garantir que a proposição valerá para qualquer valor de  $n$ , a partir do primeiro.

Agora, voltemos ao Exemplo 7.1 para resolvê-lo utilizando a indução finita. Queríamos provar a seguinte proposição para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

- **Base:** Veja que, como  $n \in \mathbb{N}$  o primeiro valor de  $n$  é 1. Ou seja, a **base** deve ser feita para  $n = 1$ . Como vimos no início da aula, essa proposição é verdadeira para  $n = 1$ , então consideramos concluída a etapa da base.

- **Passo indutivo:** nesta etapa, devemos provar que se a proposição é verdadeira para algum valor de  $n$ , então valerá para o valor seguinte.

Para fazer isso, suponhamos que a proposição é verdadeira para  $n = k$ , ou seja, temos a **hipótese de indução**:

$$1 + 2 + \dots + (k - 1) + k = \frac{(1 + k) \cdot k}{2}.$$

Agora, vamos mostrar que a proposição vale para o próximo valor de  $n$ , ou seja, para  $n = k + 1$ . Veja que, substituindo  $n = k + 1$ , temos:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + (k + 1 - 1) + (k + 1) &= \frac{[1 + (k + 1)] \cdot (k + 1)}{2} \\ \Rightarrow 1 + 2 + \dots + k + (k + 1) &= \frac{(k + 2) \cdot (k + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Queremos provar que isso é verdade. Para isso, podemos usar a **hipótese de indução** do lado esquerdo da 1ª igualdade, como segue:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \dots + k + (k + 1) \\ &= 1 + 2 + \dots + (k - 1) + k + (k + 1) \\ &= \frac{(1 + k) \cdot k}{2} + (k + 1) \\ &= \frac{(1 + k) \cdot k}{2} + \frac{(k + 1) \cdot 2}{2} \\ &= \frac{(1 + k) \cdot k + (k + 1) \cdot 2}{2}. \end{aligned}$$

Agora, resta colocarmos  $(k + 1)$  em evidência para obtermos que:

$$1 + 2 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1) \cdot (k + 2)}{2}.$$

Assim, finalizamos a demonstração e concluímos o Exemplo 7.1.

**Exemplo 7.2.** Prove que 3 divide  $5^n + 2 \cdot 11^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solução.** Usando o princípio da indução finita, separemos o problema nas etapas de base e passo de indução:

- **Base:** como  $n \in \mathbb{N}$ , o primeiro valor de  $n$  é 1. Ou seja, a base deve ser feita para  $n = 1$ . De fato, para  $n = 1$ , temos que 3 divide  $5^1 + 2 \cdot 11^1 = 27$ . Com isso, concluímos essa etapa.
- **Passo indutivo:** suponha que, para  $n = k$ , a proposição é verdadeira. Isso significa que 3 divide  $5^k + 2 \cdot 11^k$ . Seja  $q \in \mathbb{Z}$  o quociente dessa divisão. Logo, temos que  $5^k + 2 \cdot 11^k = 3q$ . Essa é a **hipótese de indução** nesse caso.

Agora, temos que provar que a proposição vale para  $n = k + 1$ . Veja que, substituindo  $n = k + 1$  na expressão dada, temos:

$$5^{k+1} + 2 \cdot 11^{k+1}$$

Para mostrar que 3 divide essa expressão, precisamos evidenciar a expressão  $5^k + 2 \cdot 11^k$  para substituí-la por  $3q$  com base na hipótese de indução. Então temos:

$$\begin{aligned} 5^{k+1} + 2 \cdot 11^{k+1} &= 5^k \cdot 5 + 2 \cdot 11^k \cdot 11 \\ &= 5^k \cdot 5 + 22 \cdot 11^k \\ &= (5^k \cdot 5 + 10 \cdot 11^k) + 12 \cdot 11^k \\ &= 5 \cdot (5^k + 2 \cdot 11^k) + 3 \cdot (4 \cdot 11^k) \\ &= 5 \cdot 3q + 3 \cdot (4 \cdot 11^k). \end{aligned}$$

Por último, colocando 3 em evidência:

$$5^{k+1} + 2 \cdot 11^{k+1} = 3 \cdot (5q + 4 \cdot 11^k).$$

Assim, finalizamos o passo indutivo e concluímos a demonstração.

□

## 7.2.5 Princípio da Indução Forte

Recordando a analogia do efeito dominó, se queremos derrubar todos os dominós a partir do décimo, basta empurrarmos o décimo dominó; não precisamos, necessariamente, empurrar o primeiro. Da mesma forma funciona com a indução.

Com isso, e sabendo que, em alguns casos, o princípio da indução finita não é suficiente para demonstrar a proposição que queremos, temos a alternativa de usar a **indução forte**, que também é composta de duas etapas. O princípio é muito parecido:

Por exemplo, se queremos provar um enunciado, não para todos os números naturais, mas apenas para todos os números maiores que ou iguais a um determinado número  $b$ , então temos os seguintes passos

- **Base:** Mostrar que o enunciado vale quando  $n = b$ .
- **Passo indutivo:** mostrar que, se a proposição vale para todo valor de  $n$  tal que  $b \leq n \leq k$ , então valerá para o seguinte, ou seja, para  $k + 1$ .

O princípio da indução matemática é útil em inúmeras situações. Além de usá-lo quando queremos provar uma igualdade, podemos usá-lo também com desigualdades, como veremos a seguir.

**Exemplo 7.3.** Seja a seguinte sequência definida como:

- a) Os dois primeiros termos são  $a_1 = 1$  e  $a_2 = 3$ ;
- b) Cada um dos termos seguintes é definido como sendo igual à soma dos dois termos anteriores, isto é:  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ;

Assim, os primeiros termos desta sequência serão:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \dots$$

- c) Queremos demonstrar que  $a_n \leq \left(\frac{7}{4}\right)^n$ .

**Solução.** De fato, temos que  $a_1 = 1 < \frac{7}{4}$ ; e  $a_2 = 3 = \frac{48}{16} < \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$ .

Seja então  $n > 2$  e suponhamos agora que a proposição vale para todo inteiro positivo menor ou igual a  $k$ . Queremos então provar que  $a_{k+1} < \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}$ .

Da hipótese de indução, a afirmação vale para  $n = k$  e  $n = k - 1$ . Logo, temos:

$$a_k \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k \quad (7.1)$$

$$a_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \quad (7.2)$$

Somando as inequações 7.1 e 7.2 teremos:

$$a_k + a_{k-1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \quad (7.3)$$

Mas, sabemos do enunciado por *b*) que  $a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ . Logo, substituindo na desigualdade 7.3, temos:

$$a_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1}.$$

Por fim, somando as frações do lado direito da desigualdade acima, temos que:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \left(\frac{7}{4}\right)^k + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ &\leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \\ &\leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4} + 1\right) \\ &\leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{11}{4}\right). \end{aligned}$$

Mas como  $\frac{11}{4} = \frac{11 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{44}{16} \leq \frac{49}{16} = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ , podemos substituir  $\frac{11}{4}$  por  $\left(\frac{7}{4}\right)^2$  na última desigualdade obtida, pois isso **não alterará** a desigualdade (o lado esquerdo continuará sendo menor ou igual que o direito). Então temos:

$$a_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow a_{k+1} \leq \left(\frac{7}{4}\right)^{k+1}.$$

Assim finalizamos a resolução. □

**Exemplo 7.4.** Prove que uma soma arbitrária de  $n \geq 8$  centavos pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

**Solução.** Como  $8 = 3 + 5$ , então a operação é possível para 8. Suponha que  $m > 8$  centavos possam ser pagos. Então, será necessário provar que  $m + 1$  centavos podem ser pagos dessa maneira.

Se a soma de  $m$  centavos foi paga utilizando pelo menos uma moeda de 5 centavos, então substitua esta moeda de 5 centavos por duas de 3 centavos e a quantia final será  $m + 1$  centavos.

Caso contrário, a soma de  $m$  centavos foi paga somente com moedas de 3 centavos e, como  $m > 8$ , há ao menos três moedas de 3 centavos. Troque então três moedas de 3 centavos por duas de 5 centavos e novamente a quantia final de  $m + 1$  centavos desejada foi obtida. □

**Exemplo 7.5.** A sequência  $(a_i)$  é definida por  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ . Encontre uma fórmula explícita para o  $n$ -ésimo termo dessa sequência.

**Solução.** Vamos calcular alguns termos iniciais na busca de algum padrão para a fórmula explícita, aquela que depende apenas de  $n$  e

não mais de outros termos.

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 = 15$$

$$a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 3 \cdot 15 - 2 \cdot 7 = 31.$$

O que os números 0, 1, 3, 7, 15, 31 têm de especiais? Uma olhadinha cuidadosa nos faz perceber que todos eles são potências de 2 subtraídas em 1. Mais especificamente

$$a_3 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_4 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_5 = 15 = 2^4 - 1$$

$$a_6 = 31 = 2^5 - 1.$$

Portanto, nossa conjectura (sinônimo formal para “chute”) será que  $a_n = 2^{n-1} - 1$ .

Somente agora (após a conjectura feita) aplicaremos a ideia de indução, que só conseguirá provar a fórmula caso ela seja verdadeira (caso fosse falsa, o processo de indução encontraria um obstáculo intransponível em algum momento).

Os casos iniciais já estão escritos e validam a conjectura - ou seja, a base já está feita. Em seguida, vamos supor que tenhamos a fórmula válida para todo  $n \leq k$  (indução forte). Em particular, estamos supondo que, para  $k - 1$  e  $k$ :

$$a_{k-1} = 2_{k-2} - 1$$

$$a_k = 2_{k-1} - 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}a_{k+1} &= 3a_k - 2a_{k-1} \\ &= 3 \cdot (2k - 1 - 1) - 2 \cdot (2^{k-2} - 1) \\ &= 3 \cdot 2^{k-1} - 3 - 1 \cdot 2^{k-1} + 2 \\ &= 2 \cdot 2^{k-1} - 1 \\ &= 2^k - 1.\end{aligned}$$

□

---

## Problemas Propostos

●	▲	◆	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Usando o princípio da indução, demonstre que para todo  $n$  inteiro positivo vale:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2.$$

Explique geometricamente esta igualdade.

2. ● Mostre, por indução, que se  $n$  é um inteiro positivo, então  $7^n - 1$  é divisível por 6.
3. ● Seja  $n \in \mathbb{Z}$ . Prove, por indução em  $n$ , que:
- (a)  $n \cdot (n + 1)$  é divisível por 2, para todo  $n \geq 1$ .
  - (b)  $n^3 - n$  é divisível por 6, para todo  $n \geq 6$ .
4. ▲ Mostre, por indução, que  $2^n > n^2$ , para  $n \geq 5$ .
5. ▲ Seja  $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ . Uma fórmula fechada para  $S_n$  é:

(a)  $\left[ \frac{n \cdot (n + 1)}{2} \right]^2$ .

- (b)  $n^3 + 4n^2 - 12n + 9$ .
- (c)  $(2n - 1)^2$
- (d)  $n^4$ .
- (e) Nenhuma das anteriores.
6. ▲ Seja  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  uma função tal que  $f(1) = 1$  e  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , para todo  $x, y \in \mathbb{Z}$ . Prove que  $f(n) = n$ , para todo  $n$  inteiro positivo.
7. ▲ (OBM 2003 – 2ª fase Nível 2) Seja  $f : R_+^* \rightarrow R_+^*$  uma função tal que  $f(x) \cdot f(y) - f(x \cdot y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$  quaisquer que sejam os reais não nulos  $x$  e  $y$ .
- (a) Calcule  $f(1)$ .
- (b) Encontre uma fórmula para  $f(x)$ .
8. ▲ Mostre, por indução, que  $2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
9. ▲ Considere a sequência definida recorrentemente por  $a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Supondo  $a_0 = 0$ :
- (a) Calcule  $a_1, a_2, a_3, a_4$ .
- (b) Conjecture uma fórmula para  $a_n$  e prove-a por indução.
10. ▲ Prove que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1.$$

11. ▲ Diga o que está errado no seguinte argumento:

**Proposição:** Se  $a \neq 0$  então  $a^{n-1} = 1$  para todo  $n$  natural.

**Demonstração:**  $P(1) : a^{1-1} = 1$  vale sempre. Pois  $a^0 = 1$ .

Assumindo  $a^{k-1} = 1$ , temos:

$$a^k = a^k \cdot \left( \frac{a^{k-2}}{a^{k-2}} \right) = \frac{a^k \cdot a^{k-2}}{a^{k-2}} = \frac{a^{k-1} \cdot a \cdot a^{k-2}}{a^{k-2}} = \frac{a^{k-1} \cdot a^{k-1}}{a^{k-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1.$$

12. ▲ Seja  $b_0 = 1$  e, para  $n > 0$ , seja  $b_n = 3b_{n-1} - 1$ . Quais são os cinco primeiros termos da sequência

$$b_0, b_1, b_2, \dots?$$

Prove que  $b_n = \frac{3^n + 1}{2}$ .

13. ▲ Demonstre a validade da seguinte afirmação para  $n$  no conjunto dos naturais:

$$(1 + r)^n \geq 1 + nr, \text{ para } r > -1.$$

14. ▲ Calcule a fórmula para a soma:

$$1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots + (1 + 2 + 3 + \dots + n).$$

Depois, demonstre-a por indução.

15. ◆ Prove o critério de divisibilidade por 11, isto é, um número  $n \in \mathbb{N}$  é divisível por 11 se a soma de seus algarismos de ordem par, menos a soma de seus algarismos de ordem ímpar for divisível por 11.

Por exemplo:

121 é múltiplo de 11, pois  $-1 + 2 - 1 = 0$ , e 0 é divisível por 11.

1716 é múltiplo de 11, pois  $1 - 7 + 1 - 6 = -11$ , que é divisível por 11.

16. ◆ Sabendo que  $|x| + |y| \geq |x + y|$ , é verdade quaisquer que sejam  $x, y \in \mathbb{R}$ , prove que:

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \geq |x_1 + x_2 + \dots + x_n|,$$

quaisquer que sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ .

17. ◆ A sequência  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  de números é tal que  $a_1 = 3$ ,  $a_2 = 5$  e  $a_{n+1} = 3 \cdot a_n - 2 \cdot a_{n-1}$ , para  $n > 2$ . Prove que  $a_n = 2^n + 1$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

18.  $\blacklozenge$  Mostre que o número de diagonais ( $d_n$ ) de um polígono convexo de  $n$  lados é:

$$d_n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}.$$

19.  $\blacklozenge$  Considere as potências de 2 com expoente inteiro positivo, ou seja, os números da forma  $2^n$  em que  $n$  é um inteiro positivo: prove que toda potência de 2 com expoente inteiro positivo pode ser escrita na forma  $5xy - x^2 - 2y^2$ , com  $x$  e  $y$  inteiros positivos.

20.  $\star$

- (a) Mostre, por indução em  $n$ , que  $(2 + \sqrt{3})^n$  é da forma  $a_n + b_n\sqrt{3}$ , com  $a_n$  e  $b_n$  inteiros, para todo  $n \geq 1$ .
- (b) Prove, por indução em  $n$ , que se  $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ , com  $a_n$  e  $b_n$  inteiros, então  $(2 - \sqrt{3})^n = c_n + d_n\sqrt{3}$ , onde  $c_n = a_n$  e  $d_n = -b_n$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (c) Use o item (b) para mostrar que  $(1 + \sqrt{3})^{2n} + (1 - \sqrt{3})^{2n}$  é divisível por  $2^{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ .
- (d) Deduza que  $\lceil (1 + \sqrt{3})^{2n} \rceil$  é um número divisível por  $2^{n+1}$ , para todo  $n \geq 1$ , onde  $\lceil x \rceil$  denota o teto de  $x$ , ou seja, o único inteiro  $k$  tal que  $k - 1 < x \leq k$ .

**Observação:** Uma outra maneira de descrever o teto de  $x$  é a seguinte:

$$\lceil x \rceil = \text{mín}\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

Ou seja,  $\lceil x \rceil$  (teto de  $x$ ) é o menor inteiro maior ou igual a  $x$ . Além disso,  $\lfloor x \rfloor$  denota o "piso de  $x$ ":

$$\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

Ou seja,  $\lfloor x \rfloor$  (piso de  $x$ ) é o maior inteiro menor ou igual a  $x$ .

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \lceil 2, 1 \rceil &= 3 \text{ e } \lfloor 2, 1 \rfloor = 2; \\ \lceil 4, 7 \rceil &= 5 \text{ e } \lfloor 4, 7 \rfloor = 4; \\ \lceil -2, 5 \rceil &= -2 \text{ e } \lfloor -2, 5 \rfloor = -3. \end{aligned}$$



# Aula 8

## Recorrências

### 8.1 Introdução

Nesta aula, trabalharemos com as **recorrências**. Primeiro, veremos brevemente os conceitos de sequência, regra de formação, fórmulas fechadas e fórmulas de recorrência. Isso será feito para deixar explícito qual é o objeto de estudo desta aula. Em seguida, o conteúdo será trabalhado por meio de alguns exemplos.

### 8.2 Conceitos Básicos

**Definição 8.1** (Sequência Numérica). Uma sequência numérica é um conjunto de números ordenados. Denotamos entre parênteses os elementos de uma sequência, por exemplo:  $(a, b, c)$ .

Como a sequência numérica é um conjunto **ordenado** de números, obviamente a sequência  $(a, b, c)$  é diferente da sequência  $(b, a, c)$ .

As sequências numéricas podem - ou não - ter uma regra de formação, como veremos a seguir.

#### 8.2.1 Sequências Numéricas Sem Regra de Formação

**Exemplo 8.1.** São exemplos de sequências numéricas **sem** regra de formação:

- $\left(2, \sqrt{3}, -14, 3, \frac{3}{5}, \dots\right)$ .
- $(10, 8, 6, 1006, 1005, \dots)$ .

Veja que em ambos os casos os elementos da sequência foram escolhidos de forma aleatória, sem uma regra de formação. Esse tipo de sequência não nos interessa nesta aula.

## 8.2.2 Sequências Numéricas Com Regra de Formação

Esse tipo de sequência pode ocorrer na forma **fechada** ou na forma de **recorrência** (ou forma recursiva).

A forma fechada possui uma fórmula que apresenta o  $n$ -ésimo termo da sequência em função de  $n$ . Ou, em outras palavras, a forma fechada possui uma regra de formação que relaciona um termo qualquer com a sua posição na sequência. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 8.2** (Forma Fechada). Seja a regra de formação dada pela fórmula:  $T_n = \frac{n+2}{3}$ . Substituindo  $n = 1$ , teremos o primeiro termo  $T_1 = 1$ ; para  $n = 2$  teremos o segundo termo  $T_2 = \frac{4}{3}$ , depois  $T_3 = \frac{5}{3}$  e assim por diante, caracterizando a sequência:  $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \dots\right)$ .

São outros exemplos:

- $(1, 2, 3, 4, \dots, n) \Rightarrow a_k = k$ ;
- $(1, 2, 4, 8, \dots) \Rightarrow a_k = 2k - 1$

Já na forma de recorrência, temos os exemplos:

**Exemplo 8.3** (Forma de Recorrência). Se o termo inicial for  $T_1 = 1$ , usando a regra de formação  $T_n = T_{n-1} + 2$ , temos a sequência dos números **ímpares**:  $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ .

Usando a mesma regra de formação, se o termo inicial for  $T_1 = 0$ , temos a sequência dos números **pares**:  $(0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ .

Veja que, ao trabalharmos com fórmulas de recorrência, precisamos explicitar qual é o primeiro termo. Isso é necessário porque, usando a mesma fórmula, podemos construir várias sequências diferentes de acordo com o primeiro termo.

### 8.3 Equações de Recorrência

As sequências definidas por uma equação de recorrência recebem esse nome porque cada termo **recorre** a um ou alguns termos anteriores. Ou seja, para sabermos qual é o sétimo termo de uma sequência desse tipo, necessitamos conhecer o sexto, o quinto e assim por diante, seguindo na forma **recursiva**. Vejamos mais exemplos:

- $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots) \Rightarrow a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$  ou seja, cada termo da sequência é a soma dos dois termos anteriores (Sequência de Fibonacci).
- $(1, 4, 7, 10, 13, \dots) \Rightarrow a_k = a_{k-1} + 3$ , ou seja, um determinado termo é o anterior “mais 3”. (Progressão Aritmética de 1º termo = 1 e razão = 3).

Como vimos, essas equações que envolvem termos da sequência são chamadas de equações recorrentes, pois para se determinar certo termo, recorre-se a termos anteriores, previamente determinados.

Então, se tivermos os primeiros termos da sequência e acharmos a lei de recorrência (como cada termo se relaciona com os termos anteriores) poderemos obter os demais termos da sequência.

### 8.4 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Dizemos que uma recorrência é **linear** quando seus termos não possuem expoente maior do que 1 na relação de recorrência.

**Exemplo 8.4.** São exemplos de recorrências lineares:

- $T_n = T_{n-1} + 2$ , com  $T_1 = 2$ .

- $T_n = 3 \cdot T_{n-1}$ , com  $T_1 = 2$ .

**Exemplo 8.5.** Não são exemplos de recorrências lineares:

- $T_n = T_{n-1}^2 + 2$ , com  $T_1 = 2$ .
- $T_n = 3 \cdot T_{n-1}^4$ , com  $T_1 = 2$ .

Além disso, uma recorrência é de **primeira ordem** quando cada termo depende apenas do termo anterior. Ou seja,  $T_n = T_{n-1} + 2$ , com  $T_1 = 2$  é de primeira ordem, mas  $T_n = T_{n-2} + T_{n-1} + 2$ , com  $T_1 = 2$  e  $T_2 = 3$  não é, pois cada termo depende de **dois termos anteriores**.

Nessa seção, trabalharemos com as recorrências lineares de primeira ordem.

### 8.4.1 Encontrando Fórmulas Fechadas

Em geral, dada uma sequência definida por recorrência, o que queremos é encontrar uma fórmula fechada (fórmula do termo geral) para essa sequência, ou seja, que relacione cada termo com a sua posição na sequência - sem depender do termo anterior.

Primeiro, vamos encontrar fórmulas fechadas para recorrências do tipo  $A \cdot T_n = A \cdot T_{n-1} + f(n)$ . Trabalharemos isso com dois exemplos:

**Exemplo 8.6.** Seja a recorrência:  $T_n = T_{n-1} + 6$ , com  $T_1 = 4$ . Encontre uma fórmula fechada para essa recorrência.

Usando a recorrência, podemos escrever os termos assim:

$$\begin{aligned} T_1 &= 4 \\ T_2 &= T_1 + 6 \\ T_3 &= T_2 + 6 \\ &\dots \\ T_n &= T_{n-1} + 6. \end{aligned}$$

Veja que, somando todas as equações acima, temos os cancelamentos:

$$\begin{aligned} \cancel{T_1} &= 4 \\ \cancel{T_2} &= \cancel{T_1} + 6 \\ \cancel{T_3} &= \cancel{T_2} + 6 \\ &\dots \\ T_n &= \cancel{T_{n-1}} + 6. \end{aligned}$$

Veja que resta o termo  $T_n$ , o termo inicial 4 e  $n - 1$  vezes o número 6. Com isso, resta apenas o seguinte:

$$T_n = 4 + 6 \cdot (n - 1).$$

**Observação:** note que, no exemplo acima, a recorrência definia uma P.A. de termo inicial 4 e razão 6. Além disso, a fórmula fechada que encontramos é a fórmula do termo geral para essa P.A..

**Exemplo 8.7.** Seja a recorrência:  $T_{n+1} = T_n + n - 1$ , com  $T_1 = 0$ . Encontre a fórmula do termo geral correspondente.

**Solução.** Assim como no exemplo anterior, podemos listar os termos assim:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0 \\ T_2 &= T_1 + 1 - 1 \\ T_3 &= T_2 + 2 - 1 \\ &\dots \\ T_n &= T_{n-1} + (n - 1) - 1. \end{aligned}$$

Somando todas as equações, temos os cancelamentos:

$$\begin{aligned} \cancel{T_1} &= 0 \\ \cancel{T_2} &= \cancel{T_1} + 1 - 1 \\ \cancel{T_3} &= \cancel{T_2} + 2 - 1 \\ &\dots \\ T_n &= \cancel{T_{n-1}} + (n - 1) - 1. \end{aligned}$$

Note que, após a soma, resta apenas o seguinte:

$$\begin{aligned}T_n &= 1 + 2 + \dots + (n - 2) \\ \Rightarrow T_n &= \frac{[(n - 2) + 1] \cdot (n - 2)}{2} \\ \Rightarrow T_n &= \frac{(n - 1) \cdot (n - 2)}{2}.\end{aligned}$$

□

**Observação:** veja que usamos a fórmula da soma dos termos de uma P.A. na resolução acima.

De modo geral, esse procedimento utilizado nos dois exemplos anteriores será útil para encontrarmos uma fórmula geral para toda recorrência desse tipo:

$$A \cdot T_n = A \cdot T_{n-1} + f(n),$$

onde  $A \in \mathbb{R}$  e  $f(n)$  é uma função de  $n$ . No exemplo 8.6, tínhamos  $f(n) = 6$ . Já no exemplo 8.7, tínhamos  $f(n) = n - 1$ .

Agora, encontraremos fórmulas fechadas para recorrências do tipo  $A \cdot T_n = B \cdot T_{n-1} + f(n)$ , com  $A \neq B$ .

**Exemplo 8.8.** Encontre uma fórmula fechada para a seguinte recorrência:

$$X_{n+1} = 2 \cdot X_n + 1, \text{ com } X_1 = 1.$$

**Solução.** Podemos listar os elementos dessa sequência da seguinte forma:

$$\begin{aligned}X_1 &= 1 \\ X_2 &= 2X_1 + 1 \\ X_3 &= 2X_2 + 1 \\ &\dots \\ X_{n-1} &= 2X_{n-2} + 1 \\ X_n &= 2X_{n-1} + 1.\end{aligned}$$

Note que, dessa forma, se somarmos todas as equações, como nos exemplos anteriores, os termos não serão cancelados. Por outro lado,

como o coeficiente dos termos à direita é 2, vejamos o que acontece quando multiplicamos a penúltima equação por 2:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= 1 \\
 X_2 &= 2X_1 + 1 \\
 X_3 &= 2X_2 + 1 \\
 &\dots \\
 X_{n-2} &= 2X_{n-3} + 1 \\
 \cancel{2X_{n-1}} &= 2^2 X_{n-2} + 1 \cdot 2 \\
 X_n &= \cancel{2X_{n-1}} + 1.
 \end{aligned}$$

Veja que, feito isso, se somarmos todas as equações, teremos o cancelamento do termo  $2X_{n-1}$  indicado. Para obter os outros cancelamentos, podemos prosseguir da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 2^{n-1} X_1 &= 1 \cdot 2^{n-1} \\
 2^{n-2} X_2 &= 2^{n-1} X_1 + 1 \cdot 2^{n-2} \\
 2^{n-3} X_3 &= 2^{n-2} X_2 + 1 \cdot 2^{n-3} \\
 &\dots \\
 2^2 X_{n-2} &= 2^3 X_{n-3} + 1 \cdot 2^2 \\
 2X_{n-1} &= 2^2 X_{n-2} + 1 \cdot 2 \\
 X_n &= 2X_{n-1} + 1.
 \end{aligned}$$

Agora, somando todas as equações, temos todos estes cancelamentos:

$$\begin{aligned}
 \cancel{2^{n-1} X_1} &= 1 \cdot 2^{n-1} \\
 \cancel{2^{n-2} X_1} &= \cancel{2^{n-1} X_1} + 1 \cdot 2^{n-2} \\
 \cancel{2^{n-3} X_3} &= \cancel{2^{n-2} X_1} + 1 \cdot 2^{n-3} \\
 &\dots \\
 \cancel{2^2 X_{n-2}} &= \cancel{2^2 X_{n-3}} + 1 \cdot 2^2 \\
 \cancel{2X_{n-1}} &= \cancel{2^2 X_{n-2}} + 1 \cdot 2 \\
 X_n &= \cancel{2X_{n-1}} + 1.
 \end{aligned}$$

Feitos os cancelamentos, veja que restou o seguinte:

$$X_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2^2 + 2^1 + 2^0.$$

Note que temos a soma dos  $n$  primeiros termos de uma P.G. de termo inicial  $a_1 = 1$  e razão  $q = 2$ . Usando a fórmula da soma dos termos de uma P.G. finita, temos:

$$X_n = \frac{1 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

□

## 8.5 Recorrências Lineares Homogêneas de Segunda Ordem

Seja a equação recorrente do tipo:

$$a_n + b \cdot a_{n-1} + c \cdot a_{n-2} = 0 \text{ onde } b, c \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

Vamos associar a cada termo recorrente  $a_i$  desta equação uma potência de “ $x$ ”, do de ordem menor para o de ordem maior, segundo a relação:

$$a_{n-2} \rightarrow x^0 = 1$$

$$a_{n-1} \rightarrow x^1 = x$$

$$a_n \rightarrow x^2$$

.

Substituindo isso em 8.1 teremos:

$$x^2 + b \cdot x + c \cdot 1 = 0 \text{ (equação característica)} \quad (8.2)$$

Perceba que a equação 8.1 tinha 3 termos, o que nos deu uma equação de 2º grau (trinômio cujas raízes ainda não achamos).

Se na equação 8.1 tivéssemos 4 termos, ao fazer a mesma associação acima chegaríamos numa equação de 3º grau, e assim por diante...

Não vamos provar a afirmação abaixo, pois a prova está fora do escopo desta aula, apenas pediremos ao aluno que acredite por enquanto na afirmação abaixo:

Se as raízes da equação 8.2 acima forem  $x_1$  e  $x_2$ , então o termo geral  $a_n$  da equação recorrente 8.1 será dado pela fórmula:

$$a_n = A \cdot x_1^n + B \cdot x_2^n$$

onde  $A$  e  $B$  são coeficientes reais que dependerão dos valores iniciais da sequência. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 8.9.** Resolva a equação:  $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0$ ; com  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 2$ .

**Solução.** A equação característica associada a essa equação de recorrência é:

$$x^2 - 5x + 6 = 0, \text{ cujas raízes são } x_1 = 2 \text{ e } x_2 = 3.$$

Logo a solução dessa equação de recorrência é:  $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$   
Como  $a_1 = 0$  e  $a_2 = 2$ , montamos um sistema abaixo:

$$a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1 = 0 \text{ e};$$

$$a_2 = A \cdot 2^2 + B \cdot 3^2 = 2.$$

Que nos dá a solução  $A = -1$  e  $B = \frac{2}{3}$ , então podemos finalmente escrever  $a_n$  como:

$$a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^n = 2 \cdot (3^{n-1} - 2^{n-1})$$

que é a fórmula geral do termo da sequência. □

E quando as raízes são repetidas, por exemplo, quando  $x_1 = x_2$ ? Neste caso o termo geral  $a_n$  da equação recorrente será dado pela fórmula:

$$a_n = A \cdot x_1^n + B \cdot n \cdot x_1^n = (A + B \cdot n) \cdot x_1^n$$

**Exemplo 8.10.** Resolver a equação  $a_n - 4a_{n-1} = 3^n$ ; com  $a_1 = 0$ .

**Solução.** Para resolvermos esse tipo de equação, temos que encontrar uma maneira de fazer com que a parte  $3^n$  não continue na equação para que a mesma se torne uma equação homogênea. Veja:

$$a_n - 4an - 1 = 3^n \Rightarrow a_n - 4a_{n-1} = 3 \cdot 3^{n-1} \quad (8.3)$$

Como a equação acima vale para todo valor de  $n$ , em particular, vale também para  $n - 1$  (basta que  $n - 1 \geq 1$ ). Trocando  $n$  na equação 8.3 por  $n - 1$ , temos:

$$a_{n-1} - 4a_{n-2} = 3^{n-1} \quad (8.4)$$

Substituindo  $3^{n-1}$  na equação 8.3; teremos:

$$\begin{aligned} a_n - 4a_{n-1} &= 3 \cdot (a_{n-1} - 4a_{n-2}) \Rightarrow a_n - 4a_{n-1} = 3a_{n-1} - 12a_{n-2} \\ &\Rightarrow a_n - 7a_{n-1} + 12 = 0. \end{aligned}$$

Com isso, temos a equação característica:  $x^2 - 7x + 12 = 0$ ; cujas raízes são  $x_1 = 3$  e  $x_2 = 4$ . Logo,  $n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n$ . Como  $a_1 = 0$  e  $a_2 - 4a_1 = 31 \Rightarrow a_2 = 3$ , temos o sistema:

$$\begin{cases} 3 \cdot A + 4 \cdot B = 0 \\ 9 \cdot A + 16 \cdot B = 3 \end{cases}$$

Fazendo a segunda equação menos 3 vezes a primeira, temos:

$$\begin{aligned} 9 \cdot A + 16 \cdot B &= 3 \\ \underline{-(9 \cdot A + 12 \cdot B = 0)} & \\ 4 \cdot B &= 3. \end{aligned}$$

Isso nos dá  $B = \frac{3}{4}$  e, conseqüentemente,  $A = -1$ . Assim:

$$a_n = -3^n + \frac{3}{4} \cdot 4^n \Rightarrow a_n = 3 \cdot (4^{n-1} - 3^{n-1}).$$

□

---

## Problemas Propostos

●	▲	◆	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Determine o 8º termo da sequência  $(1, 3, 9, 27, 81, \dots)$ . Existe alguma expressão geral para isso? Ou melhor: existe alguma fórmula que relacione um termo com a sua posição na sequência?
2. ● Determine o 10º termo da sequência  $(2, 5, 7, 12, 19, 31, \dots)$ . Existe alguma expressão geral para isso?
3. ● Qual o valor do produto  $\frac{8}{4} \cdot \frac{12}{8} \cdot \frac{16}{12} \cdot \dots \cdot \frac{4n+4}{4n} \cdot \dots \cdot \frac{2004}{2000} \cdot \frac{2008}{2004}$ ?
4. ● Encontre uma fórmula fechada para a recorrência:

$$T_{n+1} = T_n + 5, \text{ com } T_1 = 3.$$

5. ● Encontre uma fórmula fechada para a recorrência:

$$T_{n+1} = 3 \cdot T_n, \text{ com } T_1 = 2.$$

6. ▲ Encontre a fórmula fechada para a seguinte recorrência:

$$X_n = 3X_{n-1} + 5, \text{ com } n \geq 2 \text{ e } X_1 = 2.$$

7. ▲ Ache o termo geral da sequência dada por:  $a_{n+1} = a_n + r$ , onde  $r$  é um número real ( $a_1$  pode ser qualquer coisa).
8. ▲ Encontre o termo geral da sequência de Fibonacci em que  $F_0 = 1$ ;  $F_1 = 1$  e  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ .
9. ▲ Encontre o termo geral da seguinte equação recorrente:  $a_n - 3a_{n-1} = 0$ , com  $a_0 = 1$  e  $n \geq 1$ .

10. ▲ Encontre o termo geral da seguinte equação recorrente:  
 $2a_n - 3a_{n-1} = 0$ , com  $a_0 = 2$ .
11. ▲ Encontre o termo geral da seguinte equação recorrente:  $a_n - a_{n-1} - 12 = 0$ , com  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$  e  $n \geq 2$ .
12. ▲ Encontre o termo geral da seguinte equação recorrente:  $a_n + 2a_{n-1} = n$ , com  $a_1 = 2$ ,  $n \geq 2$ .
13. ▲ Encontre o termo geral da seguinte equação recorrente:  $a_n = 3a_{n-1} + k_n$ , com  $a_0 = 0$ ,  $n \geq 1$  e  $k$  constante.
14. ◆
- (a) Qual é o maior número de regiões em que se pode dividir o plano com  $n$  retas? Encontre uma fórmula de recorrência para descrever esse número.
- (b) Encontre uma fórmula fechada (ou fórmula do termo geral) para a recorrência do item anterior.
15. ◆ De quantas maneiras podemos cobrir um retângulo  $2 \times 6$  com peças  $1 \times 2$  ou  $2 \times 2$ ?
16. ◆ Um número setespalhado é todo número que não tem dois algarismos 7 juntos. Por exemplo: 235; 701; 2737 são setespalhados, mas 772; 12777 e 3177 não são setespalhados.
- a) Quantos números setespalhados de 2 algarismos existem?
- b) Quantos números setespalhados de 3 algarismos existem?
- c) Quantos números setespalhados de 4 algarismos que não começam com “7” existem? E quantos setespalhados de 4 algarismos que começam com “7” existem?
- d) Ache uma fórmula de recorrência para calcular “ $a_n$ ” (número de setespalhados de “ $n$ ” algarismos) em função de “ $a_{n-1}$ ” e “ $a_{n-2}$ ”.

17.  $\blacklozenge$  Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $a_n$  o número de seqüências de comprimento  $n$  com elementos do conjunto  $\{0, 1, 2\}$  sem que existam dois algarismos não nulos consecutivos. Por exemplo, para  $n = 2$  as seqüências que podem ser construídas são  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 0)$  e, como são 5 seqüências possíveis, temos  $a_2 = 5$ .
- (a) Verifique que  $a_3 = 5 + 2 \cdot 3$ .
- (b) Mostre que  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ .
- (c) Encontre uma expressão, em função de  $n$ , para  $a_n$ .
18.  $\blacklozenge$  Considere  $n$  quadrados dispostos lado a lado, como mostra a figura:

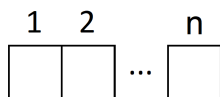


Figura 8.1:  $n$  quadrados.

Cada quadrado só pode ser colorido de vermelho ou azul. Seja  $a_n$  o número de maneiras de colorir os quadrados de forma que não fiquem dois quadrados vermelhos adjacentes. Encontre uma relação de recorrência para  $a_n$ . Justifique.

19.  $\blacklozenge$  A seqüência  $(a_n)$  satisfaz  $a_0 = \frac{1}{4}$ ,  $a_1 = 1$  e, para  $n \geq 2$ ,

$$\left( \frac{a_n}{a_{n-1}} \right)^2 = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}.$$

Encontre uma expressão em função de  $n$  para  $a_n$ .

20.  $\star$  Uma seqüência de números reais  $(x_n)$  é uma lista ordenada de reais em que o primeiro número da lista é o termo  $x_1$ , o segundo é o termo  $x_2$  e assim por diante. Por exemplo, a seqüência usual dos números inteiros positivos pode ser descrita como  $x_n = n$  para todo inteiro positivo  $n$ .

Algumas seqüências podem ser definidas por equações de recorrências, em que um termo é definido em função dos seus anteriores.

Por exemplo, a seqüência de inteiros positivos poderia ser definida por  $x_1 = 1$  e  $x_n = x_{n-1} + 1$  para todo inteiro positivo  $n \geq 2$ . Desse modo, poderíamos calcular  $x_2 = 1 + 1 = 2$ ,  $x_3 = 2 + 1 = 3$  e assim por diante.

Considere uma seqüência de números reais definida por  $x_1 = 1$  e  $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{(x_{n-1})^2}$  para todo inteiro positivo  $n \geq 2$ .

- (a) Calcule  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ .
- (b) Verifique que a seqüência é estritamente crescente, ou seja, que  $x_n > x_{n-1}$  para todo inteiro positivo  $n$ .
- (c) Perceba que a seqüência parece crescer muito pouco. Após calcular alguns termos iniciais, poderíamos suspeitar que nenhum termo excede 2016, mas de fato vamos provar que existem termos maiores que 2016. Para isso, vamos usar a seqüência auxiliar  $y_n = (x_n)^3$ . Prove que  $y_n > y_{n-1} + 3$  para todo  $n \geq 2$ .
- (d) Prove que existe um número  $N$  tal que  $x_N > 2016$ .