Combinatória

POTI/TOPMAT - UFPR

Nível 2

3^a edição

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Coordenadores:	Fernanda de Oliveira de Jesus Leonardo Knelsen Mahmut Telles Cansiz
Site:	http://poti.ufpr.br/
E-mail:	poti@ufpr.br
Capa:	Luciana Laroca
Impressão:	Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de produzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinco e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024
Departamento de Matemática - UFPR
Janeiro de 2024

Sumário

Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo "eu já sei, já estudei isso". Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

Equipe POTI/TOPMAT
Nível 2
2024

Aula 1

Lógica Matemática I

A lógica é a ciência do raciocínio, e muitos problemas matemáticos exigem o seu uso para serem resolvidos. Com isso, a lógica matemática aparece como uma ferramenta para desenvolver a argumentação de ideias abstratas. Perceba que, diferente das outras matérias, nesta aula não teremos teoria. Para se tornar o Mestre da Lógica, não tem segredo, é apenas uma questão de treino, organização de informações e claro, um pouco de criatividade!

Figura 1.1: Mestre Yoda quando aprendeu a equilibrar treino, organização de informações e criatividade.

1.1 Treino I

Esse é o alongamento do seu treino. Tente resolver o exercício antes de olhar a solução!

Exemplo 1.1. Diversas bactérias estão colocadas em um vidro. Um segundo depois cada bactéria se divide em duas, no próximo segundo todas as bactérias se dividem novamente em duas, e assim por diante. Depois de um minuto, o vidro está cheio. Quando o vidro estava pela metade?

Solução. Perceba que a cada segundo o número de bactérias dobra. Pensando a partir do final, vemos que, se o vidro está cheio depois de 60 segundos, então ele estava pela metade um segundo antes. Logo, o vidro estava pela metade depois de 59 segundos. □

Exemplo 1.2. (OBMEP 2019) Ana, Beatriz, Cláudia, Daniela e Érica foram visitar a vovó Margarida. Beatriz chegou antes de Ana e depois de Daniela. Já Cláudia, Daniela e Érica chegaram uma em seguida da outra, nessa ordem. Quem foi a primeira a chegar?

Solução. A ideia para resolver esse problema é listar as pessoas por ordem de chegada. Note que Beatriz chegou depois de Daniela, mas ninguém chegou entre Daniela e Érica. Logo, Beatriz chegou depois de Érica. Assim, Ana deve ter chegado por último, pois as outras três meninas já chegaram antes de Beatriz. Ficamos com a seguinte ordem, do primeiro a chegar até o último: Cláudia, Daniela, Érica, Beatriz, Ana. Então, a primeira a chegar foi a Cláudia. □

Exemplo 1.3. (OBMEP 2018) Vovó Vera quis saber qual de suas cinco netinhas tinha feito um desenho na parede de sua sala. As netinhas fizeram as seguintes declarações:

Emília: Não fui eu.

Luísa: Quem desenhou foi a Marília ou a Rafaela.

Marília: Não foi a Rafaela nem a Vitória.

Rafaela: Não foi a Luísa.

Vitória: Luísa não está dizendo a verdade.

Se apenas uma das netinhas mentiu, quem fez o desenho?

Solução. Neste problema iremos utilizar uma das técnicas mais poderosas para resolver problemas matemáticos: **a prova por absurdo**.

Primeiramente perceba que Luísa e Vitória não podem estar falando a verdade ao mesmo tempo, ou seja, a mentirosa é uma das duas.

Suponha, por absurdo, que Luísa tenha mentido. Então quem desenhou não foi Marília nem Rafaela. Como Emília, Marília e Rafaela falam a verdade, então os culpados também não foram Emília, Vitória ou Luísa, o que é contradição, o que implica que quem mentiu foi a Vitória. Como todas as outras netinhas falam a verdade, então a culpada é Marília. $\square$

1.2 Treino II

É hora de mostrar que suas habilidades de Mestre da Lógica estão se aprimorando! Tente resolver os exemplos abaixo por conta própria.

Exemplo 1.4. Sua equipe de pesquisa mantém seu laboratório no topo de uma montanha nevada. O som do alarme tocou! Uma avalanche está chegando! Todos vocês precisam sair de lá rápido.

Com você está a pesquisadora Ana, o pesquisador Bil e a professora

Carla. Existe apenas um jeito de se salvar: atravessar uma velha ponte de corda que conecta o laboratório com um lugar seguro.

- Você consegue atravessar a ponte em 1 minuto.
- Ana consegue atravessar a ponte em 2 minutos.
- Bil consegue atravessar a ponte em 5 minutos.
- A professora Carla consegue atravessar a ponte em 10 minutos.

Pelos calculos da professora, a avalanche chegará no laboratório em **17 minutos**. Esse é o tempo que você tem para garantir que todos atravessaram a ponte a salvo.

A ponte suporta até **duas pessoas** por vez e, para piorar a situação, acabou a energia e sua equipe tem apenas uma lanterna. Qualquer pessoa que estiver atravessando a ponte precisa estar segurando a lanterna ou estar próximo de alguém com ela (as pessoas esperando em qualquer um dos lados da ponte podem ficar no escuro). Você consegue descobrir uma forma para que **toda a equipe** esteja do outro lado da ponte até o tempo da avalanche chegar?

Exemplo 1.5. Você está maratonando uma série e o último episódio vai ao ar hoje. Ao tentar ligar a televisão, você percebe que o controle está sem as duas pilhas que precisa para funcionar mas, por sorte, uma caixa de de pilhas sempre fica guardada para essas ocasiões.

A caixa contém 4 pilhas carregadas e 4 pilhas vazias, todas misturadas. Você precisa colocar as pilhas no controle rápido, ou vai perder o começo do seu episódio. Como você pode testar as pilhas, de forma que se possa garantir ter um par com duas pilhas carregadas no controle em 7 tentativas ou menos?

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

1. ● (Canguru 2017) Algumas garotas estavam dançando em roda. Antonia era a quarta à esquerda de Bianca e a sétima à direita de Bianca. Quantas garotas haviam na roda?

2. ● (Canguru 2019) Numa corrida, Lola chegou antes de Manfredo, Vitor chegou depois de Jane, Manfredo chegou antes de Jane e Edu chegou antes de Vitor. Quem chegou por último na corrida?

3. ● (OBM 2015, adaptada) Juquinha e seus amigos organizaram uma corrida com seus carrinhos. O carrinho branco chegou antes do vermelho e do marrom. O carrinho azul chegou depois do marrom e antes do vermelho. Qual foi a ordem de chegada dos carrinhos?

4. ● (Canguru 2016) Ivo anota os resultados das quartas de final, semifinal e final de um torneio de tênis. Esses resultados são os seguintes, não necessariamente nessa ordem: Beto vence Antônio, Carlos vence Damião, Gregório vence Henrique, Gregório vence Carlos, Carlos vence Beto, Eduardo vence Frederico e Gregório vence Eduardo. Quais foram os dois finalistas?

5. ● (OPRM 2017, adaptada) Em uma certa ilha há apenas dois tipos de pessoas: as que dizem sempre a verdade e as que dizem sempre a mentira. Três moradores da ilha, Andrea, Bárbara e Carlos, estavam conversando entre si. Andrea disse "Bárbara sempre fala a verdade". Bárbara disse "Andrea e Carlos sempre dizem a verdade". Carlos disse "A Andrea mente". Quais são os moradores da ilha que sempre falam a verdade?

6. ● (OPRM 2018, adaptada) Ao chegar do trabalho, Margarida percebeu que um de seus três filhos (Pedro, Jorge e Patrícia) havia quebrado um vaso na sala. Perguntando a eles sobre o ocorrido, cada um respondeu:

   Pedro: Quem quebrou o vaso fui eu, mamãe.

Jorge: Quem quebrou o vaso não fui eu.

Patrícia: Quem quebrou o vaso não foi o Pedro.

Sabe-se que apenas um deles quebrou o vaso, e que apenas um deles disse a verdade.

(a) Quem quebrou o vaso?

(b) Quem disse a verdade?

7. ● (OBMEP 2015) Em um palácio estavam presentes apenas o rei e alguns de seus súditos. Cada um dos presentes acenou para cada um dos demais uma única vez, com exceção do rei, que não acenou para ninguém. Houve um total de 1296 acenos. Quantos súditos estavam presentes no palácio?

8. ● (OPRM 2019) Em 2019 você participou de um sorteio e ganhou. Porém na hora de receber seu prêmio, descobriu que só receberia daqui à 16.384 dias. Sabendo que você recebeu essa notícia em uma segunda-feira do início de Janeiro, qual o dia da semana e o ano que você de fato receberá seu prêmio?

9. ● (Canguru 2018) Um leão está escondido em um dos três quartos de uma casa. Na porta do quarto 1 está escrito: "O leão está aqui". Na porta do quarto 2 está escrito: "O leão não está aqui", e na porta do quarto 3 lê-se: "$2^3 = 3^2$". Somente uma das sentenças é verdadeira. Qual é o quarto em que o leão está?

10. ● (OBMEP 2017) Zequinha tem três dados iguais, com letras **O**, **P**, **Q**, **R**, **S** e **T** em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra **T**?

11. ● (OPRM 2018, adaptada) Um certo mês do ano teve 5 segundas-feiras. Mostre que esse mês não pode ter tido 5 quintas-feiras.

12. ● (OBMEP 2015) Daniel e mais quatro amigos, todos nascidos em estados diferentes, reuniram-se em torno de uma mesa redonda. O paranaense sentou-se tendo como vizinhos o goiano e o mineiro. Edson sentou-se tendo como vizinhos Carlos e o sergipano. O goiano sentou-se tendo como vizinhos Edson e Adão. Bruno sentou-se tendo como vizinhos o tocantinense e o mineiro. Quem é o mineiro?

13. ● (Canguru 2016) O relógio de Teobaldo está atrasado 10 minutos, mas ele pensa que o relógio está adiantado 5 minutos. O relógio de Leonardo está adiantado 5 minutos, mas Leonardo pensa que está atrasado 10 minutos. No mesmo instante em que olham seus relógios, Teobaldo acha que são 12 horas. Que horas Leonardo acha que são?

14. ● (Canguru 2014, adaptada) Numa nave espacial há alienígenas de três espécies: arcs, ercs e ircs. Cada arc sempre diz a verdade, cada erc sempre mente e cada irc alterna entre dizer a verdade e mentir. Ao chegar à Terra, 17 deles responderam *sim* à pergunta “Você é um arc?", 12 responderam *sim* à pergunta “Você é um irc?" e 8 responderam *sim* à pergunta “Você é um erc?". Sabendo que as perguntas foram feitas nessa ordem, quantos arcs haviam na nave?

15. ● (OBM 2016) Num país imaginário, vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade

e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que quem está à sua frente é mentiroso. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

16. ● (OBM 2016) O ano de 2016 é *sabadoso*, pois há cinco meses com cinco sábados. Qual será o próximo ano sabadoso?

17. ● (OBM 2015) Jonas gosta de observar os relógios digitais espalhados por sua cidade que informam a hora e a data. Por coincidência ele viu que hoje é dia 12/06 e naquele momento marcava 12:06, ou seja, data e hora são formados com os mesmos números! Ele ficou encucado com a coincidência e chamou o momento (data e hora) de *encucado*. Ele pensou que também seria interessante se a hora fosse formada com os mesmos números mas na ordem trocada, por exemplo, no dia 21/06 às 06:21, então chamou esse momento de *encucado reverso*. Considerando que 2015 não é um ano bissexto, desde 01/01/2015 às 00:00 até 31/12/2015 às 23:59 quantos momentos são encucados ou encucados reversos?

18. ● Certo dia, um funcionário do Censo Demográfico bate na porta da casa de uma senhora e pergunta:

    — Quantos filhos a senhora tem?

    — Tenho três filhos. E o produto das idades deles é 36.

    — Com essa informação, é impossível descobrir a idade de cada um deles. — falou o funcionário.

    — A soma das idades deles é igual ao número de janelas daquele prédio. — diz a senhora, apontando para a construção à frente.

    — Bem, isso ajuda, mas ainda não tenho como saber as idades de seus filhos.

    — O mais velho toca piano.

— Ah! Agora posso saber todas as idades!

Quantos anos tem cada um dos filhos?

19. ● Mostre que é possível dispor os números de 1 a 16 em sequência de modo que a soma de dois números vizinhos seja sempre um número quadrado perfeito.

20. ● Bernardo pensou em cinco números distintos e escreveu num papel todos dez números que são somas de dois destes cinco números. Mostre que é possível descobrir os números que Bernardo pensou observando apenas os números escritos no papel.

21. ● (OCM 2001) No país da verdade, onde ninguém mente, reuniram-se os amigos Marcondes, Francisco e Fernando. Entre os três ocorreu a seguinte conversa:

    Marcondes: Estou escolhendo dois inteiros positivos e consecutivos e vou dar um deles ao Francisco e outro ao Fernando, sem que vocês saibam quem recebeu o maior.

    Após receber cada um o seu número, Francisco e Fernando continuaram a conversa.

    Francisco: Não sei o número que Fernando recebeu.

    Fernando: Não sei o número que Francisco recebeu.

    Francisco: Não sei o número que Fernando recebeu.

    Fernando: Não sei o número que Francisco recebeu.

    Francisco: Não sei o número que Fernando recebeu.

    Fernando: Não sei o número que Francisco recebeu.

    Francisco: Agora eu sei o número que Fernando recebeu.

    Fernando: Agora eu também sei o número que Francisco recebeu.

    Quais os números recebidos por cada um deles?

Dicas para os Problemas Propostos

1. Faça um desenho da roda, numerando cada garota.

2. Liste as pessoas por ordem de chegada.

3. Liste os carrinhos por ordem de chegada.

4. Quem venceu duas ou mais vezes?

5. Suponha, por absurdo, que Andrea sempre diz a verdade. O que pode-se concluir?

6. Suponha, por absurdo, que um dos filhos de Margarida disse a verdade. O que pode-se concluir? Repita o processo para os outros filhos de Margarida.

7. Cada súdito acenou n vezes, sendo uma vez para cada um dos outros súditos e uma vez para o rei. Quantos súditos estavam presentes?

8. Quanto é 16.384 dividido por 365? Qual é o resto da divisão de 16.384 por 7?

9. Se a sentença do quarto 1 é verdadeira, então a sentença do quarto 2 é falsa. O que isso quer dizer?

10. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra **O**? Qual é a letra na face oposta à que tem a letra **S**?

11. Tome um mês de 31 dias. Suponha, por absurdo, que esse mês teve 5 quintas-feiras e mostre que contradiz a hipótese do problema.

12. Liste Daniel e seus amigos ao redor de um círculo, estudando cada afirmação do enunciado.

13. Descubra primeiro que horas são e depois descubra que horas Leonardo acha que são.

14. Monte uma tabela com a possível resposta de cada espécie para cada pergunta.

15. O primeiro da fila é mentiroso. Por quê?

16. Note que um mês possui 4 ou 5 sábados e que $365 = 7 \cdot 52 + 1$.

17. Como os números que indicam os meses sempre são menores que 24, qualquer um deles serve para indicar as horas. Além disso, como o número que indica os dias é sempre menor que 60, qualquer um deles serve para indicar os minutos. Assim, em todo dia do ano existe um momento encucado reverso. Para que uma data admita um momento encucado, basta que o número que indica o dia seja menor que 24. Além disso, existem momentos que podem ser simultaneamente encucados e encucados reversos.

18. Liste todas as triplas ordenadas de inteiros positivos cujos produtos de seus termos é igual a 36.

19. Liste todas as possíveis somas cujo resultado é um quadrado perfeito. Observe que a sequência deve ser iniciada por 8 ou 16.

20. Dados cinco números distintos a, b, c, d e e, escreva todas as dez possíveis somas e organize-as em ordem crescente.

21. Perceba que o conjunto dos números inteiros positivos possui um elemento mínimo.

Aula 2

Introdução à Análise Combinatória

Na aula 1, estudamos **lógica matemática**, uma forma de desenvolver a argumentação que exige nossa criatividade junto ao raciocínio matemático.

A partir de agora, trabalharemos com conceitos que necessitam de mais conhecimento teórico, porém são as principais ferramentas para solucionarmos problemas clássicos de olimpíadas.

De quantos modos posso ordenar livros em uma estante? De quantas formas posso me vestir? Quantos números naturais de quatro algarismos distintos existem? São perguntas para as quais precisamos contar para obtermos a resposta. Existem várias maneiras de contar, sendo a mais simples delas a contagem caso a caso, que usamos em nosso dia a dia. Veremos hoje formas mais simples de praticar contagem, para isso vamos utilizar o **Princípio Multiplicativo** e o **Princípio Aditivo**.

2.1 Princício Multiplicativo

Usamos o **princícpio multiplicativo** quando temos dois ou mais eventos que precisam acontecer simultaneamente. Por exemplo: quando você se veste, precisa usar uma camiseta **e** uma calça; ao escolher um episódio de uma série, você escolhe a temporada **e** o episódio; quando vai almoçar você escolhe o que vai comer **e** o que vai beber. Podemos perceber que nesses casos apalavra-chave é **"e"**.

Princípio Multiplicativo: Sejam A e B eventos independentes. Se o evento A pode ocorrer de m maneiras, e o evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m \cdot n$ modos de ocorrer A **e** B (ou seja, de os dois eventos serem realizados).

Exemplo 2.1. Lucas possui 5 camisetas, 3 bermudas e 2 pares de tênis. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir, utilizando necessariamente uma camiseta, uma bermuda e um par de tênis?

Solução. Temos três eventos, com 5, 3 e 2 possibilidades, respectivamente:

Evento A	Escolher camiseta	5 possibilidades
Evento B	Escolher bermuda	3 possibilidades
Evento C	Escolher par de tênis	2 possibilidades

Portanto, o Princípio Multiplicativo nos diz que há $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ maneiras de ocorrer A, B e C. Ou seja, há 30 modos de Lucas se vestir.

Nossa grande preocupação aqui é que os eventos sejam independentes entre si, ou seja: um caso não pode incluir o outro. Neste exemplo, a escolha da camiseta não influencia na da bermuda e nem na do tênis, e vice-versa. Quando esta consideração de independência não é possível, precisamos de mais resultados para chegarmos a uma solução.

Princípio Aditivo: Sejam A e B eventos independentes. Se o evento A pode ocorrer de m maneiras, e o evento B pode ocorrer de n maneiras, então existem $m + n$ modos de ocorrer A **ou** B (ou seja, de algum dos eventos serem realizados).

simplificando, divida em casos e depois some as possibilidades de cada um. Observe que os casos devem ser complementares, isto é, estamos assumindo que um pode ocorrer independentemente do outro. Assim, a palavra-chave é **ou**, e é importante notar que aqui, **ou**, tem sentido de **adição**.

Exemplo 2.2. Uma aldeia possui três saídas ao norte e duas saídas ao sul. De quantas maneiras é possível sair da aldeia?

Solução. Temos dois eventos, com 3 e 2 possibilidades, respectivamente:

Evento A	Sair pelo norte	3 possibilidades
Evento B	Sair pelo sul	2 possibilidades

Portanto, o Princípio Aditivo nos diz que há $3 + 2 = 5$ maneiras de ocorrer A ou B. Ou seja, há 5 maneiras possíveis de sair da aldeia. $\square$

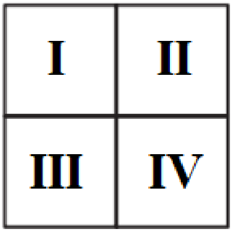
São raras a situações que usamos o princípio aditivo por si só, devido a simplicidade necessáriapara o enunciadopara que se faça dessa forma.

Ele é empregado em casos onde o Princípio Multiplicativo não pode ser diretamente usado. Separamos, então, em problemas menores, aplicamos o P. M. (Princípio Multiplicativo) e depois aplicamos o P. A. (Princípio Aditivo), somando todas as possibilidades.

Exemplo 2.3. (OBMEP 2018) João tem lápis nas cores verde, amarela e preta e quer colorir o tabuleiro da figura, de modo que:

- cada quadradinho deve ser colorido com uma única cor;
- quaisquer dois quadradinhos com um lado comum devem ser coloridos com cores diferentes.

De quantas maneiras diferentes ele pode colorir esse tabuleiro?



Solução. Vamos dividir o problema em dois casos:

Caso 1: As casas I e IV devem ser pintadas da mesma cor.

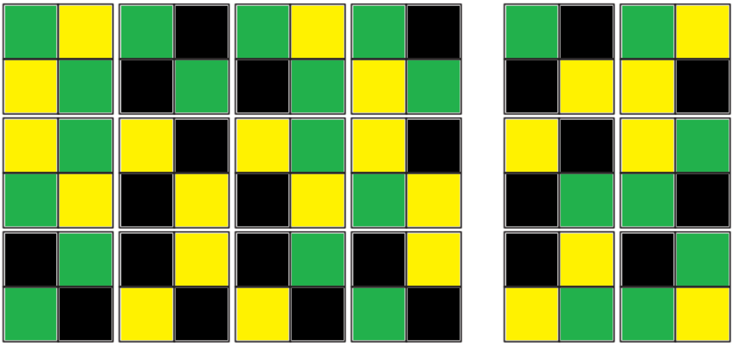
Neste caso, há três possibilidades de se pintar a casa I, apenas uma possibilidade de se pintar a casa IV (pois sua cor deve ser a mesma que a da casa I), duas possibilidades para a casa II e também duas possibilidades para a casa III. Pelo Princípio Multiplicativo, há, neste caso, $3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ possibilidades de pinturas.

Caso 2: As casas I e IV devem ser pintadas de cores diferentes.

Neste segundo caso, podemos usar três cores para pintar a casa I e duas cores para pintar a casa IV. Como as cores das casas I e IV são diferentes, resta apenas uma possibilidade para se pintar a casa II e uma possibilidade para se pintar a casa III. Novamente pelo Princípio Multiplicativo, temos, neste segundo caso, $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$ possibilidades de pinturas.

Juntando os casos 1 e 2, temos, então, pelo Princípio Aditivo, $12 + 6 = 18$ maneiras de colorir o tabuleiro no total.

Note que tudo o que fizemos foi contar organizadamente as possibilidades da figura a seguir, sem a necessidade, entretanto, de listá-las uma a uma. Ao repartir a solução em um estudo caso a caso, é essencial que não haja possibilidades repetidas e que todos os eventos estejam sendo contados.



□

Exemplo 2.4. De quantas maneiras podemos posicionar oito torres indistinguíveis em um tabuleiro de xadrez[1] de modo que não possam se atacar entre si?

Solução. Coloque uma torre em cada linha do tabuleiro. Duas torres só podem se atacar entre si se elas estiverem na mesma coluna. Então não pode haver mais do que uma torre por coluna. Temos então oito possibilidades de coluna para alocar a primeira torre, sete possibilidades de coluna para alocar a segunda torre, e assim por diante, até a última torre que terá apenas uma possibilidade de coluna para ser alocada. Pelo Princípio Multiplicativo, há $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320$ maneiras de posicionar estas torres. □

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

[1] Lembre-se que o tabuleiro de xadrez é um quadriculado 8x8.

Problemas Propostos

1. ● Uma vila possui duas saídas ao norte, uma saída ao sul, três saídas ao leste e duas saídas ao oeste. De quantas maneiras é possível sair desta vila?

2. ● Quantos inteiros entre 1 e 20 são múltiplos de 3 ou de 7?

3. ● Quantos são os gabaritos possíveis de um teste de 5 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas por questão?

4. ● De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?

5. ● Quantos números naturais de quatro algarismos, em que todos os algarismos são distintos, existem?

6. ● De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

7. ● De quantas maneiras podemos colocar uma torre branca e outra preta em um tabuleiro de xadrez de modo que elas não possam se atacar mutuamente?

8. ● Quantos inteiros entre 1 e 2020 são múltiplos de 3 ou de 7?

9. ● Uma fila será formada por 6 pessoas, dentre as quais estão Zezinho e Luisinho. De quantas maneiras esta fila poderá ser formada se:

   (a) Zezinho deve ser o primeiro da fila?

   (b) Zezinho ou Luisinho deve ser o primeiro da fila?

   (c) Zezinho e Luisinho não devem ficar juntos na fila?

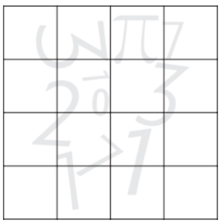
10. ● De quantos modos podemos formar uma roda com 3 crianças?

11. ● (OBMEP 2016) Cada livro da biblioteca municipal de Quixajuba recebe um código formado por três das 26 letras do alfabeto. Eles são colocados em estantes em ordem alfabética: AAA, AAB, ..., AAZ, ABA, ABB, ..., ABZ, ..., AZA, AZB, ..., AZZ, BAA, BAB e assim por diante. O código do último livro é DAB. Quantos livros há na biblioteca?

12. ● (OBMEP 2018) Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto e um carro rosa chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar duas vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

13. ● De quantas maneiras podemos posicionar oito torres distinguíveis em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se atacar entre si?

14. ● (OBMEP 2017) De quantas maneiras diferentes é possível pintar de preto algumas casas do quadriculado abaixo de modo que, em cada linha e em cada coluna, fiquem pintadas de preto exatamente três casas?



15. ● Seja $k = 2020$.

    (a) Quantos divisores positivos k possui?

    (b) Quantos divisores de k são pares?

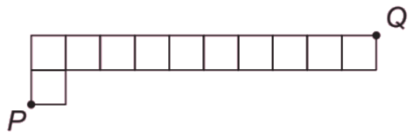
    (c) Quantos divisores de k são quadrados perfeitos?

16. ● De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais

a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

17. ● (OBMEP 2019) Uma mesa circular tem seis lugares com cadeiras de cores diferentes. De quantos modos três casais de namorados podem ocupar esses seis lugares de forma que os três rapazes fiquem juntos e as três moças também, mas nenhum rapaz fique junto de sua namorada?

18. ● (OBMEP 2018) Para fazer um percurso do ponto P ao ponto Q da figura, uma formiguinha deve andar sobre os segmentos horizontais sempre para a direita e nunca passar duas vezes por um mesmo segmento vertical. De quantas maneiras diferentes ela pode fazer esse percurso?



19. ● (OPRM 2019) Um número de cinco algarismos é dito *zureta* se todos os seus algarismos forem primos e se o produto de seus algarismos for par. Quantos números zuretas existem?

20. ● De quantas maneiras é possível colocar um bispo branco e outro preto em um tabuleiro de xadrez de modo que eles não se ataquem mutuamente?

21. ● (Rússia 1996, adaptada) Um número natural n é dito *elegante* se pode ser escrito como soma de um cubo com um quadrado ($n = a^3 + b^2,\ a, b \in \mathbb{N}$). Entre os números naturais de 1 a 1.000.000, existem mais números que são elegantes ou que não são?

Dicas para os Problemas Propostos

1. Utilize o Princípio Aditivo.
2. Utilize o Princípio Aditivo.
3. Utilize o Princípio Multiplicativo.
4. Utilize o Princípio Multiplicativo.
5. Utilize o Princípio Multiplicativo.
6. Utilize o Princípio Multiplicativo.
7. Comece alocando a torre branca no tabuleiro. Quantas casas essa torre ataca?
8. O que podemos dizer dos números múltiplos de 21?
9. Em cada item, execute a restrição solicitada e se necessário separe em casos.
10. Cuidado! Na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si.
11. Os 26 primeiros livros vão de AAA até AAZ. Os 26^2 primeiros livros vão de AAA até AZZ.
12. Separe em dois casos. No primeiro caso, o primeiro motorista para na primeira vaga ou na última. No segundo caso, o primeiro motorista para em qualquer outra vaga.
13. Exatamente uma das torres tem que estar em cada linha. Se alguma torre pode atacar outra ou não só depende da escolha das colunas onde elas estão.
14. Pense nas casas que ficarão vazias. Escolha as casas vazias de modo que em cada linha e em cada coluna apareça exatamente uma casa vazia.

15. Fatore k, separe os casos e utilize o Princípio Multiplicativo.

16. Separe em três casos. No primeiro caso, a primeira carta é o rei de copas. No segundo caso, a primeira carta é a dama de copas. No terceiro caso, a primeira carta é de copas, mas não é o rei de copas nem a dama de copas.

17. De quantas maneiras os rapazes podem se sentar na mesa? Fixe uma dessas escolhas e analise caso a caso para determinar onde as moças podem se sentar.

18. Divida a figura em partes e analise caso a caso.

19. Qual é a quantidade de números de cinco algarismos com todos eles primos? Destes números, qual é a quantidade de números com o produto de seus algarismos ímpar?

20. Separe em casos. Para o primeiro caso, note que a borda do tabuleiro de xadrez tem 28 quadrados e, de um desses, o primeiro bispo ataca 8 quadrados (incluindo o que ele está), de forma que restam 56 quadrados para o segundo bispo ficar. Para o próximo caso, analise os quadrados adjacentes aos da borda, e assim sucessivamente.

21. A quantidade de números elegantes deve ser menor ou igual ao número de soluções da inequação $a^3 + b^2 \leq 10^6$.

Aula 3

Permutações

O objetivo desta aula é aprendermos a contar o número de permutações (diferentes maneiras de se ordenar) de uma quantidade n de objetos. Veja o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. De quantas maneiras podemos arrumar quatro bolas, de cores vermelha, preta, azul e verde, em uma fileira?

Solução. O primeiro lugar na fileira pode ser ocupado por qualquer uma das quatro bolas. O segundo lugar pode ser ocupado por qualquer uma das três bolas restantes. O terceiro lugar pode ser ocupado por qualquer uma das duas bolas restantes. O quarto e último lugar só poderá ser ocupado pela única bola restante. Pelo Princípio Multiplicativo, temos então que a resposta é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. □

Imagine se quiséssemos arrumar 12 bolas de cores distintas em uma fileira ao invés de 4. Por um raciocínio completamente análogo, haveria $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479.001.600$ modos diferentes. Como você pode ver, é muito trabalhoso ficar escrevendo estes produtos. Por conta disso, podemos utilizar a seguinte notação:

$$\boxed{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geq 0}$$

Leia "n fatorial" para $n!$. Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, e $2020! = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Note que definimos n fatorial para $n \geq 0$. Você deve se perguntar então, quanto vale $0!$. Bom, definimos simplesmente que $0! = 1$.

É muito importante que você entenda o conceito de fatorial antes de prosseguir no conteúdo. Tente resolver os exercícios propostos a seguir.

Exercícios Propostos

1. Calcule:
   (a) $2019! \cdot 2020$
   (b) $\dfrac{2020!}{2018!}$
   (c) $2020! + 2019!$

2. Simplifique as expressões:
   (a) $n! \cdot (n+1)$
   (b) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
   (c) $n! + (n-1)!$

No Exemplo 1 vimos um caso de **permutação simples**.

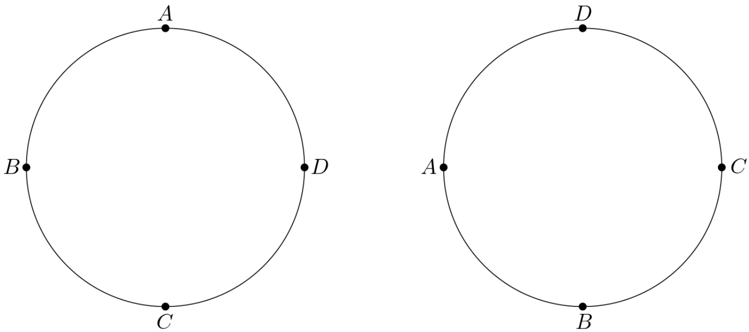
Permutações simples: Dados n objetos distintos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, de quantos modos é possível ordená-los?
Temos n modos de escolher o objeto que ocupará o primeiro lugar, $n-1$ modos de escolher o que ocupará o segundo lugar, e assim por diante, até o último lugar que temos apenas 1 modo de escolher o objeto. Portanto, o número de maneiras de ordenar n objetos distintos é

$$P_n = n! = n(n-1)\cdots 1.$$

Vejamos agora alguns tipos especiais de permutação.

Exemplo 3.2. De quantos modos podemos formar uma roda com 4 crianças?

Solução. À primeira vista parece que para formar uma roda com as 4 crianças basta escolher uma ordem para elas, o que poderia ser feito de $4! = 24$ modos. Entretanto, as rodas $ABCD$ e $DABC$ são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda $ABCD$ pode ser “virada” na roda $DABC$.



Como cada roda pode ser “virada” de quatro modos, a nossa contagem de 24 rodas contou cada roda 4 vezes. Logo, podemos formar uma roda com 4 crianças de $\frac{24}{4} = 6$ modos. $\square$

Permutações circulares: De quantos modos podemos colocar n objetos distintos em n lugares em torno de um círculo, se considerarmos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação?

$$PC_n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Podemos deduzir esta resposta do seguinte modo: se não considerássemos equivalentes as disposições que coincidem por rotação, então teríamos $n!$ possibilidades para distribuir os n objetos. Agora considere que as disposições que coincidem por rotação são equivalentes. Então contamos cada configuração exatamente n vezes, e logo a resposta é $n!$ dividido por n.

Exemplo 3.3. Quantos anagramas a palavra SALAS possui?

Solução. Como temos letras iguais, não podemos utilizar o resultado de permutações simples e dizer que o resultado é 5!. Contudo, podemos utilizar um truque para considerar as letras da palavra SALAS como se fossem todas distintas. Vamos indexar as duas letras S por S_1 e S_2, e as duas letras A por A_1 e A_2. Agora temos 5 objetos distintos: S_1, S_2, A_1, A_2 e L. Portanto, existem 5! permutações entre estes objetos.

Mas veja que, por exemplo, os anagramas $LA_1S_1A_2S_2$, $LA_2S_1A_1S_2$, $LA_1S_2A_2S_1$ e $LA_2S_2A_1S_1$ resultam todos em LASAS, e portanto eles são equivalentes. Assim, temos que considerar estes casos para concluirmos quantos anagramas a palavra SALAS possui.

No exemplo acima, temos exatamente $3! \cdot 2! = 6 \cdot 2 = 4$ objetos correspondentes ao anagrama LASAS, que correspondem a permutações entre os símbolos A_1 e A_2, e permutações dos símbolos S_1 e S_2. Isso significa que ao considerar as 5! permutações entre S_1, S_2, A_1, A_2 e L, contamos o anagrama LASAS 4 vezes. E isso acontece para todos os anagramas, isto é, contamos cada anagrama exatamente 4 vezes. Portanto, o número total de anagramas da palavra SALAS é dado por:

$$P_5^{2,2} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2} = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30.$$

□

<u>**Permutações com repetição:**</u> Considere n objetos que podem ser iguais. Digamos que existem k tipos diferentes de objetos, dentre os n. Se existem a_1 objetos do tipo 1, a_2 objetos do tipo 2, e assim por diante, e a_k objetos do tipo k, então temos $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, com $a_i \geq 1$, para $1 \leq i \leq k$. Neste caso, existem

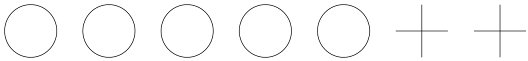
$$P_n^{a_1, a_2, \ldots, a_k} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_k!}$$

permutações entre os n objetos.

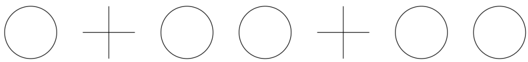
Veja mais um problema onde podemos aplicar este conceito.

Exemplo 3.4. Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação $x + y + z = 5$?

Solução. Interprete o valor 5 da igualdade como se fossem círculos, ou seja, temos 5 círculos para distribuir entre os sinais de +. Basta então calcular as permutações entre os 2 sinais de + e os 5 círculos em questão, como na figura a seguir.



Uma possível configuração de solução seria o par $(1, 2, 2)$, conforme a figura a seguir.



Temos:

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 2} = 7 \cdot 3 = 21.$$

Logo, a equação $x + y + z = 5$ possui 21 soluções inteiras não negativas. $\square$

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

1. ● Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

2. ● Quantos anagramas a palavra VETOR possui?

3. ● Quantos anagramas a palavra CARAVANA possui?

4. ● De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 8 crianças?

5. ● Quantos são os anagramas da palavra VETOR:

   (a) que começam com uma vogal?

   (b) que começam com uma consoante e terminam com uma vogal?

   (c) que possuem todas as vogais juntas?

   (d) que não possuem vogais juntas?

6. ● Repita o problema anterior para a palavra CARAVANA.

7. ● De quantos modos é possível colocar em uma prateleira 5 livros de matemática, 3 de literatura e 2 de geografia, de modo que livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

8. ● Quantas soluções inteiras não negativas possui a equação $x + y + z + w = 3$?

9. ● De quantos modos podemos formar uma roda de ciranda com 7 crianças de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

10. ● Mostre que, se p for um número primo, então $(p-1)!$ não pode ser divisível por p.

11. ● Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistinguíveis de um cubo de madeira?

12. ● De quantos modos 5 mulheres e 6 homens podem formar uma roda de ciranda de modo que as mulheres permaneçam juntas?

13. ● Quantos números de 7 dígitos, maiores que 6.000.000, podem ser formados usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?

14. ● Quantas soluções inteiras **positivas** possui a equação $x + y + z = 10$?

15. ● Quantas soluções inteiras **não negativas** possui a equação $x + y + z < 5$?

16. ● Uma partícula desloca-se sobre uma reta, percorrendo 2 centímetros para a esquerda ou para a direita a cada movimento. De quantas maneiras diferentes a partícula pode realizar uma sequência de 8 movimentos terminados na posição de partida?

17. ● Permutam-se de todas as formas possíveis os algarismos 2, 3, 5, 6 e 7, formando números de 5 dígitos. Qual é a soma dos números assim formados?

18. ● (ITA 1998, adaptada) Qual é o número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas?

19. ● (OPRM 2019) De quantas maneiras é possível distribuir 50 bombons iguais entre 5 pessoas, de modo que cada pessoa receba necessariamente pelo menos 7 bombons?

20. ● (EN) Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA nos quais nenhuma letra ocupa o seu lugar original?

Dicas para os Problemas Propostos

1. Utilize a fórmula de permutação simples.

2. Utilize a fórmula de permutação simples.

3. Utilize a fórmula de permutação com repetição.

4. Utilize a fórmula de permutação circular.

5. Em cada item, separe o problema em casos, se necessário, e utilize o conceito de permutação e os princípios aditivo e multiplicativo.

6. Em cada item, separe o problema em casos, se necessário, e utilize o conceito de permutação e os princípios aditivo e multiplicativo. Note que CARAVANA possui letras repetidas.

7. Separe em casos e utilize a fórmula de permutação simples para cada assunto.

8. Veja o Exemplo 3.4.

9. Quantas rodas podemos formar com 5 crianças? Fixada a posição dessas 5 crianças, temos apenas 5 espaços possíveis (entre as 5 crianças) para alocar as outras duas crianças que não podem ficar juntas.

10. Todos os fatores primos de $(p-1)!$ são menores que p.

11. Perceba que pode estar qualquer número na face superior. Suponha que o número 1 esteja na face superior. Então, há 5 possibilidades de números para a face inferior (2, 3, 4, 5 e 6). Para as quatro faces laterais, note que o caso é análogo ao Exemplo 3.2, pois deve ser levado em conta a rotação do cubo. Conclua.

12. De quantas formas podemos permutar as mulheres apenas? De quantas formas podemos permutar as mulheres junto com os homens (sem esquecer que elas devem permanecer juntas)?

13. Separe o problema em dois casos: o caso que o primeiro dígito do número é 6, e o caso que o primeiro dígito do número é 8.

14. É equivalente a determinar quantas soluções inteiras **não negativas** possui a equação $x + y + z = 7$. Por quê?

15. Quantas soluções inteiras **não negativas** possuem as equações $x + y + z = 0$, $x + y + z = 1$, $x + y + z = 2$, $x + y + z = 3$ e $x + y + z = 4$?

16. Para a partícula terminar na posição de partida, ela deve ter se movido para a direita a mesma quantidade de vezes que se moveu para a esquerda. De quantas formas podemos permutar a sequência dos movimentos que a partícula executou?

17. Identifique o padrão que é formado nesses números, em relação aos algarismos das unidades, dezenas, centenas, e assim por diante.

18. Calcule o número de anagramas da palavra VESTIBULANDO em que as cinco vogais aparecem juntas. O que você deve fazer agora?

19. Distribua 7 bombons para cada uma das 5 pessoas. Agora temos apenas 15 bombons para distribuir. Calcular a quantidade de maneiras possíveis de distribuí-los é equivalente à calcular a quantidade de soluções inteiras não negativas da equação: $a + b + c + d + e = 15$.

20. Pesquise sobre permutações caóticas.

Aula 4

Combinações

Uma **combinação** é uma seleção de itens de uma dada coleção, de forma que a ordem da seleção não importa. Por exemplo, dadas as cores azul, amarelo e vermelho, há três combinações de duas cores que podemos tomar: azul e amarelo; azul e vermelho; ou amarelo e vermelho.

O objetivo desta aula é aprendermos mecanismos para determinar a quantidade de combinações de um conjunto. Vamos começar com um exemplo.

Exemplo 4.1. De quantos modos uma equipe de 3 nadadores pode ser escolhida dentre 8 nadadores?

Solução. A princípio, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem (visto em aulas anteriores), eles poderiam fazer isso de $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ modos. Contudo, a ordem em que os nadadores são escolhidos não importa, assim teríamos menos possibilidades. Por exemplo, considere o caso em que o trio escolhido é formado pelos nadadores (A), (B) e (C). Ao contar as 336 possibilidades, estamos considerando que os casos ABC, ACB, BCA, BAC, CAB e CBA são diferentes. Mas estes 6 casos correspondem ao mesmo trio, logo são todos equivalentes.

De modo geral, contamos cada trio exatamente 6 vezes ao considerar as 336 permutações, que correspondem às permutações entre os integrantes do trio, pois podemos permutar cada trio de $3! = 6$ maneiras. Assim, uma equipe de 3 nadadores pode ser escolhida dentre 8 nadadores de $\frac{336}{6} = 56$ modos. □

Combinações: De quantos modos podemos escolher k objetos distintos entre n objetos distintos dados, considerando que a ordem destes k objetos não importa? Ou equivalentemente, quantos são os subconjuntos de k elementos de um conjunto $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de n elementos? A resposta é

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Aplicando a fórmula anterior no Exemplo 1, obtemos:

$$C_8^3 = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3! \cdot \cancel{5!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 8 \cdot 7 = 56.$$

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 4.2. De quantos modos podemos dividir 10 pessoas em 2 grupos de 5 pessoas cada?

Solução. O primeiro grupo pode ser escolhido de C_{10}^5 modos. Depois que o primeiro grupo é escolhido, sobram apenas 5 pessoas e só há 1 modo de formar o segundo grupo. A resposta parece ser $C_{10}^5 \cdot 1$. Entretanto, contamos cada divisão duas vezes. Por exemplo, $\{a, b, c, d, e\}$ $\{f, g, h, i, j\}$ é idêntica a $\{f, g, h, i, j\}$ $\{a, b, c, d, e\}$ e foi contada como se fosse diferente. Então a resposta é

$$\frac{C_{10}^5 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot C_{10}^5 = \frac{1}{2} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{5! \cdot \cancel{5!}} =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{\cancel{10} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{10} \cdot 4 \cdot \cancel{6}} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126.$$

□

O exemplo a seguir é resolvido de duas maneiras. A Solução 1 resolve utilizando o conceito de permutações apresentado na aula anterior. A Solução 2 mostra uma nova forma de resolver o mesmo problema utilizando combinações.

Exemplo 4.3. Quantos anagramas a palavra CARRO possui?

Solução 1: Podemos utilizar a fórmula de permutações com repetição:

$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Logo a palavra CARRO possui 60 anagramas. □

Solução 2: Suponha que temos 5 quadrados vazios e queremos distribuir as letras da palavra CARRO em cada um dos quadrados. O primeiro passo é alocar as letras repetidas da palavra, ou seja, os dois R's. Podemos fazer isso de C_5^2 formas. O segundo passo é alocar as demais letras da palavra, ou seja, as letras C, A e O. Como dois quadrados já estão preenchidos com os dois R's, sobram apenas três quadrados e, portanto, podemos alocar as letras C, A e O de 3! formas. Utilizando agora o Princípio Multiplicativo, temos que a quantidade de anagramas da palavra CARRO é de

$$C_5^2 \cdot 3! = \frac{5! \cdot \cancel{3!}}{2! \cdot \cancel{3!}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

□

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

1. ● Em um grupo de trinta estudantes, dois serão escolhidos para participar de uma competição matemática. De quantas maneiras isto pode ser feito?

2. ● Uma prova consta de 15 questões, das quais o aluno deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões?

3. ● (IME 1972) Com 10 espécies de frutas, quantos tipos de saladas contendo 6 espécies diferentes podem ser formadas?

4. ● De um baralho de 52 cartas, são extraídas 4 cartas sucessivamente e sem reposição. Qual o número de resultados possíveis, se:

   (a) **não** levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

   (b) levarmos em conta a ordem das cartas extraídas?

5. ● Quantos produtos podemos obter se tomarmos 3 fatores distintos escolhidos entre 2, 3, 5, 7 e 11?

6. ● Temos 10 homens e 10 mulheres. Quantas comissões de 5 pessoas podemos formar se em cada uma deve haver 3 homens e 2 mulheres?

7. ● Um estudante tem 6 livros de matemática e outro tem 8 livros. De quantas maneiras é possível trocar 3 livros pertencentes ao primeiro estudante com 3 pertencentes ao segundo?

8. ● Um clube de xadrez tem 2 meninas e 7 meninos. Tem que ser escolhido um time com quatro pessoas para um torneio e este time tem que conter pelo menos uma menina. De quantas maneiras isto pode ser feito?

9. ● Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando-se que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis que esse time pode ser formado.

10. ● Um salão tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes este salão poderá ser aberto?

11. ● Mostre que $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

12. ● De quantas formas podemos escolher 4 cartas de um baralho de 52 cartas, sem levar em conta a ordem delas, de modo que em cada escolha haja pelo menos um rei?

13. ● (IME 1955) Com os algarismos 1, 2, 3,..., 9, quantos números constituídos de 3 algarismos ímpares e 3 pares, sem repetição, podem ser formados?

14. ● Uma classe tem 31 alunos, incluindo Pedro e João. De quantas maneiras é possível escolher um time de futebol (11 jogadores) de modo que Pedro e João não estejam juntos no time?

15. ● Determine a quantidade de números de oito dígitos que contém exatamente 3 noves.

16. ● Em uma reunião social, cada pessoa cumprimentou todas as outras, havendo ao todo 45 apertos de mão. Quantas pessoas havia na reunião?

17. ● Quantos números com dez algarismos têm a soma de seus algarismos igual a 3?

18. ● São dados 12 pontos em um plano, dos quais 5 e somente 5 estão alinhados. Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em 3 quaisquer dos 12 pontos?

19. ● Mostre que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, onde $n \geq 1$.

20. ● Mostre que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

21. ● Um professor conta exatamente 3 piadas no seu curso anual. Ele tem por norma nunca contar num ano as mesmas 3 piadas que ele contou em qualquer outro ano. Qual é o número mínimo de piadas diferentes que ele pode contar em 35 anos?

Dicas para os Problemas Propostos

1. Utilize a fórmula de combinação.

2. Utilize a fórmula de combinação.

3. Utilize a fórmula de combinação.

4. Cuidado! Em um dos itens basta utilizar a fórmula de combinação. No outro item deve-se utilizar o Princípio Multiplicativo. Leia com atenção para identificar o que acontece.

5. Utilize a fórmula de combinação.

6. Podemos escolher 3 homens de C_{10}^{3} maneiras e 2 mulheres de C_{10}^{2} maneiras.

7. O primeiro estudante pode escolher seus 3 livros de C_{6}^{3} maneiras e o segundo, de C_{8}^{3} maneiras.

8. Separe nos casos: o time tem apenas uma menina; ou o time tem duas meninas.

9. Utilize a fórmula de combinação para escolher jogadores em cada posição.

10. Cada porta pode estar aberta ou fechada, mas sempre deve haver pelo menos uma porta aberta.

11. Seja n o número total de pessoas. Note que escolher k pessoas para participar de um grupo é equivalente a escolher $n - k$ pessoas para não participar de tal grupo.

12. Determine o número de combinações em que não comparece nenhum rei e subtraia do número total de combinações.

13. De quantas formas podemos escolher 3 espaços dos 6 disponíveis para alocar os números ímpares?

14. Existem três casos possíveis: só o Pedro está no time, só o João está no time, ou nenhum dos dois está no time.

15. Separe o problema em casos. Lembre-se que o primeiro dígito do número não pode ser nulo.

16. Resolva a equação $C_n^2 = 45$.

17. Encontre todas as representações do número 3 como somas de diversos números naturais. Não esqueça que o primeiro algarismo não pode ser zero.

18. Cada combinação de 3 pontos, entre os 12 existentes, dá origem a um triângulo, com exceção das combinações de 3 pontos, tomados entre os 5 alinhados.

19. Aplique esta igualdade na resolução do Problema 10 para entender o que acontece.

20. Utilize a fórmula de combinação partindo do lado direito da igualdade.

21. Resolva a equação $C_n^3 = 35$.

Aula 5

Lógica Matemática II

5.1 Proposições e conectivos

Exemplo 5.1. Considere as seguintes frases:

1. O céu é azul.
2. A Lua é plana.
3. O número de alunos POTI é divisível por 3.

À primeira vista, não parece ter nada de especial nas frases numeradas acima. Porém, matematicamente, as classificamos como **proposições**. O que seria isso?

Definição 5.1.1. Uma proposição é uma sentença completa que pode receber um valor lógico, ou seja, ser classificada como "verdadeira" (V) ou "falsa" (F).

É fácil averiguar que a proposição 1 é verdadeira, a 2 é falsa (diga não ao luaplanismo), e apesar de não termos conhecimento da resposta da 3, ela só pode ser verdadeira ou falsa. Toda proposição tem *um e somente um* dos valores "V" ou "F" apresentados, sendo assim, não pode assumir ambos valores lógicos simultaneamente. Caso contrário, teríamos o que chamamos de *contradição*.

Também podemos classificar proposições como **simples**, como as do exemplo 1, ou **compostas**.

Uma proposição composta é aquela que é formada pela composição de duas ou mais proposições. Essa composição é dada por meio de *conectivos*.

Exemplo 5.2. Proposições com conectivos:

1. O céu é azul **e** a grama é verde.
2. **Se** $4! = 24$, **então** $4!$ é par.
3. Tomo sorvete **ou** como chocolate.

Os principais conectivos usados na matemática são:

Negação	Não
Conjunção	e
Disjunção	ou
Condicional	se... então
Bicondicional	... se, e somente se...

Exemplo 5.3. Sejam P e Q proposições distintas, escreva as seguintes relações:

- P: 2 é primo
- Q: 2 tem apenas dois divisores positivos
- Condicional: **Se** 2 é primo, **então** 2 tem apenas dois divisores positivos.
- P: Curitiba fica no Paraná.
- Negação: Curitiba **não** fica no Paraná.
- P: Um número é irracional.
- Q: Um número não pode ser escrito como fração de inteiros.
- Bicondicional: Um número é irracional **se, e somente se,** não pode ser escrito como fração de inteiros.

5.2 Implicações lógicas

Dadas duas proposições distintas P e Q, diremos que P $\Rightarrow$ Q (lê-se: P implica Q) quando a proposição Q for verdadeira (V) todas as vezes que a proposição P for verdadeira (V).

Definição 5.2.1. A proposição P $\Rightarrow$ Q vale se, e somente se, a relação condicional entre P e Q é sempre verdade (V).

Teremos uma relação *recíproca* quando a P implicar em Q e também Q implicar em P (representado por P $\iff$ Q).

Exemplo 5.4. Para as proposições P e Q apresentadas a seguir:

- P: "$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos opostos pelo vértice".
- Q: "$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos de medidas iguais".
- P $\Rightarrow$ Q (Verifique a Aula 2 de Geometria!): **Se** $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos opostos pelo vértice, **então** $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos de medidas iguais"

A recíproca Q $\Rightarrow$ P é falsa. Você consegue explicar por quê?

Definição 5.2.2. Se temos que P $\Rightarrow$ Q, então, usando a **negação**, é equivalente dizer que **não** Q $\Rightarrow$ **não** P.

Chamamos essa relação de *contrapositiva* de P $\Rightarrow$ Q.

Exemplo 5.5. Para as proposições P e Q apresentadas a seguir:

- P: "$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos opostos pelo vértice".
- Q: "$\hat{A}$ e $\hat{B}$ são ângulos de medidas iguais".
- Contrapositiva: "**Se** $\hat{A}$ e $\hat{B}$ **não** são ângulos de medidas iguais, **então** $\hat{A}$ e $\hat{B}$ **não** são ângulos opostos pelo vértice".

5.3 Tipos de demonstrações matemáticas

Uma **demonstração matemática** consiste em explicitar um raciocínio lógico que nos permite determinar que uma afirmação é realmente verdadeira.

5.3.1 Demonstração direta

Muitas relações matemáticas são apresentadas da forma **Hipótese** $\Rightarrow$ **Tese** e demonstrar uma afirmação desse tipo resume-se em supor que a **Hipótese** seja verdadeira para provar que a **Tese** é verdadeira. Esse tipo de demonstração se chama *demonstração direta*.

Exemplo 5.6. A soma de dois números pares é par.

Solução: Não são necessários muitos exemplos para se convencer de que a afirmação anterior vale:

$$2+2=4 \qquad 4+8=12 \qquad 130+50=180 \qquad \cdots$$

Mas como fazemos para garantir que vale **para toda** soma de dois números pares?

Primeiro, vamos traduzir nossa afirmação para a linguagem *condicional*

Se X e Y são números pares, então X + Y é par.

A parte em vermelho é a Hipótese e a parte em azul é a Tese.

1. Vamos assumir que a Hipótese é verdadeira, ou seja, X e Y são números pares.

2. Se ambos são pares, $X = 2k$ e $Y = 2h$, para k e h números inteiros.

3. $X + Y = 2k + 2h$, então $X + Y = 2\underbrace{(k+h)}_{C}$, onde C é um número inteiro.

4. $X + Y = 2C$.

5. $X + Y$ é par.

Assumimos que a hipótese era verdadeira e pudemos concluir que a tese é verdadeira.

E se a sentença do exemplo 5.6 fosse a seguinte:

A soma de dois números pares é ímpar.

Claramente essa afirmação é falsa, pois já foi demonstrado que, dados dois números pares, sua soma é par.

A maneira de provar que um resultado é falso é usando o que chamamos de *contraexemplo*.

Exemplo 5.7. Todos números primos são ímpares.

Falso, pois 2 é um número primo e 2 não é ímpar. É suficiente achar um contraexemplo para podermos afirmar que uma sentença é falsa.

5.3.2 Demonstração pela contrapositiva

Vamos usar a definição de (5.2.2) da contrapositiva como ferramenta de demonstração:

Exemplo 5.8. Mostre que, dado x inteiro, se $3x+13$ é impar, então x é par.

Solução: A contrapositiva da proposição

"Se $3x + 13$ é ímpar, então x é par"

é

"Se x não é par, então $3x + 13$ não é impar"

Então, vamos demonstrar a contrapositiva, usando a forma direta:

Suponha que x não é par, então x deve ser ímpar. Assim, $3x$ também será ímpar, já que é o produto de dois números ímpares. Por fim, como $3x + 13$ é soma de dois números ímpares, será par. Logo, $3x + 13$ não é ímpar.

Tendo isso provado, podemos afirmar que nossa sentença original "Se $3x + 13$ é ímpar, então x é par"é verdadeira.

Por enquanto, essa forma de demonstração pode parecer ser um caminho mais longo, porém, em certas ocasiões será uma grande aliada.

5.3.3 Demonstração por absurdo

Outra técnica de demonstração é a prova por *absurdo* ou *contradição*. A ideia aqui vai ser assumir que uma proposição é verdadeira (mesmo sabendo que não pode ser) e chegar em alguma afirmação impossível de ocorrer, ou seja, um absurdo. Vamos formalizar isso com um exemplo.

Exemplo 5.9. Nenhum número inteiro pode ser par e ímpar ao mesmo tempo.

Sabemos que isso é verdade, mas como demonstrar?

Bom, vamos supor (por absurdo) que exista um número X que seja simultaneamente par e ímpar. Se esse número existe, então, dados k e h inteiros, podemos escrevê-lo como

$$X = 2k \quad \text{e} \quad X = 2h + 1$$

Então,

$$2k = 2h + 1$$

ou seja,

$$2k - 2h = 1$$

$$2(k - h) = 1.$$

O que é um absurdo, pois não existe número inteiro que, quando multiplicado por 2, resulte em 1.

Assim, podemos concluir que nenhum número inteiro pode ser par e ímpar ao mesmo tempo. A demonstração por absurdo é uma ferramenta importantíssima na Matemática que pode nos ajudar na solução e compreensão de diversos problemas.

Problemas Propostos

1. ● Escreva as relações pedidas para as proposições dadas e classifique-as de acordo com seu valor lógico ((V) ou (F)).

   - P: O triângulo ABC tem dois lados iguais.
   - Q: O triângulo ABC tem 2 ângulos iguais.
   - Condicional
   - O caso bicondicional é verdadeiro?

   - P: Álgebra é melhor que combinatória.
   - Negação

   - P: Ser paranaense.
   - Q: Ser brasileiro.
   - P $\Rightarrow$ Q
   - Q $\Rightarrow$ P

2. ● Considere as seguintes proposições:

   - P: Todo quadrado é um retângulo.
   - Q: Todo retângulo é um quadrado.

   Qual o **valor lógico** de cada uma das proposições? Se alguma for falsa, justifique com um contraexemplo.

3. ● Prove que as seguintes afirmações são falsas exibindo um contraexemplo:

   (a) sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$, então $a|b$ **e** $a|c$.

   (b) sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$, então $a|b$ **ou** $a|c$.

4. ● Prove pela contrapositiva o seguinte resultado

   "Para x inteiro, se x^2 é par, então x é par."

5. ● Prove por demonstração direta o seguinte resultado:

   "Dados dois números inteiros, se a sua soma resulta em um número divisível por 2, então a subtração desses mesmos dois números também é divisível por 2."

6. ● Prove por absurdo que $\sqrt{2}$ é irracional.

Aula 6

Paridade

Todo número inteiro é par ou ímpar. Apesar da simplicidade dessa afirmação, veremos que ela é uma ferramenta de grande utilidade na resolução de muitos problemas envolvendo números inteiros. Vamos começar definindo formalmente números pares e ímpares.

Definição 6.0.1.

- Um número inteiro n é dito **par** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$.
- Um número inteiro n é dito **ímpar** se existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$.

Como consequência da Definição 7.2.1, obtemos que um número é par se, e só se, ele é divisível por 2. Veja agora mais uma definição.

Definição 6.0.2. Dizemos que dois números inteiros têm mesma paridade, quando são ambos pares ou ambos ímpares.

Vamos agora enunciar algumas propriedades importantes:

Propriedade 6.1. (Paridade da soma).

1. A soma de dois números inteiros de mesma paridade é par.
2. A soma de dois números inteiros de paridade oposta é ímpar.

Demonstração.

1. Sejam a e b números inteiros de mesma paridade. Vamos dividir em dois casos: um caso em que a e b são pares, e outro em que são ímpares.

   Caso 1: Suponha que a e b sejam pares. Então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2m$ e $b = 2n$. Dessa forma:

   $$a + b = 2m + 2n = 2(m + n).$$

   Se $t = m+n$, temos que $t \in \mathbb{Z}$ e segue que $a+b = 2(m+n) = 2t$. Logo $a + b$ é par.

   Caso 2: Suponha que a e b sejam ímpares. Então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2m + 1$ e $b = 2n + 1$. Dessa forma:

   $$a + b = (2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1).$$

   Se $t = m + n + 1$, temos que $t \in \mathbb{Z}$ e segue que $a + b = 2(m + n + 1) = 2t$. Logo $a + b$ é, da mesma forma, par. □

2. Sejam a e b números inteiros de paridade oposta. Suponha, sem perda de generalidade, que a é par e b é ímpar. Então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2m$ e $b = 2n + 1$. Dessa forma:

   $$a + b = 2m + 2n + 1 = 2(m + n) + 1.$$

   Se $t = m+n$, temos que $t \in \mathbb{Z}$ e segue que $a+b = 2(m+n)+1 = 2t + 1$. Logo $a + b$ é ímpar. □

Propriedade 6.2. (Paridade do produto).
O produto de dois números inteiros só será ímpar se os dois números forem ímpares.

Demonstração.
Vamos dividir em dois casos: um caso em que a e b são ímpares, e outro em que pelo menos um deles é par.

Caso 1: Sejam a e b números inteiros ímpares. Então existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 2m + 1$ e $b = 2n + 1$. Dessa forma:

$$a \cdot b = (2m+1)(2n+1) = 4mn+2m+2n+1 = 2(2mn+m+n)+1.$$

Se $t = 2mn + m + n$, temos que $t \in \mathbb{Z}$ e segue que $a \cdot b = 2(2mn + m + n) + 1 = 2t + 1$. Logo $a \cdot b$ é ímpar.

Caso 2: Sejam a e b números inteiros, e suponha, sem perda de generalidade, que a é par. Então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$. Dessa forma:

$$a \cdot b = (2k)b = 2(kb).$$

Se $t = kb$, temos que $t \in \mathbb{Z}$ e segue que $a \cdot b = 2(kb) = 2t$. Logo $a \cdot b$ é par, independente da paridade de b. □

Nesta aula, apresentaremos problemas que exploram esta ideia de paridade. Apesar de alguns problemas parecerem fáceis, não se engane, pois ainda assim exigirão raciocínio lógico e criatividade. Lembre-se de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas. Veja alguns exemplos a seguir.

Exemplo 6.0.1. Um tabuleiro quadrado 5×5 pode ser coberto por dominós 1×2?

Solução:

A resposta é **não**. Perceba que um tabuleiro 5×5 possui 25 quadrados e cada dominó possui 2 quadrados. Logo, dominós só poderão cobrir uma quantidade par de quadrados, e portanto, esse tabuleiro não poderá ser coberto. □

Exemplo 6.0.2. Em um quartel existem 2020 soldados e, todas as noites, três deles são escolhidos para trabalhar de sentinela. É possível que após certo tempo um dos soldados tenha trabalhado com cada um dos outros exatamente uma vez?

Solução:

A resposta é **não**. Escolha, ao acaso, um soldado. Em cada noite em que este soldado trabalha, ele está em companhia de dois outros. Como 2019 é um número ímpar, não podemos formar pares de soldados sempre diferentes para trabalhar com este soldado escolhido. □

Exemplo 6.0.3. Mostre que numa festa com 2020 pessoas, o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa é par.

Solução:

Seja n o número de pessoas que conhecem um número ímpar de outras pessoas na festa. Queremos mostrar que n é par. Numere as pessoas de 1 até n e denote por a_j o número de amigos da pessoa j. Imagine que existe um fio ligando duas pessoas que se conhecem. Denotamos por q a quantidade total de fios. Temos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2q$, pois cada fio é contado duas vezes, uma vez em cada ponta. Como $2q$ é um número par, temos que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é par. Como cada a_j é ímpar, segue que a soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ possui uma quantidade par de parcelas. Logo n é par. □

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

1. ● Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 2020? Por quê?

2. ● Mostre que o número 2021 é ímpar.

3. ● Mostre que a soma de dois números inteiros é par se, e somente se, esses números têm mesma paridade.

4. ● Kátia e seus amigos estão em um círculo. Os dois vizinhos de cada uma das crianças são do mesmo sexo. Se o círculo contém cinco meninos, quantas meninas estão neste círculo?

5. ● Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 2019?

6. ● Os números de 1 a 10 estão escritos em uma linha. Pode-se colocar os sinais de “$+$" e de “$-$" entre eles de modo que o valor da expressão resultante seja 0?

7. ● Em Brasilândia existem apenas 9 casas muito distantes entre si. É possível que cada casa esteja ligada a exatamente 7 outras casas através de estradas?

8. ● São colocadas vinte e cinco peças em um tabuleiro de damas 25×25 de tal modo que suas posições são simétricas em relação a uma de suas diagonais. Mostre que pelo menos uma das peças tem que estar sobre a diagonal.

9. ● Seja n^2 um número par. Mostre que n é par.

10. ● (OM 1999) Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã. Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma

outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce. Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

11. ● Os números $1, 2, 3, \cdots, 2020, 2021$ estão escritos em um quadro negro. Decidimos apagar dois desses números do quadro e substituí-los por sua diferença positiva. Depois de fazer isto diversas vezes, só restou um número escrito no quadro. Este número pode ser 0?

12. ● Seja n um número ímpar. Mostre que n^3 é ímpar.

13. ● Mostre que a igualdade $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f} = 1$ com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ não admite soluções com todos os números sendo ímpares.

14. ● O produto de 22 números inteiros é igual a 1. Mostre que sua soma não pode ser zero.

15. ● Um gafanhoto pula ao longo de uma linha poligonal. Seu primeiro pulo corresponde a uma distância de 1 cm, seu segundo a 2 cm, e assim por diante. Cada pulo o leva para a direita ou para a esquerda. Mostre que, depois de 2021 pulos, o gafanhoto não pode voltar a sua posição inicial.

16. ● Um caracol está se movendo em um plano com velocidade constante, fazendo um ângulo reto a cada 15 minutos. Mostre que o caracol só pode voltar ao ponto de partida depois de um número inteiro de horas.

17. ● Mostre que se a, b e c são inteiros ímpares, então a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raiz racional.

18. ● Um tabuleiro quadrado 6×6 está coberto por dominós 1×2. Mostre que existe uma reta que separa as peças do tabuleiro sem cortar nenhum dominó.

19. ● Estão sentados ao redor de uma mesa redonda 25 meninos e 25 meninas. Mostre que os dois vizinhos de pelo menos uma das crianças são meninos.

20. ● Mostre que numa festa com 2020 pessoas existem duas com um número par de amigos em comum.

Dicas para os Problemas Propostos

1. Qual é a paridade do resultado da soma de cinco números ímpares?

2. Mostre que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2021 = 2k + 1$.

3. Utilize as propriedades enunciadas anteriormente (Propriedade 7.2.4, Propriedade 6.2).

4. Analise primeiramente um vizinho de Kátia.

5. Qual é a paridade da soma destes números?

6. Independentemente das operações, a paridade do resultado será invariante. Por quê?

7. Some a quantidade de estradas que saem de cada casa.

8. Se nenhuma das peças estivesse sobre a diagonal, o que podemos dizer em relação a paridade da quantidade de peças?

9. É equivalente a mostrar que se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

10. Note que se uma rã vai de um degrau par para um ímpar, a outra rã que se movimenta com ela também pulará um número ímpar de degraus, mudando também a paridade.

11. Verifique que a paridade do resultado será invariante.

12. Como n é ímpar, então $n = 2k + 1$ para algum k inteiro. Mostre que existe m inteiro tal que $n^3 = 2m + 1$.

13. Suponha que a igualdade admite uma solução com todos os números sendo ímpares, e desenvolva a igualdade.

14. Perceba que os únicos candidatos para esses 22 números inteiros são o 1 e o -1.

15. Perceba que você pode associar aos pulos do gafanhoto um número com sinal. Utilize agora a mesma estratégia do Problema 6.

16. Suponha que o caracol voltou ao ponto de partida depois de se mover sobre n segmentos verticais. Não é difícil de ver que o caracol também passou por n segmentos horizontais. Ele passou então por $2n$ segmentos ao todo. Quanto tempo ele levou?

17. Suponha que um número racional $\frac{p}{q}$ seja raiz dessa equação e separe em casos de acordo com a paridade de p e q.

18. Imagine uma reta que separe o tabuleiro em duas partes, e suponha que ela corte ao meio algum dominó. Mostre que esta reta corta também outro dominó. Quantos dominós estão no tabuleiro e quantas retas verticais e horizontais dividem a grade do tabuleiro? O que podemos concluir?

19. Numere as crianças e suponha que nenhuma delas tem dois vizinhos meninos.

20. Suponha que quaisquer duas pessoas tenham um número ímpar de amigos em comum. Seja A um dos participantes da festa e considere uma nova festa restrita apenas aos amigos de A. Utilize o resultado do Exemplo 6.0.3.

Aula 7

Conjuntos

7.1 Introdução

Como o nome já indica, podemos pensar nos conjuntos como uma coleção de "coisas" que seguem a mesma regra. Alguns exemplos são:

- o conjunto de todos os alunos do POTI;
- o conjunto de alunos do nível 2 do POTI;
- o conjunto dos números inteiros ímpares;
- o conjunto números divisíveis por 5.

Os objetos dentro de um conjunto são seus **elementos** e os agrupamos entre chaves "{}", da seguinte forma:

$$A = \{\text{Alunos do nível 2 do POTI}\}$$
$$B = \{\text{Números inteiros ímpares}\}$$

Uma maneira mais comum de denotar os conjuntos A e B é:

$$A = \{x \mid x \text{ é aluno do nível 2 do POTI}\}$$

$$B = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

onde | é lido como “tal que” e, assim, os dois conjuntos A e B acima são lidos como:

A é o conjunto dos x tal que x é aluno do nível 2 do POTI.
B é o conjunto dos k tais que k são os números inteiros ímpares.

Utilizamos a notação $x \in K$, (lê-se x pertence a K) quando x é um dos elementos do conjunto K. Por outro lado, escrevemos $x \notin K$ (lê-se x não pertence a K), caso contrário.

Exemplo 7.1.1. $2 \notin B$ (2 não é ímpar).

Exemplo 7.1.2. Professor Nil $\notin A$ (Professor Nil não é um aluno do nível 2).

Exemplo 7.1.3. $3 \in B$ (3 é ímpar).

Às vezes, nenhum elemento x tem as propriedades necessárias para estar em K. Nesse caso, temos um *conjunto sem elementos*, que é denotado por ”$\emptyset$” (lê-se conjunto vazio). Podemos descrevê-lo da seguinte forma:

Qualquer que seja x, tem-se que $x \notin \emptyset$.

7.2 Inclusão e igualdade entre conjuntos

Por vezes, é de interesse trabalhar com apenas alguns elementos de um conjunto, e não todos eles. Nesse caso, criamos um novo conjunto (chamado subconjunto) com alguns elementos do conjunto original. A definição formal é apresentada a seguir.

Definição 7.2.1. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que A é subconjunto de B quando todo elemento de A também está em B. Para isso, usa-se a notação $A \subset B$ (lê-se A está contido em B).

Exemplo 7.2.1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $A = \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$

Perceba que A são todos os os números naturais pares, assim, é imediato que

$$A \subset \mathbb{N}$$

Exemplo 7.2.2. Todo conjunto é subconjunto dele mesmo, ou seja, para dado conjunto A, $A \subset A$.

Isso ocorre pois um conjunto sempre contém todos os seus elementos. Dado $x \in A$, para qualquer x escolhido, x está em A. Assim, $A \subset A$.

Definição 7.2.2. Dois conjuntos A e B são iguais quando todos seus elementos são iguais. Denotamos a igualdade entre conjuntos por

$$A = B$$

Exemplo 7.2.3. $\mathbb{N} = \mathbb{Z}^*_+$ (esse monte de símbolos representa o conjunto dos inteiros positivos sem o 0).

Para afirmar que dois conjuntos são iguais, precisamos que $A \subset B$ e $B \subset A$. Estamos então afirmando que todos os elementos de A estão em B e todos os elementos de B estão em A, logo, $A = B$.

7.2.1 Operações entre conjuntos

Definição 7.2.3. A união dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cup B$ (lê-se A união B). Afirmar que $x \in A \cup B$ significa dizer que pelo menos uma das afirmações é verdadeira: $x \in A$ ou $x \in B$. Podemos então escrever:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo 7.2.4.

$$A = \{\text{Todas as pessoas que gostam de sorvete de morango}\}$$
$$B = \{\text{Todas as pessoas que gostam de sorvete de chocolate}\}$$
$$A \cup B = \{\text{Todas as pessoas que gostam de sorvete de chocolate } \textbf{ou} \text{ sorvete de morango}\}.$$

Uma observação importante a se fazer aqui é que nada impede que o elemento da união pertença aos dois conjuntos simultaneamente. Por exemplo, $7 \in \mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$, mas ele é simultaneamente natural e inteiro.

Definição 7.2.4. A interseção dos conjuntos A e B é o conjunto $A \cap B$ (lê-se A interseção B). Afirmar que $x \in A \cap B$ significa dizer que se tem, ao mesmo tempo: $x \in A$ e $x \in B$. Podemos então escrever:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Quaisquer que sejam os conjuntos, tem-se que $(A \cap B) \subset A$ e $(A \cap B) \subset B$. No caso em que não existam elementos que estejam simultaneamente em ambos os conjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$, falamos que A e B são conjuntos *disjuntos*.

Exemplo 7.2.5.

$$A = \{\text{Todas as pessoas que gostam de sorvete de morango}\}$$
$$B = \{\text{Todas as pessoas que gostam de sorvete de chocolate}\}$$
$$A \cap B = \{\text{Todas as pessoas que gostam de sorvete de chocolate } \textbf{e} \text{ sorvete de morango}\}.$$

7.3 Diferença entre dois conjuntos

Definição 7.3.1. Podemos definir a operação de diferença entre dois conjuntos A e B, cujo resultado é denotado por $A - B$ ou $A \setminus B$. Então escrevemos

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ e \ x \notin B\}$$

Exemplo 7.3.1. Se $A = \{1, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{2, 4, 3, 6, 9\}$, então:

$$A \setminus B = \{1, 5, 7\}.$$

7.4 Conjunto complementar e conjunto universo

Naturalmente, todo conjunto A que não seja vazio possui ao menos um elemento. Assim, como podemos nos referir a todos os elementos que não estão em A?

Definição. Definimos o conjunto A^c (leia-se: A complementar) como sendo o conjunto dos elementos que não estão em A.

Mas essa definição não é muito robusta. O conjunto A^c varia, dependendo do universo no qual A está inserido. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 7.4.1. Seja $A = \mathbb{N}$, isto é, o conjunto de todos os números naturais. Qual seria o seu complementar?

Resolução. Se estivermos considerando apenas os números inteiros, então $A^c = \{0, -1, -2, \dots\}$. Mas e se o universo para qual estamos olhando for o dos números reais? Dessa vez, A^c certamente é diferente. Tome, por exemplo, π. Temos que $\pi \in \mathbb{R}$, mas $\pi \notin A$. Por definição, isso implicaria que $\pi \in A^c$. Mas, no primeiro caso, A^c não continha π.
(Lembre-se que, para que dois conjuntos sejam distintos, basta mostrar que existe pelo menos um elemento que está em um deles mas não está no outro.)

Isso é bastante problemático para nós, na Matemática. Precisamos ser cautelosos para que nossas definições não admitam ambiguidades; isto é, elas devem ser robustas (também é comum dizer que o conceito deve estar bem-definido). Desta forma, para definir A^c, precisamos primeiro definir o tal universo do problema.

Definição 7.4.1. O conjunto que contém todos os elementos do contexto trabalhado é chamado de conjunto universo.

Em nossas aulas, o conjunto universo será denotado por U. Veja que, por definição, temos que $A \subset U$ para qualquer conjunto A no problema (o conjunto universo contém todos os outros conjuntos).

O nome, como sempre na Matemática, é bem sugestivo. Com U, podemos definir o complementar de um conjunto de maneira única.

Definição 7.4.2. O conjunto A^c (leia-se: A complementar), para todo A, é dado por $A^c = U \setminus A$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 7.4.2. Se $U = \{2, 5, 7, 10, 25, 38, 40\}$ e $A = \{7, 10, 25\}$, então $A^c = \{2, 5, 28, 40\}$.

Exemplo 7.4.3. Dentre todos os números naturais, qual é o complementar do conjunto dos números primos?

Resolução. Como o enunciado diz que estamos trabalhando apenas com números naturais, tem-se que $U = \mathbb{N}$. Desta forma, se $A = \{x \mid x \text{ é número primo}\}$, sabemos que todo número que não é primo é um número composto. Assim, tem-se $A^c = \{x \mid x \text{ é número composto}\}$.

Exemplo 7.4.4. Seja $U = \{x \mid x \text{ é um triângulo}\}$. Qual é o complementar do conjunto dos triângulos isósceles?

Resolução. Denote $A = \{x \mid x \text{ é isósceles}\}$. Sabemos que um triângulo é dito isósceles se apresenta dois lados congruentes e um terceiro com medida distinta. Assim, se $x \in U$ e $x \notin A$, existem apenas outras duas possibilidades:

- x possui três lados de medidas distintas;
- x possui três lados de medidas iguais.

Logo, tem-se que $A^c = \{x \mid x \text{ é equilátero}\} \cup \{x \mid x \text{ é escaleno}\}$.

7.5 Diagrama de Venn

7.6 Alguns conjuntos numéricos usuais

7.6.1 Conjunto dos Naturais

O conjunto dos naturais é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$ e nele estão contidos todos os números a partir do número 1 (sim, aqui

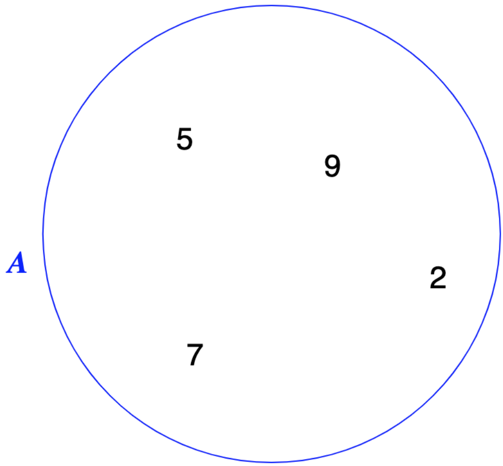


Figura 7.1: Diagrama de Venn de A

não vamos considerar o 0 como um número natural) e vai até onde você nem pode mais contar. Representamos o conjunto dos naturais, então, da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

7.6.2 Conjunto dos Inteiros

O conjunto dos inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$ e ele contém todos os números naturais, o 0 e contém também os naturais negativos. Representamos os inteiros da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Se você lembrar das aulas anteriores, pela forma que os conjuntos dos naturais e dos inteiros são definidos, temos que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$, ou seja $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

7.6.3 Conjunto dos Racionais

O conjunto representado por $\mathbb{Q}$ dos racionais é onde as coisas começam a ficar mais interessantes. Esse conjunto surgiu a partir da necessidade prática de representar algo como uma *parte* de um todo, ou seja, de representar um número como uma *fração*. $\mathbb{Q}$ é definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \ e \ b \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Isso se lê como $\frac{a}{b}$ é um número tal que a é um numero inteiro e b também é um número inteiro que não seja 0. Portanto podemos dizer que os racionais são todos aqueles números que podem ser escritos como uma fração.

Note que, pela definição, todos os números em $\mathbb{Z}$ formam as frações em $\mathbb{Q}$, mas nem todos os elemento de $\mathbb{Q}$ estão em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 7.6.1. $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{Q}$. Sabemos que $3 \in \mathbb{Z}$ e $2 \in \mathbb{Z}^*$, mas $\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Podemos afirmar então que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Perceba que como todos os elementos de $\mathbb{N}$ estão em $\mathbb{Z}$, e acabamos de ver que todos os elementos de $\mathbb{Z}$ estão em $\mathbb{Q}$, então concluímos que todos os elementos de $\mathbb{N}$ também vão estar em $\mathbb{Q}$, ou seja:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

7.6.4 Conjunto dos Reais

O conjunto $\mathbb{R}$ dos reais é formado por todos os números que podem ser representados na reta numérica, ou seja, ele é a junção de todos os conjuntos vistos anteriormente. Podemos dizer que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Tente visualizar as relações as relações mostradas acima com o seguinte diagrama:

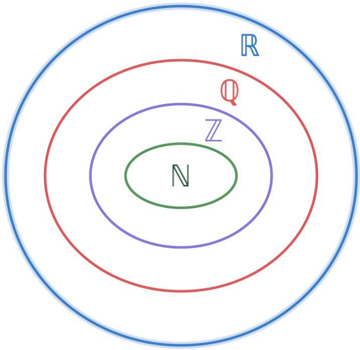


Figura 7.2: Diagrama de Venn

7.7 Máximo e mínimo de um conjunto

Um conjunto tem um valor máximo ou um valor mínimo quando podemos definir um elemento dentro dele tal que nenhum outro elemento no conjunto seja maior ou menor que ele, respectivamente. Assim, dado um conjunto qualquer A, definimos:

Máximo de um conjunto. Dado um elemento $x \in A$, se *não existe* nenhum outro elemento $y \in A$ tal que $x \leq y$, então x é o máximo desse conjunto.

Mínimo de um conjunto. Dado um elemento $x \in A$, se *não existe* nenhum outro elemento $y \in A$ tal que $y \leq x$, então x é o mínimo desse conjunto.

Exemplo 7.7.1. O conjunto $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$, tem 1 como seu mínimo e 10 como seu máximo.

Não necessariamente um conjunto precisa ter máximo e mínimo simultaneamente. Tome, por exemplo o conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$. 1 é o mínimo desse conjunto, mas ele não possui nenhum valor máximo, pois para todo $n \in \mathbb{N}$, $n + 1 > n$. Outro exemplo, o conjunto definido por $B = \{x \in \mathbb{Q} \; |x \leq 0\}$ não tem nenhum valor mínimo.

7.8 Princípio da Boa Ordenação

Um resultado muito impostante que vem do tópico anterior é o fato de que todo conjunto *não vazio* de números naturais possui um elemento mínimo.

Princípio da Boa Ordenação. Todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$, tal que $A \neq \emptyset$, possui um elemento mínimo.

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

1. ● Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 7, 8\}$ e $C = \{1, 2, 8\}$, encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A \cap (B \cup C)$

   (d) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. ● Para cada caso, dê o conjunto solicitado:

   (a) Se $A = \{2, 3, 5, 7, 9, 12\}$ e $A^c = \{4, 6, 19, 23\}$, então $U = ?$

   (b) Se $A = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$ e $U = \mathbb{Z}$, então $A^c = ?$

3. ● Alguns alunos do nível 2 do POTI foram entrevistados sobre suas preferências de matérias. Obtivemos que:

   - 12 alunos pensam que A seja a melhor matéria.
   - 12 alunos pensam que B seja a melhor matéria.
   - 10 alunos pensam que C seja a melhor matéria.

- 3 alunos pensam que A e C sejam as melhores matérias.
- 4 alunos pensam que B e C sejam as melhores matérias.

Quantos alunos foram entrevistados?

4. ● Mostre todos os elementos do conjunto $A = \{x \mid x \text{ é divisor de } 24\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é divisor de } 36\}$.

5. ● Dados dois conjuntos não vazios, tais que
$$A \cup B = A.$$
O que podemos afirmar sobre B?

6. ● Represente através de diagramas de Venn os seguintes conjuntos e operações:
   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A \setminus B$
   (d) A e B, se $B \subset A$
   (e) A, A^c e U
   (f) $(A \cup B)^c$
   (g) $A^c \cap B^c$
   (h) $(A \cap B)^c$
   (i) $A^c \cup B^c$

7. ● Se $B \subset A$, $|A| = 22$ e $|B| = 7$, quantas possibilidades existem de conjuntos B?

8. ● Mostre que $A \cup A^c = U$ e $A \cap A^c = \emptyset$.

9. ● Utilize os conjuntos que você obteve no exercício 4 e interprete o que $mmc(24, 36)$ e $mdc(24, 36)$ faz com os conjuntos A e B. Represente através de diagramas de Venn.

10. ● Responda com base nas informações passadas em cada alínea:

    (a) Se $A = \{2, 3, 5, 7\}$, quanto é $|A|$?
    (b) Se $A = \emptyset$, quanto é $|A|$?
    (c) Se $A = \{\emptyset\}$, quanto é $|A|$?
    (d) Se $B \subset A$, o que se pode dizer de $|B|$ em relação à $|A|$?
    (e) Se $C = A \cap B$, o que se pode dizer de $|C|$ em relação à $|A|$ e $|B|$?
    (f) Se $C = A \cup B$, o que se pode dizer de $|C|$ em relação à $|A|$ e $|B|$?
    (g) Se $C = A \setminus B$, o que se pode dizer de $|C|$ em relação à $|A|$ e $|B|$?
    (h) Se $|U| = 20$ e $|A| = 7$, quanto é $|A^c|$?

11. ● Se $B \subset A$, $|A| = n$ e $|B| = k$, quantas possibilidades existem de conjuntos B?

12. ● Utilizando os diagramas de Venn construídos no Exercício 6, mostre que são válidas as seguintes identidades, conhecidas como Leis de De Morgan:

    (a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    (b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

13. ● Note que, na questão 1, os itens c e d formam conjuntos iguais. Prove que:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Aula 8

Princípio da Casa dos Pombos

Proposição 1. Se distribuirmos $n + 1$ pombos em n gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, dois pombos.

A proposição enunciada acima é conhecida como o **princípio da casa dos pombos (PCP)**.

Apesar de sua simplicidade, ela admite consequências surpreendentes, conforme veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 8.0.1. O princípio da casa dos pombos garante que:

- Em um grupo de 13 pessoas, pelo menos duas delas nasceram no mesmo mês.
- Em um grupo de 5 cartas de baralho, pelo menos duas são do mesmo naipe.
- Em um grupo de 30 pessoas, pelo menos duas delas terão nomes com a mesma inicial.
- Em um grupo de 200 pessoas, pelo menos duas delas terão a mesma idade.

Exemplo 8.0.2. Uma caixa contém bolas de duas cores: branca e preta. Qual o menor número de bolas que precisam ser retiradas da caixa, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?

Solução:

Podemos retirar três bolas da caixa. Se não tivesse mais de uma bola de cada cor, só poderiam ter duas bolas. Isto é óbvio e contradiz o fato de que retiramos três bolas. Aqui as bolas fazem o papel dos pombos e as cores (preto e branco) fazem o papel das gaiolas. □

É claro que podemos também quantificar melhor a ideia do princípio da casa dos pombos:

Proposição 2. (Princípio Geral da Casa dos Pombos). Se distribuirmos $nk + 1$ ou mais pombos em n gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, $k + 1$ pombos.

Vejamos outro exemplo.

Exemplo 8.0.3. Prove que, em qualquer grupo de vinte pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana.

Solução:

Tome como gaiolas os sete dias da semana e como pombos as vinte pessoas. A regra para pôr um pombo em uma gaiola é o dia em que a pessoa nasceu. Estamos colocando 20 "pombos" (pessoas) em 7 "gaiolas" (dias da semana). Como $20 = 7 \cdot 2 + 6$, podemos usar o Princípio Geral da Casa dos Pombos para $n = 7$, $k = 2$. Assim, obtemos que alguma "gaiola" deve conter pelo menos 3 pessoas. □

Veja agora exemplos de problemas que requerem um pouco mais de criatividade para resolver.

Exemplo 8.0.4. Em uma festa há n pessoas. Mostre que, nessa festa, podemos achar duas pessoas que conhecem, na festa, uma mesma quantidade de pessoas. Considere que a relação de conhecer alguém é simétrica.

Solução:

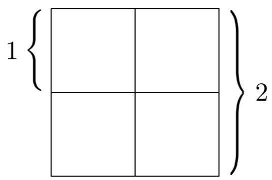
Em primeiro lugar, qualquer uma das n pessoas conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ pessoas da festa. Há dois casos a considerar:

Caso 1: Cada pessoa conhece pelo menos uma outra na festa. Tome $n-1$ salas, numeradas de 1 a $n-1$ e coloque na sala i a(s) pessoa(s) (se houver alguma) que conhece(m) exatamente i outras. Como temos $n-1$ salas e n pessoas, o princípio da casa dos pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, 2 pessoas. Essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas.

Caso 2: Existe pelo menos uma pessoa que não conhece nenhuma outra na festa. Então, ninguém conhece todas as outras pessoas na festa, de modo que podemos numerar $n-1$ salas de 0 a $n-2$ e raciocinar como no Caso 1. Novamente, o princípio da casa dos pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, duas pessoas. Também como antes, essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas. □

Exemplo 8.0.5. Marcamos, aleatoriamente, cinco pontos no interior de um quadrado de lado 2. Mostre que é sempre possível acharmos dois desses pontos tais que a distância entre eles seja menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Solução:



Divida o quadrado em quatro quadradinhos menores como na figura ao lado.

Como temos cinco pontos e quatro quadradinhos, o princípio da casa dos pombos garante que teremos pelo menos dois pontos no mesmo quadradinho. Agora note que a maior distância entre dois pontos do mesmo quadradinho não supera a medida de sua diagonal. Como a diagonal de um quadrado de lado 1 mede $\sqrt{2}$, o resultado segue de imediato. □

Agora é sua vez de colocar a mão na massa! Lembre-se sempre de **organizar as informações** oferecidas pelos problemas.

Problemas Propostos

1. ● Uma caixa contém bolas de cinco cores: branca, preta, amarela, vermelha e azul. Qual o menor número de bolas que precisam ser retiradas da caixa, sem olhar, de modo que possamos garantir que duas das bolas retiradas sejam da mesma cor?

2. ● Uma floresta tem um milhão de pinheiros. Sabe-se que nenhum pinheiro tem mais de 600.000 espinhos. Mostre que pelo menos dois dos pinheiros na floresta têm que ter o mesmo número de espinhos.

3. ● Uma prova de concurso possui 10 questões de múltipla escolha, com cinco alternativas cada. Qual é o menor número de candidatos para o qual podemos garantir que pelo menos dois deles deram exatamente as mesmas respostas para todas as questões?

4. ● Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. Determine o menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor.

5. ● Vinte e cinco engradados de maçãs foram entregues em uma loja. As maçãs são de três tipos diferentes, mas todas as maçãs em cada engradado são do mesmo tipo. Mostre que pelo menos nove dos engradados contém o mesmo tipo de maçãs.

6. ● Dados doze inteiros, mostre que é possível escolher dois deles de modo que sua diferença seja divisível por 11.

7. ● O plano é totalmente pintado usando duas cores. Mostre que podemos encontrar dois pontos de mesma cor que distam exatamente um metro.

8. ● Quinze meninos juntaram 100 nozes. Mostre que dois deles juntaram o mesmo número de nozes.

9. ● Mostre que existem duas potências de dois distintas que diferem por um múltiplo de 2020.

10. ● Diversos times de futebol jogam em um torneio onde cada time tem que jogar com todos os outros exatamente uma vez. Mostre que, em qualquer instante do torneio, dois times terão jogado, até este instante, o mesmo número de jogos.

11. ● Cinquenta e um pontos estão espalhados dentro de um quadrado com 1 metro de lado. Mostre que algum conjunto contendo três desses pontos pode ser coberto por um quadrado com 20 centímetros de lado.

12. ● Seja o conjunto $A = \{1, 2, \cdots, 19, 20\}$. Qual é a maior quantidade de números do conjunto A que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?

13. ● Dado um conjunto de 10 inteiros positivos, de 2 algarismos cada, mostre que é sempre possível obtermos dois subconjuntos disjuntos e não vazios cuja soma dos elementos é a mesma.

14. ● Prove que, dados 52 inteiros arbitrários, é sempre possível encontrar dois deles tais que a diferença de seus quadrados é divisível por 100.

15. ● Em um reticulado quadrado infinito são escolhidos cinco pontos do reticulado. Mostre que o ponto médio de um dos segmentos que une dois desses pontos também é um ponto do reticulado.

16. ● Dezenove flechas são arremessadas sobre um alvo com formato de um hexágono regular de lado 1. Mostre que duas

destas flechas estão a uma distância de no máximo $\frac{\sqrt{3}}{3}$ uma da outra.

17. ● Mostre que todo natural n tem um múltiplo cuja representação decimal contém somente os algarismos 0 e 1.

18. ● Mostre que de qualquer conjunto de dez inteiros podemos escolher um subconjunto cuja soma é um múltiplo de 10.

19. ● Mostre que existe uma potência de três que termina com os algarismos 001 (em notação decimal).

20. ● Um cubo de lado 1 contém 2019 abelhas. Mostre que existem três delas dentro de uma esfera de raio $\frac{1}{11}$.

Dicas para os Problemas Propostos

1. Revise o Exemplo 8.0.2.

2. Os pombos são os pinheiros. As gaiolas são os possíveis números de espinhos de um pinheiro.

3. De quantas maneiras diferentes é possível responder esta prova, marcando todas as dez respostas? Agora aplique o PCP.

4. Mostre que para 37 bolas existe um contraexemplo. O que acontece se retirarmos 38 bolas?

5. Tome como gaiolas os 3 tipos de maçãs e como pombos os 25 engradados.

6. Os pombos são os doze números. As gaiolas são os restos da divisão por 11.

7. Imagine um triângulo equilátero de lado igual a um metro.

8. Suponha, por absurdo, que cada um deles juntou um número diferente de nozes. O que você pode concluir?

9. Os pombos são 2021 potências de dois distintas arbitrárias. As gaiolas são os restos da divisão por 2020.

10. Revise o Exemplo 8.0.4.

11. Divida o quadrado em 25 quadrados menores com 20 centímetros de lado.

12. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{3, 6, 12\}$, $C = \{5, 10, 20\}$, $D = \{7, 14\}$, $E = \{9, 18\}$ e $F = \{11, 13, 15, 17, 19\}$. Quais elementos de cada conjunto podemos tomar?

13. O conjunto tem $2^{10} - 1 = 1023$ subconjuntos não vazios. Por outro lado, a soma dos elementos do conjunto é, no máximo, $90 + 91 + \cdots + 99 = 945$. O que podemos concluir?

14. Perceba que, quando dividido por 100, um quadrado perfeito pode ter apenas 51 restos possíveis, pois os números x^2 e $(100-x)^2$ têm o mesmo resto.

15. Considere a paridade das coordenadas dos pontos. Temos quatro possibilidades: (ímpar, ímpar); (ímpar, par); (par, ímpar); (par par).

16. Divida o hexágono em seis triângulos equiláteros e cada triângulo equilátero em três quadriláteros traçando a perpendicular a partir de seu centro a cada um dos lados.

17. Os pombos são os $n + 1$ números $1, 11, 111, \cdots, 11\cdots1$ (este último com $n+1$ algarismos 1), enquanto as casas são os restos da divisão de um inteiro por n (os números $0, 1, \cdots, n-1$).

18. Se $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ são os dez inteiros, considere as somas $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $\cdots$, $S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$. Se uma dessas somas for múltiplo de 10, encontramos a solução. Caso contrário, tome os dez inteiros como pombos e os restos da divisão por 10 (distintos de zero) como gaiolas.

19. Mostre que existem duas potências de três 3^m e 3^n (onde $m > n$) tal que $3^m - 3^n$ é divisível por 1000, e conclua que 1000 divide $3^{m-n} - 1$.

20. Divida o cubo em 1000 cubos menores de lado $\frac{1}{10}$. Qual é o raio da esfera circunscrita em um destes cubos menores?

Referências Bibliográficas

Aula 1

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. HOLANDA, B. *Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.

Aula 2

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. HOLANDA, B. *Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.

3. MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

Aula 3

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. HOLANDA, B. *Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.

3. MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

Aula 4

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. HAZZAN, S. *Fundamentos de Matemática Elementar 5*: combinatória, probabilidade. São Paulo, SP: Atual, 2004.

3. HOLANDA, B. *Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.

4. MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1991.

Aula 6

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. HOLANDA, B. *Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.

Aula 8

1. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro, RJ: IMPA, 2012.

2. HOLANDA, B. *Curso de Combinatória – Nível 2, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.

3. MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de Matemática Elementar: combinatória.* 2a ed. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 2016.

4. SHINE, C. *Curso de Combinatória – Nível 3, Polos Olímpicos de Treinamento.* Disponível na Internet.