Geometria
POTI/TOPMAT UFPR
Nível 1

3ª edição

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Coordenadores:	Fernanda de Oliveira de Jesus Leonardo Knelsen Mahmut Telles Cansiz
Site:	http://poti.ufpr.br/
E-mail:	poti@ufpr.br
Capa:	Luciana Laroca
Impressão:	Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de produzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinco e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024
Departamento de Matemática - UFPR
Janeiro de 2024

Sumário

Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo "eu já sei, já estudei isso". Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

Equipe POTI/TOPMAT
Nível 1
2024

Aula 1

Fundamentos da Geometria

Vamos conhecer um pouquinho da história de como surgiu a Geometria antes de entrarmos nos seus conceitos. Muitas áreas da Matemática surgiram da necessidade que povos antigos sentiam ao se depararem com problemas que ainda não sabiam solucionar. Se voltarmos um pouco na história, mais especificamente para o século III a.C., descobriremos que os primeiros conceitos de geometria, e a própria nomenclatura, surgiram no Egito. Esse ramo da Matemática começou a ser explorado por esse povo com o objetivo de aperfeiçoar seus métodos de agricultura. Por isso, se procurarmos a origem da palavra geometria descobriremos que ela significa "medir a terra" (geo = terra, metria = medida).

Depois dessa breve história, precisamos definir algumas palavras que aparecem com frequência na Matemática. Você já ouviu falar em **axiomas/postulados** e **teoremas**? Os **postulados** são ideias que não possuem prova ou demonstração, mas que são aceitas como verdadeiras, pois se fazem necessárias para outras construções matemáticas. Já os **teoremas** são ideias que podemos provar (ou demonstrar) a partir de cálculos e até mesmo de postulados. A última palavra que devemos definir é **notação**, que é a maneira com que iremos expressar conceitos matemáticos de forma breve.

Os **Objetos Geométricos** serão nossas "ferramentas" para entendermos conteúdos futuros. Alguns deles são chamados de conceitos geométricos primitivos e, assim como os postulados, não possuem definição. Exemplos de objetos geométricos primitivos são os pontos, as retas e os planos, como vamos estudar a seguir.

1.1 Conceitos Geométricos Primitivos

1.1.1 Ponto

Ponto é o único objeto geométrico que não possui tamanho. Podemos utilizá-lo para indicar a posição de algo. A sua representação mais comum é por uma bolinha com sua respectiva notação.

Notação 1.1. Sempre vamos denotar um ponto por uma letra maiúscula do alfabeto.

Exemplo de Notação:

A figura a seguir mostra quatro pontos distintos: P, O, T e I.

Você já ouvi falar em pontos colineares? Iremos aprender o seu conceito logo após a próxima explicação.

1.1.2 Reta

Reta é uma linha, com infinitos pontos, que se estende infinitamente sem sofrer desvios. Toda reta possui uma **direção** e dois

sentidos opostos. A sua forma de representação é uma linha sem desvios e com seta nas pontas.

Direção: é a posição que a reta se encontra, podendo ser vertical, inclinada ou horizontal.

Sentido: é para onde a reta se estende, sendo indicado pelas setas nas pontas da reta.

Notação 1.2. Se a reta passa por dois pontos conhecidos utilizaremos seus respectivos nomes com uma flecha de ponta dupla. Caso a reta não passe por nenhum ponto conhecido utilizaremos uma letra minúscula do alfabeto.

Exemplos de Notação:

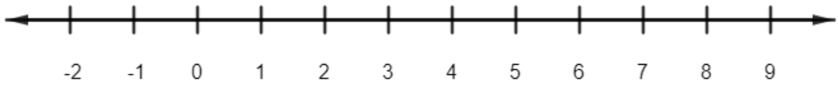
- Se a reta passa pelos pontos P e O, poderemos chamá-la de $\overleftrightarrow{PO}$. Se a mesma reta passa pelos ponto T e I, poderemos chamá-la também de $\overleftrightarrow{TI}$;
- Sem pontos conhecidos, utilizamos letras minúsculas do alfabeto: r, s, t, ...

Na figura a seguir temos uma reta, cujo nome é r, e como ela passa pelos pontos P e O, então $r = \overleftrightarrow{PO}$. Em que sua direção é horizontal e os sentidos são esquerda e direita.

Agora que já sabemos o que são pontos e retas, podemos aprender um novo conceito: os **pontos colineares**. Eles são pontos que pertencem a uma mesma reta, como na figura a seguir.

Reta Numérica

A reta numérica é uma reta onde os números são marcados e organizados. Isso é feito para que nenhum número seja usado duas vezes ou que nenhum ponto da reta represente dois números. Observe um exemplo na imagem a seguir.

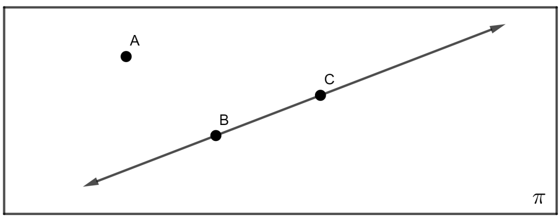


1.1.3 Plano

Plano é uma superfície lisa que possui infinitas retas e se estende infinitamente sem haver distorções.

Notação 1.3. Vamos denotar por letra minúscula grega π (pronuncia-se "pi").

A imagem a seguir mostra um ponto A e uma reta $\overleftrightarrow{BC}$ num plano π , representado por um retângulo.



É importante destacar que o plano **não** é retangular, a reta **não** é uma linha e o ponto **não** é uma bolinha. Apesar de utilizarmos essas representações e palavras, elas servem apenas para deixar tudo um pouco menos abstrato.

Entendendo isso, podemos apresentar os objetos que possuem definição, como: semirreta, segmento e ponto médio.

1.2 Objetos Geométricos com Definição

1.2.1 Semirreta

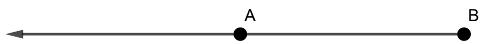
Definição 1.1. Dados dois pontos distintos, A e B, pertencentes a uma reta r. A semirreta será uma parte da reta que tem origem em A, passa por B e segue ao infinito.

Notação 1.4. Se a semirreta começa em A e passa por B, chamaremos a semirreta de $\overrightarrow{AB}$.

A semirreta é uma porção parcialmente limitada de uma reta, pois possui começo, mas não fim. Vamos analisar as imagens abaixo para entender melhor a sua definição. Inicialmente, vemos a representação da reta r:

Por sua vez, a semirreta que começa em **A** e passa por **B** será:

E a semirreta que começa em **B** e passa por **A** será:



Notemos que, apesar das semirretas possuírem mesma direção (horizontal), o sentido de $\overrightarrow{AB}$ é para direita, enquanto que de $\overrightarrow{BA}$ é para esquerda. Como os sentidos são opostos, temos que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

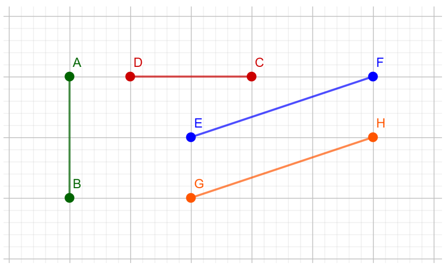
1.2.2 Segmento

Definição 1.2. Um segmento é o menor caminho que liga dois pontos distintos.

Você sabia que todo segmento pertence a uma reta? A reta é uma linha infinita, que não possui começo e nem fim e, consequentemente, não possui tamanho. Por isso, quando queremos nos referir a um pedaço da reta com tamanho especifico, estaremos falando de segmentos. Um segmento é um pedaço limitado da reta, que possui começo e fim, ou seja, apresenta comprimento mensurável. Para definirmos essa medida, utilizamos um valor acompanhado de uma **unidade de medida** (u.m.).

Notação 1.5. Se o segmento possui **A** e **B** como extremidades, o chamaremos de segmento $\overline{AB}$. Com tudo, segmentos não possuem sentido, apenas direção, então também podemos chamá-lo de $\overline{BA}$. Ao se tratar da medida do segmento $\overline{AB}$, utilizaremos apenas AB ou uma letra minúscula do alfabeto.

Observe a figura a seguir.



Note que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ possuem mesma medida, assim como os segmentos $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, mas, em ambos os casos, os segmentos são distintos. Isso significa que:

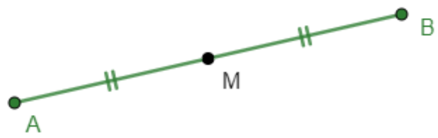
$$AB = DC, \quad \text{mas} \quad \overline{AB} \neq \overline{DC}$$

$$EF = GH, \quad \text{mas} \quad \overline{EF} \neq \overline{GH}$$

1.2.3 Ponto Médio

Definição 1.3. Dado M um ponto pertencente ao segmento $\overline{AB}$. M será ponto médio se dividir $\overline{AB}$ em duas partes iguais.

Por exemplo, dado $AB = 4\ cm$ e um ponto M pertencente a ele, como mostra a imagem a seguir.



Os dois tracinhos pequenos em $\overline{AM}$ e em $\overline{MB}$ indicam que o tamanho dos segmentos é o mesmo. Portanto, M será ponto médio de $\overline{AB}$, se $\overline{AM} = \overline{MB} = 2\ cm$. Segue disso que:

$$\star\ \ \overline{AM} + \overline{MB} = \overline{AB} \qquad \star\ \ \overline{AM} = \overline{MB}$$

É importante destacar que as duas condições anteriores devem ser atendidas **simultaneamente**.

1.3 Ângulo

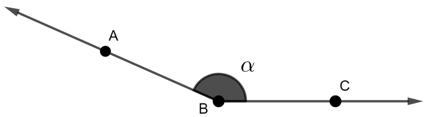
Definição 1.4. Ângulo é a região interna formada pela união de duas semirretas distintas com mesma origem.

Notação 1.6. Se as semirretas distintas são $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, denotaremos o ângulo entre elas por $\angle ABC$, ou $A\hat{B}C$, ou ainda $\hat{B}$. Podemos também nomeá-lo com uma letra grega.

Para medirmos os ângulos utilizaremos valores numéricos maiores ou iguais a zero e a unidade de medida "graus". Um ângulo de quarenta e cinco graus, por exemplo, será escrito como 45°. Em relação a sua nomenclatura, utilizaremos letras gregas, veja a tabela com algumas delas:

Símbolo	**Nome**	**Símbolo**	**Nome**
α	Alfa	β	Beta
γ	Gama	δ	Delta

A união das semirretas que formam o ângulo, é chamada de vértice do ângulo. A seguir temos um ângulo α formado pela união das semirretas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$ no vértice B:



Também podemos formar ângulos a partir de segmentos e retas, basta existir um ponto em comum entre essas linhas para formarmos um vértice. A figura abaixo apresenta as nomenclaturas dadas a ângulos de acordo com o seu valor.

Nome do ângulo	**Valor do ângulo**
Agudo	Menor que 90°
Reto	Igual a 90°
Obtuso	Maior que 90°
Raso	Igual a 180°

Como observamos, a união de semirretas com mesma origem nos proporciona o conhecimento de ângulos e suas medidas. Por esse e outros motivos, o estudo das posições relativas entre retas, semirretas e segmentos é muito importante. Quando manipulamos esses objetos de modo conveniente, nos deparamos com conceitos muito importantes para a geometria. Por isso, estudaremos, agora, a posição relativa entre essas linhas.

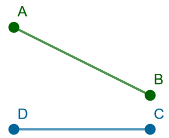
1.4 Posição Relativa entre Linhas

1.4.1 Caso de Paralelismo

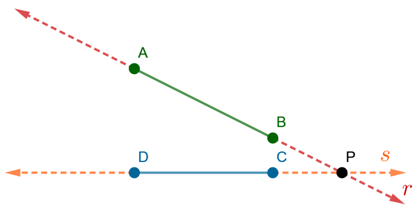
Definição 1.5. Duas retas são ditas paralelas se elas nunca se encontram. Em outras palavras, se não possuem nenhum ponto em comum.

Notação 1.7. Se r e s são paralelas, então $r||s$.

Essa definição se aplica apenas para as retas, pois podemos ter segmentos que não se encontram mesmo não sendo paralelos. Então para falarmos que dois segmentos são paralelos, eles devem pertencer a retas que são paralelas. Para entender melhor essa ideia, considere os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$:



Vamos traçar as retas r e s que passam pelos segmentos. Para melhorar a visualização as retas ficarão tracejadas:



Note que as retas se tocaram no ponto P, portanto as retas não são paralelas e, consequentemente, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ não são paralelos.

Alterando a posição dos segmentos, teremos uma nova estrutura:

Traçando as retas, teremos:

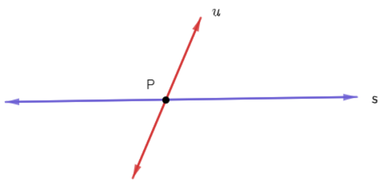
Neste caso as retas são paralelas pois não se tocam e, portanto, os segmentos são paralelos.

1.4.2 Caso de Concorrência

Definição 1.6. Duas retas são ditas concorrentes se elas se encontram em apenas um ponto. Em outras palavras, possuem apenas um ponto em comum.

Notação 1.8. Se r e s são concorrentes, então r x s.

Na figura a seguir temos um exemplo de retas concorrentes.



Note que o ponto P é o único ponto em que as duas retas vão se interceptar (encontrar). Por isso, recebe o nome de **ponto de intersecção**.

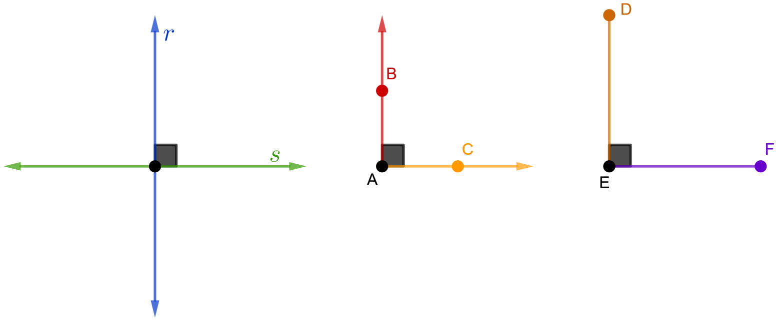
O próximo tópico é um caso especial, por dois motivos. Primeiro, porque ele se enquadra no caso de retas concorrentes e, em segundo lugar, porque todos os ângulos formados são iguais.

1.4.3 Caso de Perpendicularismo

Definição 1.7. Duas linhas são ditas perpendiculares se formarem um ângulo reto entre elas.

Notação 1.9. Se r e s são perpendiculares, então $r \perp s$.

Nas figuras a seguir o ângulo reto (90°) está representado por um quadradinho.



Da esquerda para direita, temos r perpendicular à s, $\overrightarrow{AB}$ perpendicular à $\overrightarrow{AC}$, e $\overline{ED}$ perpendicular à $\overline{EF}$.

Dica: quando duas retas, semirretas ou segmentos são perpendiculares, elas formam a letra L.

Note que no caso das retas perpendiculares todos os ângulos formados serão iguais a 90°.

Exercícios de Fixação

1. Considerando as afirmações a seguir, identifique quais são verdadeiras e corrija as alternativas falsas:

   (a) Ponto médio não significa estar exatamente na metade de um segmento.

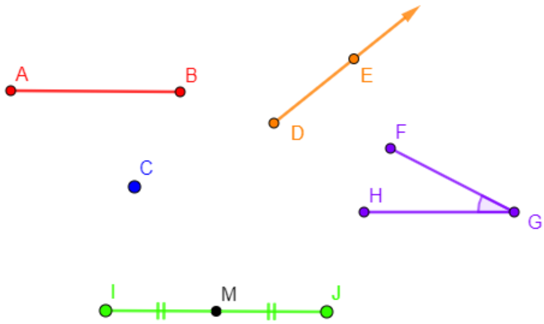
   (b) Um ponto não possui tamanho.

   (c) Ângulo agudo é aquele cujo seu valor é maior que 90°.

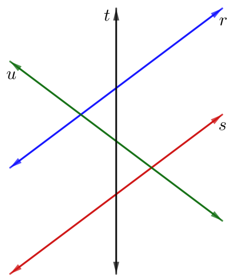
   (d) Duas retas são ditas perpendiculares quando não possuem nenhum ponto em comum.

   (e) Plano é uma superfície ondulada.

2. Identifique na figura a seguir os objetos geométricos, e seus respectivos nomes:



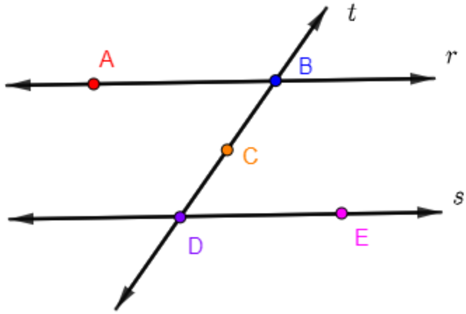
3. Esmeralda construiu quatro retas, r, s, t e u, como na figura abaixo. Dito isso, quais das seguintes retas são paralelas entre si? E quais são concorrentes entre si?



4. Helena ganhou um relógio antigo de seu avô de presente. Ela notou que o ponteiro menor, que indica as horas, estava parado, enquanto que o ponteiro maior, que indica os minutos, estava funcionando.

   Considerando que o ponteiro menor está fixo em 12 e o maior parte de 12, em qual período (hora) os ponteiros formarão ângulo **agudo**, **reto**, **obtuso** e **raso**?

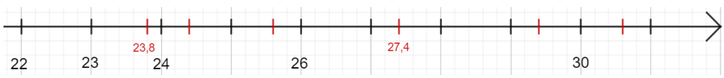
5. Na figura a seguir temos três retas, r, s e t, e quatro pontos A, B, C e D. Com base nela, responda o que se pede:

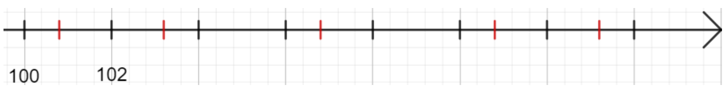


   (a) Quais pontos pertencem a reta r?
   (b) Quais pontos pertencem a reta s?
   (c) Quais pontos pertencem a reta t?
   (d) Qual a posição relativa entre as retas r e s?
   (e) Quais pontos são colineares entre si?

6. Escreva os números correspondentes em cada traço da reta numérica:

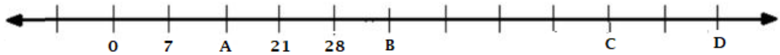
   (a) 

   (b) 

   (c) 

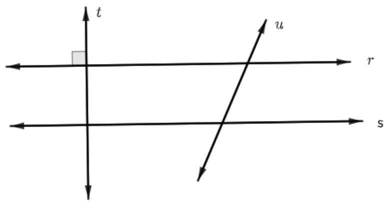
Exercícios Propostos

1. Analise a imagem a seguir e responda ao que se pede:



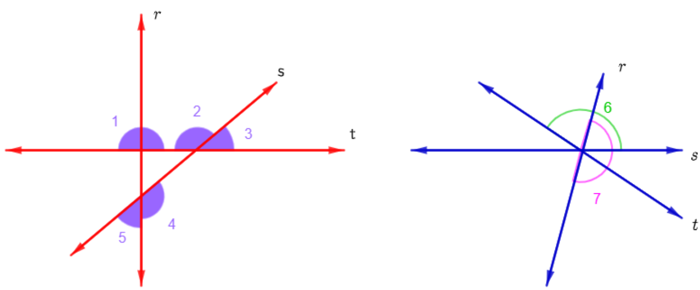
   (a) Qual o nome do objeto representado na figura acima?
   (b) O objeto acima possui direção e sentidos? Se sim, qual(is)?
   (c) Quais são os valores dos pontos A, B, C e D indicados na figura?

2. Identifique a posição relativa das retas, se são paralelas, concorrentes ou perpendiculares.



   (a) r e t; (b) r e s;
   (c) u e s; (d) u e t.

3. A imagem a seguir possui ângulos destacados. Classifique-os entre ângulos retos, obtusos, rasos ou agudos.



4. (OBMEP - 2015 - ADAPTADA) Dados quatro pontos distintos A, B, C e D, todos sobre uma mesma reta, como indica a figura abaixo, determine o número de segmentos distintos que podem ser formados com a extremidade em tais pontos.

5. (OBMEP - 2015) Abaixo estão representados cinco pontos distintos sobre uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses cinco pontos e não contêm o ponto B?

6. Considere uma reta r que passa pelos pontos A e C. Sabendo que o ponto A está a uma distância de 14 u.m. do ponto 0 na reta numérica e o ponto C está a uma distância de 27 u.m. do ponto 0, determine o ponto B na reta r tal que B seja o ponto médio de $\overline{AC}$.

7. Desenhe, com o auxílio de uma régua, em um plano π três segmentos tais que:

   - $\overline{AC}$ = 5 cm, $\overline{BD}$ = 6 cm e $\overline{CD}$ = 4 cm;
   - $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $\overline{AC}$ x $\overline{CD}$ e $\overline{BD}$ x $\overline{CD}$.

8. Juca é um escoteiro que está acampando. Cada dia o chefe do grupo escolhe um dos meninos para buscar frutas, água e madeira, hoje é o dia de Juca. Antes dele sair seu chefe passou as seguintes orientações:

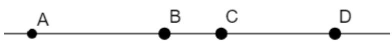
   - Quando você sair da barraca ande 180 m em linha reta até coletar as frutas;

- Em seguida, vire-se para a direita formando um ângulo reto no chão e continue andando em linha reta por mais 150 m até pegar água no rio;
- Por último, vire-se para a esquerda formando um ângulo obtuso no chão e ande 32 m até pegar a madeira;
- Volte para o acampamento, pelo mesmo caminho percorrido, antes das 18h.

Represente o caminho que Juca percorreu por meio de um desenho e calcule a distância total que ele andou.

9. (OBMEP - 2015 - ADAPTADA) Desenhe um segmento de reta com 10 pontos distintos e determine o número de segmentos que podem ser formados com vértices em cada um desses pontos.

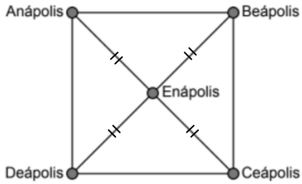
10. (OBMEP - 2010) As quatro cidades A, B, C e D foram construídas à beira de uma rodovia reta, conforme a ilustração.



A distância entre A e C é de 50 km e a distância entre B e D é de 45 km. Além disso, sabe-se que a distância entre a primeira e a última cidade é de 80 km. Qual é a distância, em quilômetros, entre as cidades B e C?

11. (OBMEP - 2010) Cinco tartarugas apostaram uma corrida em linha reta e na chegada a situação foi a seguinte: Sininha estava 10 m atrás de Olguinha e 25 m à frente de Rosinha, que estava 5 m atrás de Elzinha, que estava 25 m atrás de Pulinha. Qual foi a ordem de chegada?

12. (OBMEP - 2014 - ADAPTADA) A doutora Maria Amélia viaja para atender seus pacientes. Em seu primeiro dia de trabalho, ela tem que atender pacientes nas cidades Anápolis, Beápolis, Ceápolis, Deápolis e Enápolis. As cidades são ligadas por estradas, como mostra a figura abaixo.

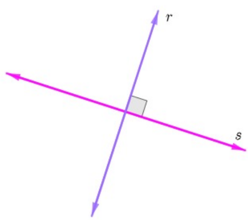


(a) Sabendo que a distância entre Deápolis e Enápolis é 52 km, calcule a distância entre Anápolis e Ceápolis.

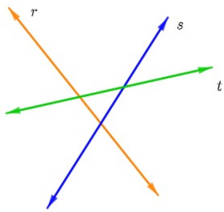
(b) Em um dia, a doutora Maria Amélia sai de Anápolis e vai até Ceápolis atender um paciente. Depois, volta para Enápolis atender mais dois pacientes e então segue para Beápolis. Quantos km ela percorreu ao total nesse dia?

13. Faça o que se pede em cada item.

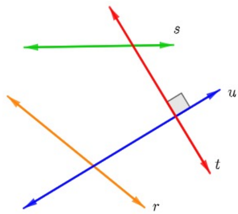
(a) Desenhe uma reta t que seja concorrente às retas r e s ao mesmo tempo.



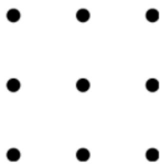
(b) Desenhe uma reta u que seja paralela à reta r e concorrente às retas s e t ao mesmo tempo.



(c) Desenhe uma reta v perpendicular à reta u, paralela à reta t e concorrente às retas r e s ao mesmo tempo.



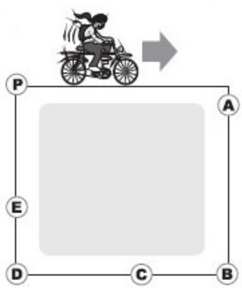
14. (OBMEP - 2013) Nove pontos são desenhados em uma folha de papel, como mostrados na seguinte figura:



(a) De quantas maneiras é possível escolher três pontos colineares?

(b) De quantas maneiras é possível escolher quatro pontos de modo que três deles sejam colineares?

15. (OBMEP - 2007 - ADAPTADA) Sueli resolveu dar uma volta em torno de uma praça quadrada. Ela partiu do vértice P, no sentido indicado pela flecha e caiu ao atingir $\frac{3}{5}$ do percurso total. Qual ponto indica o lugar em que Sueli caiu?



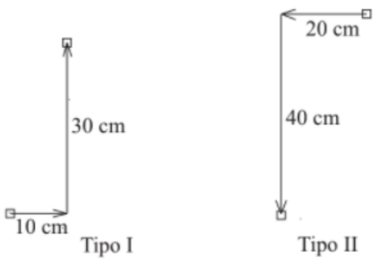
16. (OBMEP - 2015) Sejam quatro pontos A, B, M e C dispostos sobre uma mesma reta, nessa ordem. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ é o dobro de $\overline{BM}$ e $\overline{MC} = 30\ cm$, determine os comprimentos de $\overline{AB}$ e $\overline{BM}$.

17. (OBMEP - 2010 - ADAPTADA) Cururu é um sapo estranho, que se desloca apenas com dois tipos de saltos:

    Tipo I: 10 cm para o Leste e 30 cm para o Norte;

    Tipo II: 20 cm para Oeste e 40 cm para o Sul.

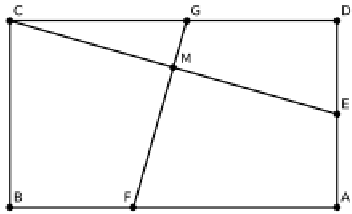
    Como mostra a figura.



   (a) Como Cururu faz para chegar a um ponto situado a 70 cm para o Leste e 230 cm para o Norte de sua casa?

   (b) É possível Cururu chegar a um ponto situado a 180 cm para o Oeste e 340 cm para o Sul de sua casa?

18. (OBMEP - 2015) Na figura abaixo, $ABCD$ é um retângulo e E é o ponto médio de AD. O segmento FG passa pelo ponto médio M de CE. Determine a razão entre os comprimentos de $\overline{GM}$ e $\overline{MF}$.



19. (OBM - 2017) Vemos, nas figuras 1 e 2 a seguir, exemplos de bloqueio de tela de um telefone celular que só funciona com uma senha que não é digitada, mas desenhada com segmentos de reta. Esses segmentos formam uma linha poligonal com vértices em um reticulado. Ao desenhar o padrão correspondente à senha, o dedo deve permanecer todo o tempo tocando a tela. Toda a linha poligonal corresponde a uma sequência de algarismos e essa sequência é que é, de fato, a senha. O traçado das poligonais obedece às regras a seguir:

    i. O traçado começa por um dos pontos destacados, os quais correspondem aos algarismos de 1 a 9 (figura 3).

    ii. Cada segmento do padrão deve ter como um dos seus extremos (aquele em que terminamos de traçar o segmento) um ponto que ainda não foi usado.

    iii. Se um segmento liga dois pontos e contem um terceiro (o seu ponto médio), então o algarismo correspondente à esse terceiro ponto é incluído na senha. Isso não acontece quando esse ponto/algarismo já foi usado.

    iv. Toda senha tem pelo menos quatro algarismos.

figura 1 figura 2 figura 3

Assim, toda linha poligonal é associada a uma sequência de quatro ou mais algarismos, os quais aparecem na senha na mesma ordem em que são visitados. Na figura 1 acima, por exemplo, a senha é 218369, caso o primeiro ponto visitado tenha sido o 2. Note que o segmento ligando os pontos associados aos algarismos 3 e 9 inclui o ponto associado ao algarismo 6. Se o primeiro ponto visitado fosse o 9, então a senha seria 963812. Se o primeiro ponto visitado fosse o 6, então a senha seria 693812. Note que o 6 seria pulado, já que não poderia repetir.

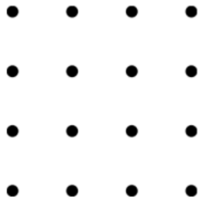
(a) Por que a linha na figura 2 corresponde a uma única senha? Qual é essa senha?

(b) Quantas senhas diferentes de quatro algarismos possuem dois segmentos colineares (segmentos que estão na mesma reta)?

20. (OBMEP - 2014) O grande pintor Kandinskemílio desenhou os seguintes pontos no papel.

(a) Sem levantar o lápis do papel, desenhe quatro linhas retas que passem por todos os nove pontos da figura desenhada por Kandinskemílio.

(b) Sem levantar o lápis do papel, desenhe seis linhas retas que passem por todos os dezesseis pontos da figura abaixo.



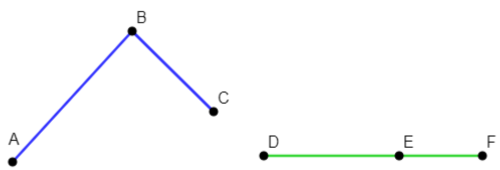
Aula 2

Geometria Plana

2.1 Segmentos Consecutivos

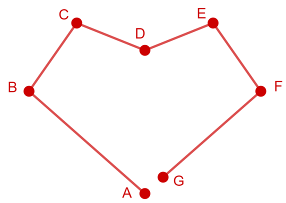
Definição 2.1. Dois segmentos são ditos consecutivos se a extremidade de um deles também é a extremidade do outro, ou seja, são segmentos distintos que possuem uma extremidade em comum.

Veja um exemplo a seguir.



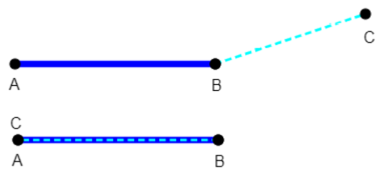
Na primeira imagem, na esquerda, temos dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Observe que estes segmentos possuem o ponto B em comum, e, portanto são segmentos consecutivos. Na segunda imagem, na direita, também temos segmentos consecutivos, pois a extremidade do segmento $\overline{DE}$ é também extremidade do segmento $\overline{EF}$.

Na figura a seguir temos seis segmentos consecutivos, ou seja, podemos unir mais do que apenas dois segmentos.

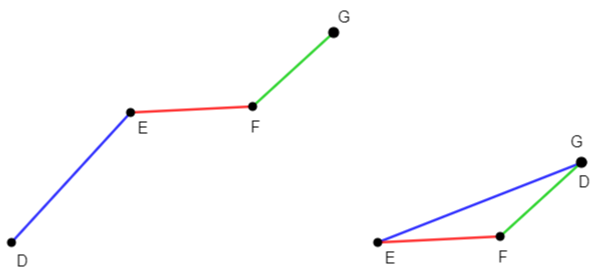


Note que $\overline{AB}$ é consecutivo com $\overline{BC}$, que é consecutivo com $\overline{CD}$, que é consecutivo com $\overline{DE}$, que é consecutivo com $\overline{EF}$, que, por fim, é consecutivo com $\overline{FG}$.

E se juntarmos o ponto de origem de um segmento com o ponto final de outro segmento? Vamos observar o que acontece nas próximas figuras.



Note que quando juntamos a origem do segmento $\overline{AB}$ com o final do segmento $\overline{BC}$, ou seja, unimos o ponto A com o ponto C, obtemos o mesmo segmento. E se fossem três segmentos?



Quando juntamos o ponto D com o ponto G, fechamos uma figura geométrica, que nesse caso é um triângulo.

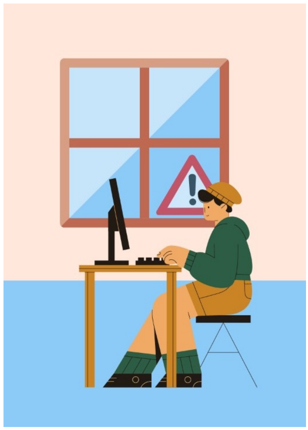
Atenção!

Para formamos figuras só podemos unir as extremidades de segmentos consecutivos que **não** são **colineares**, pois quando unimos dois ou mais segmentos colineares teremos apenas um pedaço de uma reta.

A ideia do que são segmentos consecutivos nos ajuda a entendermos o que são figuras geométricas planas.

2.2 Figuras Geométricas Planas

Uma figura (ou forma) geométrica plana é uma superfície, que recebe esse nome por ser um "pedaço" do plano. Vejamos, a seguir, sua definição.



Definição 2.2. Dada a união de três ou mais segmentos de reta não colineares obtemos uma forma geométrica em que o ponto de origem de um segmento coincide com o ponto final de outro segmento.

Encontramos figuras geométricas em todo lugar. Um exemplo disso são objetos do cotidiano, como uma mesa com formato **retangular**, uma janela com contorno **quadrado** ou uma placa **triangular** na rua, como na imagem ao lado. Agora, vamos caracterizar os conceitos relacionados a essas figuras.

Toda figura possui lados (ou arestas), vértices e ângulos.

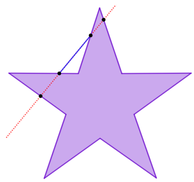
- **Lados:** são os segmentos de reta da figura;
- **Vértice:** é o ponto de intersecção de dois lados;
- **Ângulo:** é união de dois lados consecutivos.

2.2.1 Figuras Côncavas e Convexas

As figuras planas podem ser classificadas em Côncavas ou Convexas, vejamos as suas definições a seguir.

Definição 2.3. Dada uma figura plana com quatro ou mais lados, ela será côncava quando uma reta interceptá-la em mais de dois pontos.

Uma forma de identificar se uma figura plana é côncava é quando traçamos um segmento de reta que não pertence à região limitada pelos lados da figura, ou seja, quando uma parte da reta fica para fora da figura. Um exemplo de figura côncava é a estrela, como podemos observar na imagem ao lado.



Definição 2.4. Dada uma figura plana com quatro ou mais lados, ela será convexa quando uma reta interceptá-la em no máximo dois pontos.

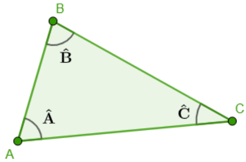
Podemos identificar que uma figura é convexa quando o segmento de reta traçado pertence somente ao espaço limitado pelos lados da figura. Por exemplo, uma barra de chocolate é uma figura convexa, pois, como podemos ver na imagem ao lado, o segmento está completamente dentro da barra. E,também, podemos escolher quaisquer outros dois pontos dentro desse espaço que sempre irá acontecer a mesma coisa.

Vamos começar aplicando esses conceitos com a forma geométrica que tem a menor quantidade de lados: o **Triângulo**.

2.2.2 Triângulo

É uma figura geométrica que possui apenas três lados, três vértices e três ângulos. Os ângulos no interior (dentro) da figura chamamos de **ângulos internos** e trabalharemos com eles mais adiante.

Agora, veja um exemplo de triângulo na imagem abaixo.



Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ são os lados do triângulo. Note que eles são unidos pelos pontos A, B e C, que são os vértices, formando os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Agora, vamos à sua notação.

Notação 2.1. Sejam A, B e C vértices do triângulo, podemos chamá-lo de ΔABC ou ABC.

Observe que todo triângulo sempre será uma figura convexa, pois a união de quaisquer dois pontos sempre estará dentro do espaço delimitado pelos seus lados.

Lembra que conversamos sobre teoremas na aula anterior? Então, a partir de agora iremos trabalhar com alguns deles. Você sabia que existe um teorema muito importante sobre os triângulos? Ele diz que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo, sempre, é igual a 180°. Então, usando a figura anterior de exemplo, temos

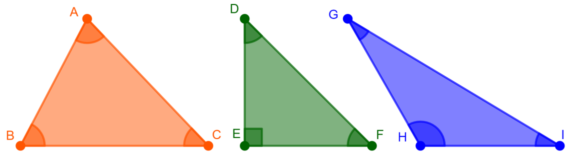
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Classificação de Triângulos

Podemos classificar os triângulos de dois jeitos diferentes: a partir dos seus **ângulos internos** e a partir dos seus **lados**. A tabela a seguir apresenta a nomenclatura dos triângulos de acordo com os **ângulos internos**.

Nome do Triângulo	**Valor do Ângulo Interno**
Acutângulo	Todos menores que 90°
Retângulo	Um igual a 90°
Obtusângulo	Um maior que 90°

Veja um exemplo para cada caso:



Da esquerda para a direita, temos um triângulo acutângulo (ΔABC), retângulo (ΔDEF) e obtusângulo (ΔGHI).

Você observou que para as duas últimas classificações bastou que apenas um dos ângulos atendesse o valor? Você sabe o por quê disso? A seguir, vamos entender o que acontece.

- **Triângulo Retângulo:** Imagine que temos um triângulo com dois ângulos internos iguais a 90°. Se aplicarmos o teorema que acabamos de ver, o terceiro ângulo precisaria medir 0°, o que não é possível acontecer em figuras geométricas.

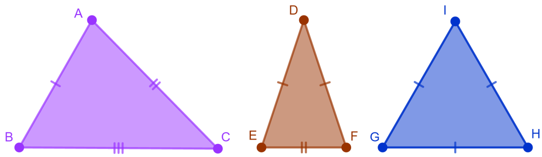
- **Triângulo Obtusângulo:** Considere, agora, um triângulo com dois ângulos internos obtusos, medindo 100°. Somando as duas medidas, obtemos 200°, o que contradiz o teorema.

E é por isso que triângulos retângulos e obtusângulos possuem dois ângulos agudos.

A outra classificação é dada a partir dos **lados**, como representada na tabela abaixo.

Nome do Triângulo	**Característica**
Escaleno	Todos os lados têm medidas diferentes
Isósceles	Dois lados possuem a mesma medida
Equilátero	Todos os lados têm a mesma medida

A imagem a seguir mostrará um exemplo para cada caso. Lembrando que os tracinhos indicam que os segmentos tem o mesmo tamanho, ou seja, neste caso os lados com a mesma quantidade de tracinhos possuem o mesmo tamanho.



Da esquerda para a direita temos um triângulo escaleno (ΔABC), com $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$; um triângulo isósceles (ΔDEF), com $\overline{DE} = \overline{DF} \neq \overline{EF}$; e um triângulo equilátero (ΔIGH), com $\overline{IG} = \overline{GH} = \overline{HI}$.

Exercício Resolvido 2.1. Seja ABC um triângulo tal que $\hat{A} = 37^\circ$, $\hat{B} = 59^\circ$. Calcule o valor do ângulo C e classifique este triângulo.

Solução. Para calcularmos o terceiro ângulo desse triângulo, leia o lembrete do nosso amigo triângulo, a seguir.

Então, temos que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Agora, substituindo os valores dados.

$$37^\circ + 59^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

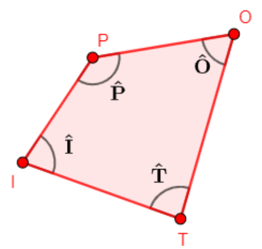
$$96^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

Note que o valor que está faltando para a soma resultar em 180° é 84°. Portanto, o ângulo $\hat{C} = 84^\circ$ e, então, ABC é um triângulo acutângulo, pois todos os ângulos são menores do que 90°. $\square$

Se continuarmos com a contagem de segmentos, ao juntarmos quatro lados, obtemos os **Quadriláteros**.

2.2.3 Quadriláteros

São figuras geométricas que possuem quatro lados, quatro vértices e quatro ângulos. Veja um exemplo de quadrilátero na próxima imagem.

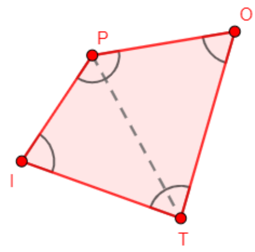


Os segmentos $\overline{PO}$, $\overline{OT}$, $\overline{TI}$ e $\overline{IP}$ são os lados do quadrilátero. Note que eles são unidos pelos pontos P, O, T e I, que são os vértices, formando os ângulos $\hat{P}$, $\hat{O}$, $\hat{T}$ e $\hat{I}$. Agora, vamos à notação.

Notação 2.2. Para nomearmos um quadrilátero, basta escrevermos seus vértices em sequência.

Por exemplo, o nome da figura acima é POTI.

Observe na figura ao lado que a linha tracejada em cinza liga os vértices P e T, ela é chamada de **diagonal** e veremos sua definição a seguir.



Definição 2.5. A diagonal é o segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos da figura.

O segmento $\overline{OI}$ também é diagonal do quadrilátero POTI. Com isso, podemos perceber que todo quadrilátero pode ser dividido em 2 triângulos. Você pode estar se perguntando o que isso tem a ver? Bom, se sabemos isso podemos entender o que acontece com a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

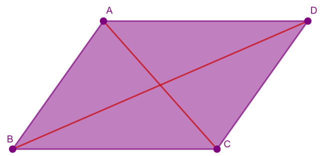
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e que um quadrilátero pode ser dividido em dois triângulos, então a **soma dos ângulos internos de um quadrilátero** é igual a 360°.

Agora que já vimos algumas características dos quadriláteros, podemos classificá-los de acordo com os seus elementos. Eles serão classificados em paralelogramo, retângulo, quadrado e trapézio. O primeiro que estudaremos será o **paralelogramo**.

Paralelogramo

Definição 2.6. É o quadrilátero que possui dois pares de lados opostos paralelos.

Lados opostos são os pares de lados que ficam "um de frente para o outro", ou seja, que são contrários. Na figura a seguir, temos um paralelogramo em que:



- $\overline{AB}$ é o lado oposto à $\overline{CD}$;
- $\overline{BC}$ é o lado oposto à $\overline{DA}$.

Portanto, $\overline{AB} || \overline{CD}$ e $\overline{BC} || \overline{DA}$.

O mesmo conceito de opostos vale para ângulos e vértices também. Então, $\hat{A}$ é oposto à $\hat{C}$, assim como B é oposto à D.

Por conta dessas construções e da definição de quadriláteros, sabemos que as afirmações a seguir são verdadeiras.

- ⋆ Lados e ângulos opostos possuem mesma medida.
- ⋆ As diagonais se cruzam em um único ponto, o qual é o ponto médio para as diagonais.

Retângulo

Definição 2.7. É o quadrilátero que possui todos ângulos internos com mesma medida.

A figura abaixo é um exemplo de retângulo:

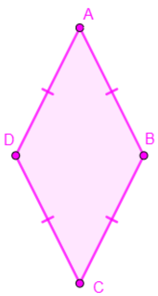
Note que todos os ângulos medem 90°, e, note ainda que os lados opostos do retângulo $ABCD$ são paralelos. Isso significa que todo retângulo é um caso especial de paralelogramo, e portanto, possuem as mesmas características.

Os lados dos retângulos são nomeados de acordo com o seu tamanho, sendo:

Base: o maior lado do retângulo;
Altura: o menor lado do retângulo.

Losango

Definição 2.8. É o quadrilátero que possui todos os lados com mesma medida.



A imagem ao lado é um exemplo de losango.

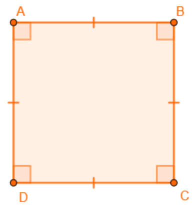
Como o losango $ABCD$ possui dois pares de lados opostos paralelos, então ele é um caso específico de paralelogramo. Ou seja, todo losango é um paralelogramo. Porém, nem todo paralelogramo é losango.

O losango tem uma característica única! Suas diagonais sempre serão perpendiculares entre si, ou seja, formam um ângulo reto. (Lembre-se: ângulo reto mede 90°)

Quadrado

Definição 2.9. É o quadrilátero que possui os quatro ângulos e os quatro lados com mesma medida.

A figura abaixo é um exemplo de quadrado.



De acordo com o que estudamos anteriormente, as afirmações a seguir são verdadeiras.

- ⋆ Todo quadrado é um paralelogramo, pois possui dois pares de lados opostos paralelos;
- ⋆ Todo quadrado é um losango, pois possui todos os lados com mesma medida;
- ⋆ Todo quadrado é um retângulo, pois possui os quatro ângulos de mesma medida.

Trapézio

Definição 2.10. É o quadrilátero que possui apenas dois lados opostos paralelos.

A figura abaixo é um exemplo de trapézio.

Note que no trapézio $ABCD$ temos os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ paralelos. Esses dois segmentos são chamados de **bases** do trapézio. As bases podem ser classificadas em **maior** e **menor**, de acordo com a sua medida.

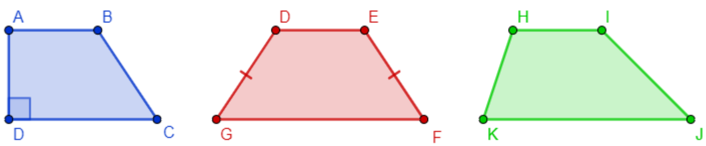
Assim como os triângulos, os trapézios podem ser classificados de acordo com os seus lados.

- ⋆ **Trapézio escaleno:** é aquele cujos quatro lados têm medidas diferentes;

- ⋆ **Trapézio isósceles:** é aquele cujos lados não paralelos são congruentes, ou seja, possuem a mesma medida, enquanto as bases possuem medidas diferentes;

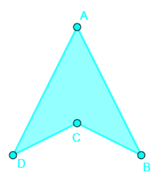
- ⋆ **Trapézio retângulo:** é aquele cujo um dos lados não paralelos forma um ângulo reto com as bases.

A seguir temos figuras ilustrando cada um dos exemplos.



Da esquerda para a direita temos que $ABCD$ é um trapézio retângulo, $EFGH$ é um trapézio isósceles e $IJKL$ é um trapézio escaleno.

Você percebeu que todas as figuras que apresentamos até agora foram figuras convexas? Será que é possível termos um quadrilátero côncavo? Sim!! Vejamos um exemplo na figura ao lado.



Então, lembre-se: Nem todo quadrilátero é uma figura convexa!

E, depois dos quadriláteros temos mais formas geométricas? Temos sim, mas iremos apenas apresentar sua nomenclatura na tabela abaixo.

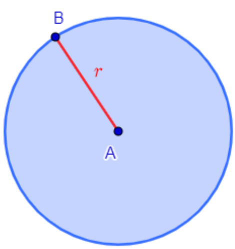
Nome	N° de Lados
Pentágono	5
Hexágono	6
Heptágono	7
Octógono	8
Eneágono	9
Decágono	10
Undecágono	11
Dodecágono	12

Nome	N° de Lados
Tridecágono	13
Tetradecágono	14
Pentadecágono	15
Hexadecágono	16
Heptadecágono	17
Octodecágono	18
Eneadecágono	19
Icoságono	20

Você consegue pensar em alguma forma geométrica que não tem lados? Esta figura é o **círculo** e iremos estuda-lá em seguida.

2.2.4 Círculo

Definição 2.11. Seja A um ponto do plano e r um número real positivo. O círculo de centro A e raio r é o conjunto constituído por todos os pontos B do plano tais que $\overline{AB} = r$.



A figura ao lado é um exemplo de círculo.

O raio do círculo, denotado pela letra r minúscula, é o segmento destacado, em vermelho na imagem. É importante ressaltar que o ponto B não é um ponto fixo, ele foi escolhido apenas para ilustração, mas poderia ter sido escolhido em qualquer lugar do círculo.

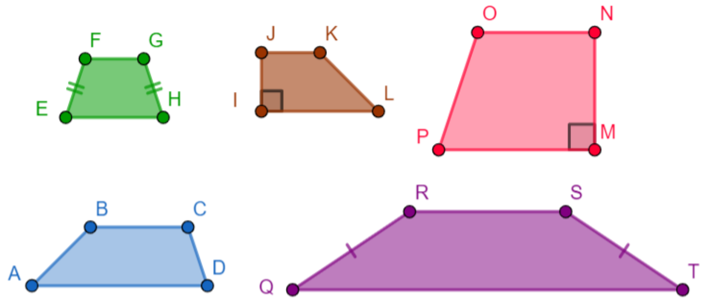
O círculo tem uma característica muito interessante. Se unirmos dois de seus raios, obtemos o seu **diâmetro**, que denotaremos pela letra **d** minúscula. Ou seja, o diâmetro é igual a 2 vezes o tamanho do raio, e isso vale para todos os círculos.

Exercícios de Fixação

1. Sabendo que o triângulo retângulo ABC a seguir tem o ângulo $\hat{A} = 57^\circ$, calcule o valor do ângulo $\hat{C}$.

2. Considere um círculo de diâmetro, d = 27. Calcule o valor do raio, **r**, desse círculo.

3. As imagens abaixo são trapézios. Classifique-os de acordo com seus lados.



4. Descreva, com suas próprias palavras:

   (a) Qual a diferença entre um retângulo e um quadrado?

   (b) Qual a definição de um losango?

   (c) Apresente uma definição de paralelogramo.

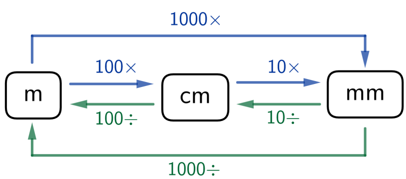
Para medirmos a altura, o comprimento, as bases e as diagonais das figuras planas, nós precisamos utilizar as unidades de medidas. Já começamos a ver algumas informações sobre elas na aula anterior. Agora vamos conhecê-las mais a fundo.

2.2.5 Unidades de Medidas

Existem diversas maneiras de se medir comprimentos. Um dos sistemas de medição mais utilizados é o Sistema Métrico Decimal. Esse sistema é composto por unidades como milímetro (mm), centímetro (cm) e metro (m) que se relacionam proporcionalmente entre si como apresentado a seguir.

- $1\ m = 100\ cm = 1000\ mm$
- $\dfrac{1}{100}\ m = 1\ cm = 10mm$
- $\dfrac{1}{1000}\ m = \dfrac{1}{10}\ cm = 1\ mm$

Saber dessas relações é extremamente importante, pois **não podemos** realizar operação com valores que apresentam unidades de medidas distintas. Quando nos deparamos com esse tipo de situação, devemos converter os valores apresentados inicialmente buscando padronizar nossas informações. A tabela a seguir foi construída para facilitar esse processo.



As flechas apresentadas partem da unidade inicial para a unidade a qual deseja-se converter. Note que as flechas azuis acompanham um número com a operação de multiplicação, enquanto que as flechas verdes acompanham a divisão. Por exemplo, para convertermos 7 metros em centímetros, temos que achar na tabela a flecha que sai de "m" e chega em "cm". Essa flecha possui a multiplicação por 100, então:

$$7 \cdot 100 = 700.$$

E portanto a conversão será:

$$7\ m = 700\ cm.$$

Exemplo: Para fixarmos melhor essas relações, vamos praticar realizando as operações a seguir e convertendo seus resultados em m, cm e mm.

a) $3\ cm + 1,55\ m$

Solução. Precisamos deixar todas as medidas na unidade desejada para podermos calcular. Utilizando a tabela de conversão, conseguimos converter 3 centímetros em metros ao dividir 3 por 100, logo:

$$3 : 100 = 0,03$$
$$\Rightarrow 3\ cm = 0,03\ m$$

Agora podemos calcular a expressão:

$$0,03\ m + 1,55\ m = 1,58\ m$$

Para obtermos a resposta em centímetros, basta converter o resultado anterior. Consultando a tabela, teremos que multiplicar 1,58 por 100:

$$1,58 \cdot 100 = 158$$
$$\Rightarrow 1,58\ m = 158\ cm$$

Por fim, para obtermos o resultado em milímetros, basta multiplicarmos 158 por 10:

$$158 \cdot 10 = 1580$$
$$\Rightarrow 158\ cm = 1580\ mm$$

Portanto, o resultado da expressão em m, cm e mm será: $1,58\ m$, $158\ cm$ e $1580\ mm$. □

b) $2,1\ cm + 1\ m - 10\ mm$

Solução. Convertendo as medidas para centímetro, teremos:

$$1\ m = 100\ cm \text{ e } 10\ mm = 1\ cm$$

$$\Rightarrow 2,1\ cm + 100\ cm - 1\ cm = 101,1\ cm$$

De forma análoga a questão anterior, vamos converter o resultado de centímetro para metro e depois milímetro. Teremos então:

$$101,1\ cm = 1,011\ m$$

Pois pela tabela, convertemos a medida de centímetro para metros dividindo por 100. Por outro lado, para converter de centímetro para milímetro, devemos multiplicar a medida por 10. Logo:

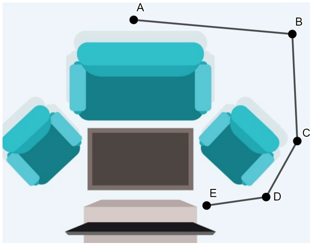
$$101,1\ cm = 1011\ mm$$

Portanto, o resultado da expressão é $1,011\ m$; $101,1\ cm$ e $1011\ mm$. □

Por fim, é necessário ressaltar que, quando o enunciado não explicitar a unidade de medida que estamos utilizando, devemos adicionar a expressão "*u.m.*" ao nosso resultado final.

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 2.2. Considere a seguinte imagem com os segmentos $\overline{AB} = 3\ m$; $\overline{BC} = 2\ m$; $\overline{CD} = 1\ m$; $\overline{DE} = 1\ m$. Calcule a extensão para ir do sofá até a TV.

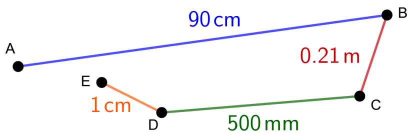


Solução. Quando temos as medidas dos segmentos consecutivos, conseguimos calcular sua extensão. Para calcularmos essa extensão basta somarmos os quatro segmentos:

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} &= 3\ m + 2\ m + 1\ m + 1\ m \\ &= 7\ m\end{aligned}$$

Portanto, a extensão do sofá até a TV é de $7\ m$. □

Exercício Resolvido 2.3. Calcule a extensão da figura a seguir em metro, centímetro e milímetro.



Solução. Vamos começar deixando todas as unidades em centímetros. Para convertermos a medida de $\overline{BC}$, basta multiplicarmos $0,21$ por 100, logo:

$$0,21 \cdot 100 = 21$$

E portanto $0,21\ m = 21\ cm$. Para o segmento $\overline{CD}$, teremos que dividir 500 por 10:

$$500 : 10 = 50$$

Então $500\ mm = 50\ cm$. Calculando a extensão, teremos:

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} &= 90\ cm + 21\ cm + 50\ cm + 1\ cm \\ &= 162\ cm\end{aligned}$$

Portanto, a extensão mede 162 cm. Para obtermos o resultado em milímetros, multiplicaremos 162 por 10:

$$162 \cdot 10 = 1620$$

$$\Rightarrow 162\ cm = 1620\ mm$$

Finalmente, vamos converter 162 cm em metros dividindo 162 por 10:

$$162 : 10 = 16,2$$

$$\Rightarrow 162\ cm = 16,2\ m$$

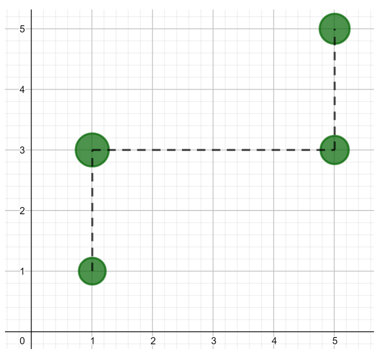
A extensão da figura é, nas unidades exigidas: $16,2\ m$; $162\ cm$ e $1620\ mm$ □

Exercícios de Fixação

1. Dadas as medidas a seguir, transforme suas unidades de medidas para milímetro, centímetro e metro:

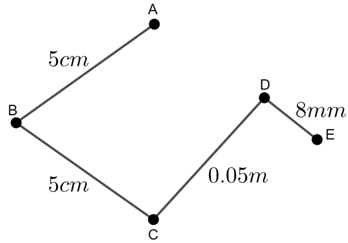
   a) 58,14 cm
   b) 0,19 m
   c) 57 mm + 0,1 m
   d) 87 cm + 1 m + 100,7 mm
   e) 1m - 0,5m + 50cm + 0,3m
   f) 900 mm - 12 cm + 0,09 m

2. Imagine que um sapo pule sempre nas mesmas vitórias-régias de um lago para travessá-lo. Dado o mapa das vitórias-régias a seguir, calcule a trajetória que o sapo faz.



3. Dados os segmentos $\overline{AB} = 3\,cm$, $\overline{BC} = 3,5\,cm$ e $\overline{CD} = 40\,mm$, calcule a extensão da figura formada por eles.

4. Dada a figura a seguir, calcule sua extensão.



Você já ouviu falar em **perímetro**? É o último assunto que iremos estudar nesta aula e é extremamente importante!

2.3 Perímetros

Imagine que vamos cercar um terreno retangular com a menor quantidade de arame possível. Como podemos fazer isso? Se sua intuição disse para somarmos o tamanho de todos os lados para obtermos a quantidade necessária, você está certo. Calcular o contorno de uma figura é equivalente a calcular seu **perímetro**.

Definição 2.12. É a medida do contorno de uma figura traçada num plano e é calculado através da soma dos lados dessa figura.

Para entender esse conceito, iremos aplicá-lo as figuras geométricas que já conhecemos, começando com o retângulo $ABCD$:

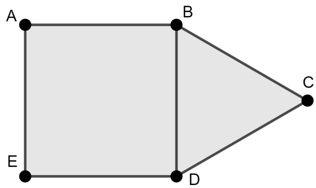
O contorno da nossa figura é dado pela união de seus lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Pela definição que vimos anteriormente, sabemos que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{DA}$. Então, podemos escrever:

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = 2 \cdot \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC}$$

Esse raciocínio deve ser empregado para se calcular o perímetro de quaisquer figuras geométricas planas que possuam lados. Agora, iremos ver a resolução de alguns exercícios que calculam o perímetro de uma figura composta por mais de uma forma geométrica.

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 2.4. Calcule o perímetro da seguinte figura sabendo que $ABDE$ é um quadrado de lado 3 m, e o triângulo BCD é equilátero.



Solução. Para resolvermos esta questão, precisamos notar que todos os segmentos possuem mesma medida. Por definição, quadrados possuem todos os lados iguais. Temos também um triângulo equilátero que compartilha um lado com o quadrado, e portanto:

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB} = 3\ m$$

Portanto, calculamos o perímetro da figura por:

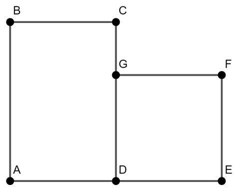
$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{EA} = 5 \cdot \overline{AB}$$

Substituindo pelo seu valor:

$$p = 5 \cdot 3\ m = 15\ m$$

Portanto, o perímetro da figura é igual a 15 m. □

Exercício Resolvido 2.5. Considerando a imagem a seguir, se o $ABCD$ é um retângulo com $\overline{DA} = 4$ cm e $\overline{AB} = 5$ cm, e $DEFG$ é um quadrado com $\overline{DE} = 3$ cm, qual é o perímetro da figura $ABCGFE$?



Solução. O perímetro é o contorno da figura, o qual nesse caso é dado pela soma de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{GF}$, $\overline{FE}$, $\overline{ED}$ e $\overline{DA}$. Para calcularmos essa soma, precisamos descobrir quanto mede o segmento $\overline{CG}$. Note que:

$$\overline{CG} = \overline{CD} - \overline{GD}$$

Substituindo os valores, teremos:

$$\overline{CG} = 5 - 3 = 2\ cm.$$

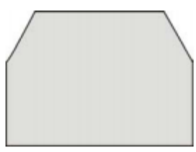
Agora podemos calcular o perímetro da figura:

$$p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} + \overline{GF} + \overline{FE} + \overline{ED} + \overline{DA}$$

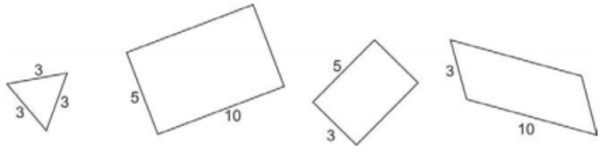
$$p = 5 + 4 + 2 + 3 + 3 + 3 + 4 = 24\ cm$$

Portanto, o perímetro $p = 24\ cm$. □

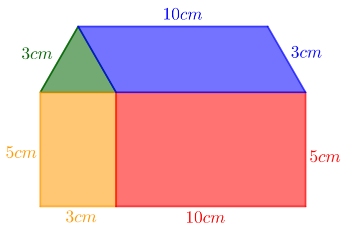
Exercício Resolvido 2.6. (OBM - 2012) Carla recortou o hexágono representado abaixo em quatro partes: um triângulo, dois retângulos e um paralelogramo.



As medidas dessas figuras são dadas em centímetros. Qual é o perímetro deste hexágono?



Solução. Antes de começarmos a resolver, lembre-se que hexágono é uma figura geométrica plana que possui 6 lados, vértices e ângulos. Vamos reconstruí-lo a partir das figuras que foram recortadas, com seus devidos valores em centímetros:



Agora podemos calcular o seu perímetro:

$$p = 3 + 5 + 3 + 10 + 5 + 3 + 10$$

E portanto o perímetro do hexágono é 39 cm. □

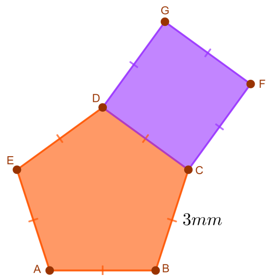
Exercícios de Fixação

1. Seja um campo de futebol de comprimento 100 m e largura 80 m. Em um treino, um jogador percorre quantos metros em:
   (a) 3 voltas?
   (b) 5 voltas?
   (c) Se o jogador percorre 720 m, quantas voltas ele deu na quadra?

2. Sabendo que o perímetro de um triângulo equilátero é 39 cm, qual a medida de cada lado?

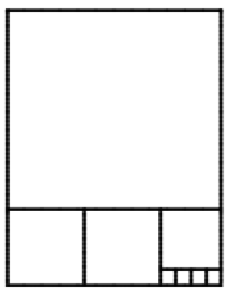
3. Se o perímetro de um quadrado, de lado 15 cm, é o dobro do perímetro de um retângulo com base de 10 cm. Qual é a altura e o perímetro deste retângulo?

4. Qual o perímetro da figura a seguir?



Exercícios Propostos

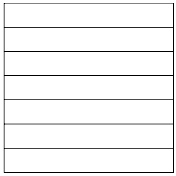
1. (OBMEP - 2008) O retângulo da figura está dividido em 8 quadrados. O menor quadrado tem lado 1 cm e o maior 14 cm.



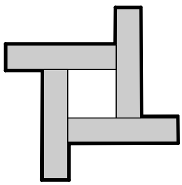
   (a) Determine o lado dos outros quadrados.

   (b) Qual é o perímetro do retângulo?

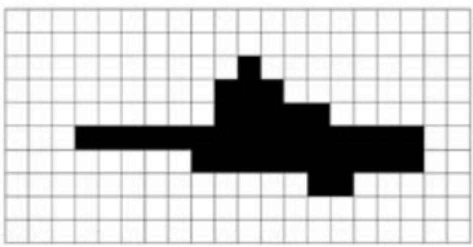
2. Um quadrado é dividido em sete retângulos como na figura abaixo. Se o perímetro de cada um desses retângulos é 32 cm, qual o perímetro do quadrado?



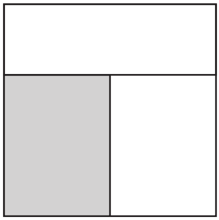
3. (OBMEP - 2014) Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



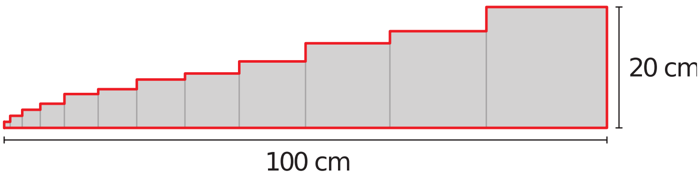
4. (OBMEP - 2010 - ADAPTADA) Quantos quadradinhos foram retirados do tabuleiro de 10×20 quadradinhos da figura? Se o lado de cada quadradinho mede 1 cm, qual é o perímetro do "buraco"?



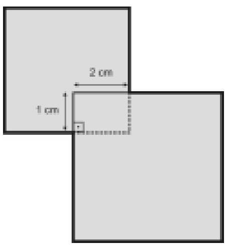
5. (OBMEP - 2009) A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo sombreado?



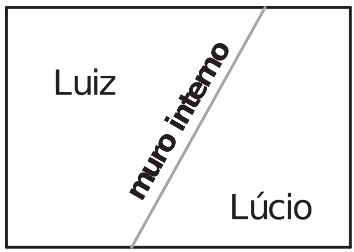
6. (OBMEP - 2017) Vários quadrados foram dispostos um ao lado do outro em ordem crescente de tamanho, formando uma figura com 100 cm de base. O lado do maior quadrado mede 20 cm. Qual é o perímetro (medida do contorno em vermelho) da figura formada por esses quadrados?



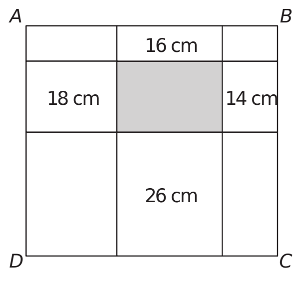
7. (OBM - 2010) O desenho mostra dois quadrados de papel sobrepostos, um de lado 5 cm e outro de lado 6 cm. Qual é o perímetro da figura formada (linha grossa no contorno do desenho), em centímetros?



8. (OBMEP - 2014) Os irmãos Luiz e Lúcio compraram um terreno cercado por um muro de 340 m. Eles construíram um muro interno para dividir o terreno em duas partes. A parte de Luiz ficou cercada por um muro de 260 m e a de Lúcio, por um muro de 240 m. Qual é o comprimento do muro interno?



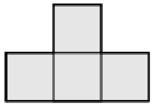
9. (OBMEP - 2016) O retângulo $ABCD$ foi dividido em nove retângulos menores, alguns deles com seus perímetros indicados na figura. O perímetro do retângulo $ABCD$ é 54 cm. Qual é o perímetro do retângulo cinza?



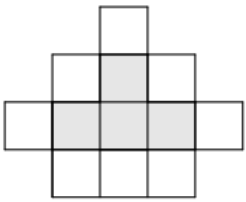
10. (OBM - 2013) Jurema tem 12 peças retangulares de plástico de 3 cm por 4 cm. Ela junta essas peças fazendo coincidir seus lados iguais e monta retângulos maiores, um de cada vez. Um desses retângulos tem o maior perímetro possível. Qual é esse perímetro, em centímetros?

11. (OBMEP - 2017) João possui um brinquedo com peças planas e quadradas de lado 1 m. Ele pode unir duas peças através de

um lado. A figura abaixo mostra um exemplo de configuração que João construiu com 4 quadrados.



Perceba que o perímetro da figura é formado por 10 segmentos unitários. Depois de construir uma configuração, ele gosta de construir uma nova apenas acrescentando um quadrado a todos os encaixes da figura inicial formando assim uma nova camada de quadra- dos. Por exemplo, a partir da figura anterior, ele poderia acrescentar uma camada obtendo a próxima figura.



Note que os 8 quadrados acrescentados usam em suas conexões todos os 10 segmentos do perímetro anterior e não é possível acrescentar um novo quadrado encaixando apenas na figura original.

(a) Começando com um quadrado 1×1, calcule o perímetro da configuração que João irá obter ao acrescentar duas camadas consecutivas.

(b) Começando com um quadrado 1×1, calcule o perímetro da configuração que João irá obter após o décimo acréscimo sucessivo de camadas.

12. (OBMEP - 2010) Marcelo cortou um quadrado de 6 cm de lado em duas partes iguais, como na figura 1. O corte foi feito

em formato de escada, com segmentos de 1 *cm* paralelos ao lado do quadrado.

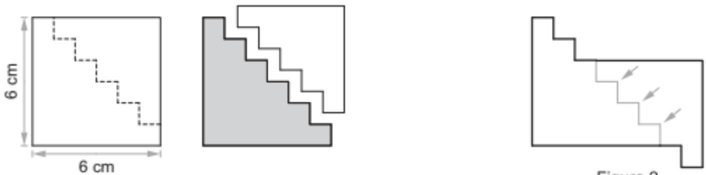


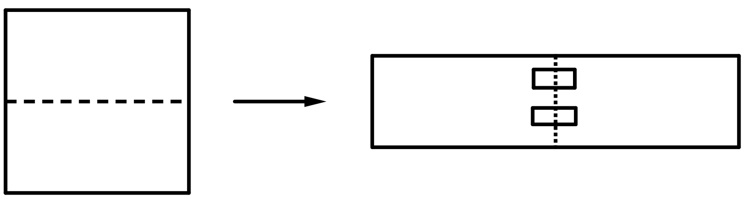
Figura 1 Figura 2

(a) Calcule o perímetro da parte cinza da figura 1.

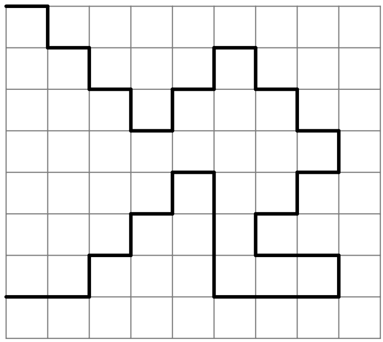
(b) A figura 2 foi montada por Marcelo encaixando completamente 3 degraus (indicados com as flechas) de uma das partes na outra parte. Calcule o perímetro dessa figura.

(c) Marcelo cortou da mesma maneira um quadrado de 87 *cm* de lado e montou uma figura encaixando 39 degraus de uma das partes na outra. Calcule o perímetro dessa nova figura.

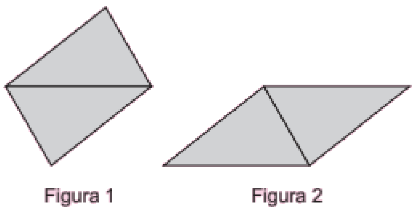
13. (OBM - 2014) Janaína cortou uma folha quadrada ao meio e colou com adesivos as duas metades, fazendo coincidir seus lados menores, obtendo uma folha retangular. Qual é a razão entre o perímetro do quadrado original e o perímetro do retângulo?



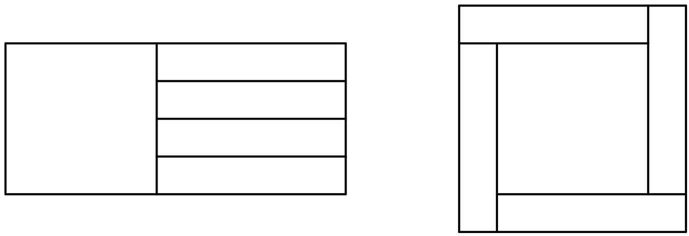
14. (OBM - 2012) Juliana cortou a folha quadriculada, representada abaixo, ao longo da linha mais grossa. Ela obteve dois pedaços com diferentes perímetros. Qual é a diferença entre esses perímetros?



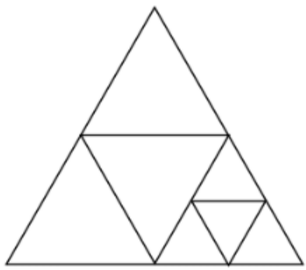
15. (OBMEP - 2015) Ana tem quatro cartões triangulares iguais, cujos lados,em centímetros, medem a, b e c, sendo a, b e c números naturais distintos. Se Ana unir dois dos cartões juntando seus lados maiores, formará um quadrilátero com perímetro de 26 cm, como na Figura 1. Entretanto, se ela unir os outros dois cartões juntando seus lados menores, formará um quadrilátero com perímetro de 30 cm, como na Figura 2. Qual é o perímetro de cada cartão triangular?



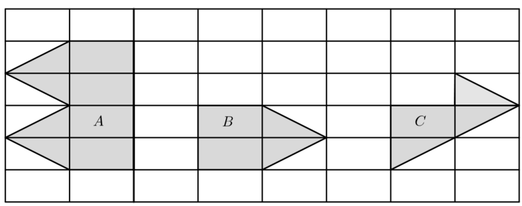
16. Manoela tem cinco pedaços de papel: um quadrado e quatro retângulos iguais. Utilizando os cinco pedaços ela primeiro monta um retângulo de perímetro 780 cm e, em seguida, desmonta o retângulo e usa os cinco pedaços para montar um quadrado conforme mostrado na figura. Qual é o perímetro deste quadrado?



17. (OBM - 2000) Um triângulo equilátero pode ser recortado em triângulos equiláteros menores. A figura abaixo mostra como recortá-lo em sete triângulos equiláteros. Mostre como recortar um triângulo equilátero em vinte triângulos equiláteros menores.



18. (OBMEP - 2015) No desenho abaixo, três prédios foram construídos em um terreno dividido em lotes retangulares. Os perímetros dos prédios A e B valem 400 m e 240 m, respectivamente. Quanto mede o perímetro do prédio C?



19. (OBMEP - 2011) Márcia cortou uma tira retangular de 2 cm

de largura de cada um dos quatro lados de uma folha de papel medindo 12 cm por 20 cm. Qual é o perímetro do pedaço de papel que sobrou?

20. (OBMEP - 2015) João deseja construir um circuito para o seu trem de brinquedo usando trilhos no formato de segmentos de reta de comprimento fixo. Na interseção de dois trilhos, ele precisa colocar uma estação de trem. É possível João construir um circuito fechado com exatamente 10 estações, de forma que cada trilho possua exatamente 4 delas?

Aula 3

Áreas

3.1 Área

Imagine que você e sua família estão de mudança para uma casa nova e maior. Você sempre teve vontade de pintar as paredes do seu quarto com a sua cor preferida. Depois de conversar com os seus pais, eles deixaram que você decidisse a cor do seu quarto. Então, vocês foram para a loja comprar a tinta. Para isso, vocês precisam pensar na quantidade necessária para cada parede. A maioria dos quartos possuem uma parede maior que a outra, então, é intuitivo esperarmos que a parede maior demandará mais tinta do que a menor. Isso acontece porque sua superfície é maior.

No contexto geométrico, podemos relacionar a ideia de superfície com a de **área** de uma figura geométrica plana. Isso significa que para medirmos o tamanho da superfície (ou região) de algo, precisamos calcular sua área.

Definição 3.1. Área é a medida de uma superfície.

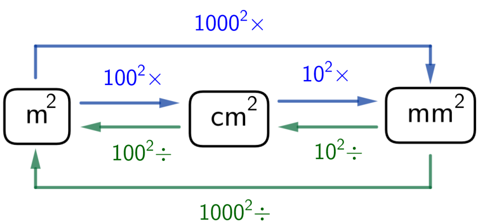
Indicaremos a área por uma letra maiúscula do alfabeto ou pelos vértices da figura dentro de colchetes. A área de um retângulo $ABCD$, por exemplo, poderá ser chamada de A ou $[ABCD]$.

Assim como aprendemos a utilizar unidade de medida para os segmentos, vamos aprender as **unidades de áreas** para medirmos a área das figuras.

3.1.1 Unidade de Área

Nas unidades de medida, trabalhamos com o metro (m), o centímetro (cm) e o milimetro (mm). Agora, vamos estudar as medidas que utilizaremos com mais frequência nas unidades de área. São essas o metro quadrado (m^2), o centímetro quadrado (cm^2) e o milímetro quadrado (mm^2).

Não podemos realizar operações com unidades de áreas distintas. Por isso, utilizaremos uma tabela de conversão:



A diferença entre essa tabela e a que vimos nas unidades de medida são os valores que estão elevados ao quadrado. A ideia de conversão se mantém a mesma, as flechas partem da unidade inicial para a desejada, com a operação que deve ser realizada.

Exercício Resolvido 3.1. Escolha uma unidade de área para resolver as seguintes expressões:

a) $0{,}5\ \text{m}^2 + 1{,}5\ \text{cm}^2 + 100\ \text{mm}^2$

Solução. Vamos deixar todas as unidades em centímetro quadrado. Utilizando a tabela de conversão, conseguimos converter $0{,}5\ \text{m}^2$ em cm^2 multiplicando $0{,}5$ por 100^2:

$$0,5 \cdot 100^2 = 5000$$
$$\Rightarrow 0,5 \text{ m}^2 = 5000 \text{ cm}^2$$

Para converter 100 mm^2 em cm^2, dividiremos 100 por 10^2:

$$100 : 10^2 = 1$$
$$\Rightarrow 100 \text{ mm}^2 = 1 \text{ cm}^2$$

A expressão será calculada por:

$$5000 \text{ cm}^2 + 1,5 \text{ cm}^2 + 1 \text{ cm}^2 = 5002,5 \text{ cm}^2$$

□

b) 2 m^2 - 10 cm^2

Solução. Vamos deixar todas as unidades em metro quadrado. Utilizando a tabela de conversão, conseguimos converter 10 cm^2 em m^2 dividindo 10 por 100^2:

$$10 : 100^2 = 0,001$$
$$\Rightarrow 10 \text{ cm}^2 = 0,001 \text{ m}^2$$

Agora podemos calcular a expressão:

$$2 \text{ m}^2 - 0,001 \text{ m}^2 = 1,999 \text{ m}^2$$

□

Resolva os próximos itens:

d) 60 mm^2 - 15 mm^2 + 0,001 cm^2

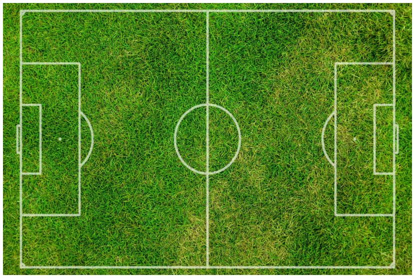
e) 10000 cm^2 - 1 m^2 + 0,7 mm^2

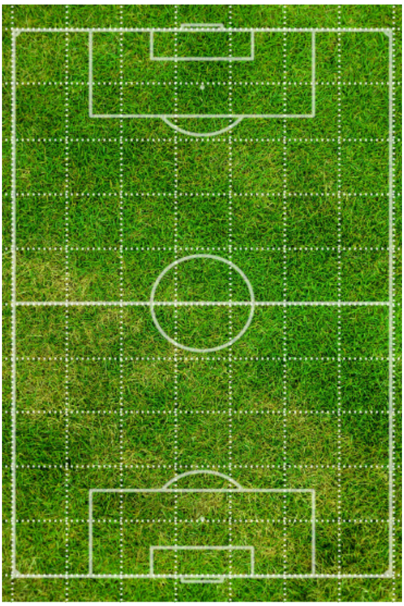
f) 0,07 m^2 + 10 cm^2 + 100000 mm^2

Devemos lembrar que a resposta final **sempre** deve ser acompanhada da unidade de área correspondente. Caso a questão não especifique, utilizaremos "u.a" (unidade de área).

Agora, vamos aprender a como calcular as áreas das figuras geométricas que já vimos na última aula.

Um exemplo comum de retângulo é um campo de futebol. Imagine que você faz parte de um time que quer trocar toda a grama do campo, e você ficou encarregado de calcular a área total e passar o resultado para o vendedor. Para isso, você precisa calcular a medida da superfície, ou seja, calcular a medida do campo.





Agora, imagine que foi passada uma malha quadriculada por todo esse campo, como na imagem ao lado. Uma forma intuitiva para calcularmos essa área é contando todos os quadradinhos. Após contar tudo, você conclui que a área desse campo de futebol é igual a 70 quadradinhos de 10 $m \times 10$ m, ou seja, a área desse campo é igual a 7000 m^2.

Você demorou muito tempo para contar todos os quadradinhos. Se perdeu várias vezes e teve que recomeçar a contagem, mas fez o seu trabalho. Depois disso, você foi conversar com o seu amigo e contou toda essa história. Ele olhou assustado para você e disse "Você contou todos os quadradinhos do campo de futebol?". Você respondeu que sim e perguntou o porquê do espanto dele. Então, ele pegou um papel e uma caneta para te explicar outra forma de calcular essa área.

Ele desenhou um retângulo com o lado maior igual a 100 m e o lado menor com 70 m, de acordo com o que você contou a ele. Em seguida, ele te mostrou que ao multiplicar a base desse retângulo pela altura obteve a mesma medida que você, sem precisar contar todos os quadrinhos.

$$100\ m \cdot 70\ m = 100 \cdot 70\ m^2 = 7000\ m^2$$

Vamos formalizar esta ideia!

3.1.2 Área do Retângulo

Na imagem a seguir temos um retângulo $ABCD$ com a altura em azul e a base em vermelho.

Para calcularmos sua área, vamos, primeiro, chamar a base de b e a altura de h. E, então, sua área será dada por:

$$A = b \cdot h$$

Agora que você já sabe como calcular a área de um retângulo, veremos, em seguida, como se calcula a área de um quadrado.

3.1.3 Área do Quadrado

Quando a altura e a base do retângulo possuem a mesma medida, temos o caso especial de o quadrilátero ser o quadrado. Portanto, se considerarmos a área do retângulo como:

$$A = b \cdot h$$

e o quadrado sendo um quadrilátero em que $base(b) = altura(h) = lado(l)$, então temos:

$$A = l \cdot l$$

E, portanto, a área A do quadrado será dada por:

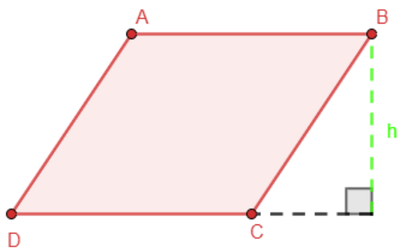
$$A = l^2$$

Uma forma comum de representar a área do quadrado é $A_{\square}$.

Já vimos dois dos 5 quadriláteros regulares que estudamos na última aula. Agora, vamos ver o cálculo da área de um trapézio.

3.1.4 Área do Paralelogramo

A área do paralelogramo, assim como a do retângulo, pode ser calculada multiplicando a base b pela altura h. Vejamos as possíveis representações de paralelogramos.

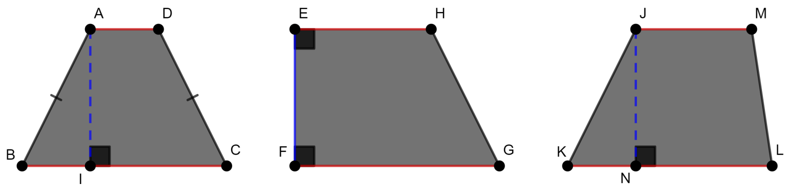


Note que a altura não é igual a nenhum dos lados, como no retângulo ou no quadrado. A altura sempre será o segmento de reta que começa em um vértice e vai até a base oposta a esse vértice, formando um ângulo perpendicular e está representada em verde na figura anterior. A base desse paralelogramo será o segmento $\overline{DC}$.

$$A = b \cdot h$$

3.1.5 Área do Trapézio

O trapézio é o quadrilátero que possui apenas um par de lados paralelos. Os lados paralelos serão as bases, enquanto que a altura será o segmento perpendicular a elas. Na imagem a seguir temos a altura em azul, e as bases em vermelho.



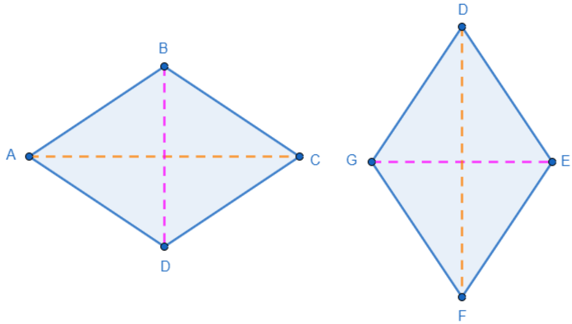
Na imagem acima temos as três classificações de trapézios que vimos anteriormente. Trapézio isósceles, trapézio retângulo e trapézio escaleno, respectivamente. Isso quer dizer que cada trapézio tem um jeito de calcular a área? Não, não se preocupe! Podemos calcular a área de todos os trapézios de apenas uma forma.

Chamaremos de B a medida da base maior, de b a medida da base menor e de h a medida da altura. Portanto, sua área é calculada da seguinte forma:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

3.1.6 Área do Losango

O último quadrilátero que será apresentado aqui é o losango. Ele possui uma maneira diferente de calcular a sua área comparado aos outros quadriláteros. Observe nas figuras, a seguir, as possíveis representações de losangos.



Assim como todos os outros quadriláteros, o losango possui duas diagonais. Elas serão muito importantes para calcularmos a área do losango. Vamos chamar de D a diagonal maior, destacada em laranja, e de d a diagonal menor, destacada em rosa. Portanto, sua área é calculada da seguinte forma:

$$A = \frac{D \times d}{2}.$$

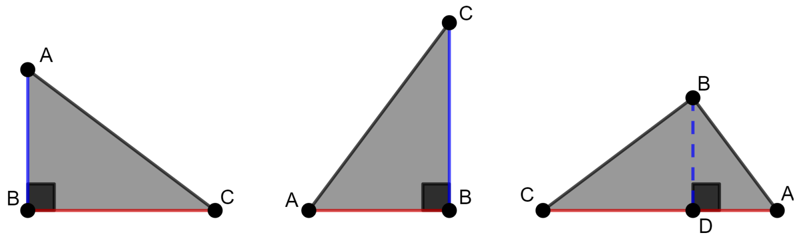
Você percebeu que vimos todos os quadriláteros, mas ainda não vimos como calcular a área do triângulo? Foi escolhido deixá-los para depois, pois possuem um pouquinho mais de detalhes.

3.1.7 Área do Triângulo

Para a área do triângulo também utilizaremos a altura e a base, porém teremos conceitos diferentes do já que vimos. O triângulo possui três casos de altura e base. Para cada caso teremos uma altura relativa a um lado, o qual será a base do triângulo.

Triângulos Retângulos

Em triângulos retângulos, a altura será um segmento que começa num vértice V, intersectando perpendicularmente o lado oposto a ele, o qual será a base, que terminará em um vértice T. A figura a seguir mostra o triângulo retângulo ABC com a altura em azul e a base em vermelha:



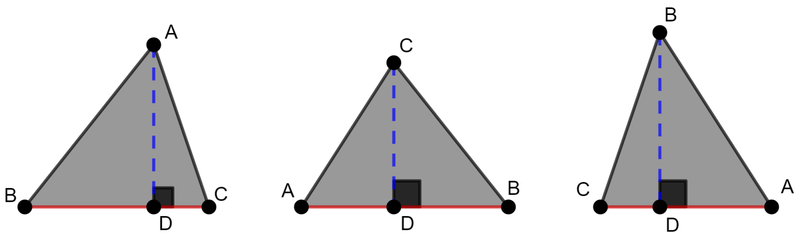
Na primeira e na segunda figura temos a altura e a base coincidindo com os lados perpendiculares do triângulo. Porém na terceira figura, a altura é um segmento (pontilhado) que está no interior do triângulo. Note que, neste caso, a base é o lado do triângulo intersectado perpendicularmente pela altura num ponto D. D.

Em todos os triângulos, temos uma altura relativa a um lado. Vamos ver isso em cada figura.

1° Figura: $\overline{AB}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$;
2° Figura: $\overline{BC}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$;
3° Figura: $\overline{BD}$ como altura relativa a $\overline{CA}$.

Triângulos Acutângulos

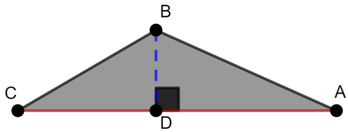
A imagem a seguir mostra os possíveis casos de um triângulo acutângulo ABC, e novamente a base estará em vermelho e a altura estará em azul.



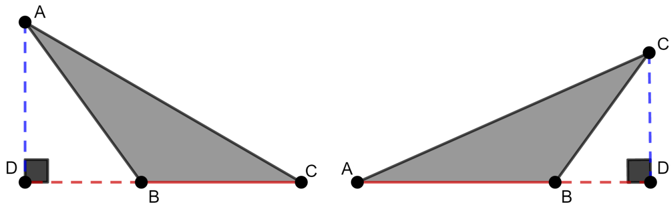
Teremos a mesma ideia da altura em relação ao lado para cada situação.

Triângulos Obtusângulos

Algo diferente ocorre para a altura do triângulo obtusângulo. Apenas para esse primeiro caso, representado na figura a seguir, teremos a altura no interior do triângulo.



Para os outros dois casos, teremos que prolongar o segmento da base. Assim, teremos a altura perpendicular à base, como na figura abaixo.



Apesar de serem casos e tipos de triângulos distintos, o modo de calcular a área A de todos os triângulos será a mesma:

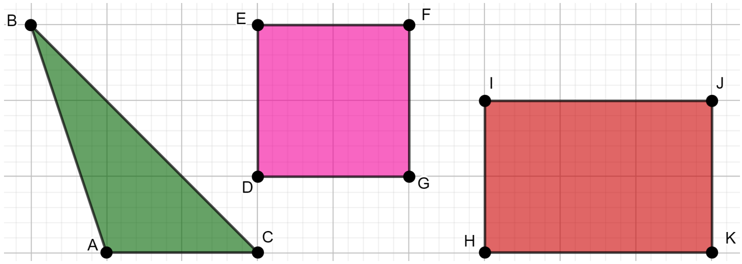
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Onde b é a base e h é a altura do triângulo.

Uma outra forma comum de chamarmos a área do triângulo é A_Δ, e pelos vértices $[ABC]$.

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 3.2. Na imagem a seguir as figuras geométricas estão numa malha quadriculada. Calcule $[ABC]$, $[DEFG]$ e $[HIJK]$



Solução. A malha é constituída por quadrados com quadradinhos menores. Utilizaremos o lado do quadrado como a unidade de medida. Para a área do quadrado $DEFG$, utilizaremos:

$$[DEFG] = l^2$$

A partir da figura, temos $l = 2$ $u.m.$:

$$[DEFG] = l^2 = 2^2 = 4$$

Então $[DEFG] = 4$ $u.a.$
Para a área do retângulo $HIJK$:

$$[HIJK] = b \cdot h$$

Teremos a base $b = 3$ $u.m.$ e a altura $h = 2$ $u.m$ e portanto:

$$[HIJK] = b \cdot h = 3 \cdot 2 = 6$$

Então $[HIJK] = 6$ $u.a.$
Por fim, para calcularmos a área do triângulo:

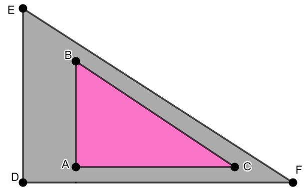
$$[ABC] = \frac{b \cdot h}{2}$$

A base b mede 2 $u.m.$ e a altura h mede 3 $u.m.$ e portanto:

$$[ABC] = \frac{2 \cdot 3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Então $[ABC] = 3$ $u.a.$ □

Exercício Resolvido 3.3. Considere o triângulo maior DEF e o menor ABC na imagem a seguir. Se as bases medem $\overline{FD} = 2 \cdot \overline{CA} = 8$ cm e as alturas medem $\overline{DE} = 2 \cdot \overline{AB} = 6$ cm, calcule a área em cinza.



Solução. Para encontrarmos a área cinza, devemos calcular $[DEF]$ e descontar a área $[ABC]$.

Para $[DEF]$ temos:

$$[DEF] = \frac{\overline{DF} \cdot \overline{DE}}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24.$$

Então $[DEF] = 24$ cm^2. Para $[ABC]$:

$$[ABC] = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{AB}}{2}$$

Pelo enunciado, temos:

$$\begin{array}{cc} 2 \cdot \overline{CA} = 8 & 2 \cdot \overline{AB} = 6 \\ \overline{CA} = \frac{8}{2} & \overline{AB} = \frac{6}{2} \\ \Rightarrow \overline{CA} = 4 & \Rightarrow \overline{AB} = 3 \end{array}$$

Agora podemos calcular a área:

$$[ABC] = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6.$$

Então $[ABC] = 6$ cm^2. Fazendo a diferença das duas áreas, teremos a área cinza A_c:

$$A_c = 24 - 6 = 18$$

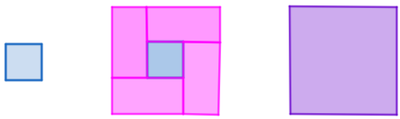
Portanto, o valor da área cinza é 18 cm^2. □

Exercício Resolvido 3.4. (OBM - 2017 - Fase única, adaptado) Alguns retângulos podem ser divididos em um quadrado e quatro retângulos menores iguais, de modo que todas essas cinco partes podem ser reunidas para compor um novo quadrado.

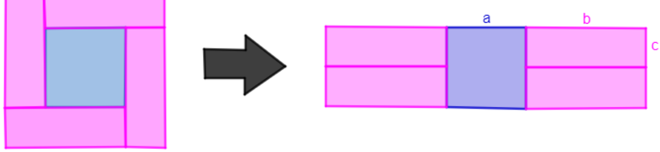
a) Faça um desenho mostrando como um quadrado e quatro retângulos iguais podem ser reunidos para formar um novo quadrado.

b) Mostre um retângulo que pode ser dividido de acordo com a exigência do enunciado e indique as medidas dos seus lados.

Solução. a) A seguir temos um exemplo de desenho que pode ser feito.



b) Se rearranjarmos os nossos quatro retângulos, podemos posicioná-los da seguinte maneira:



Nomeando os lados, como na figura acima, percebemos que

$$a = 2 \cdot c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{a}{2}$$

$$b = a + c$$

Para descobrirmos o perímetro do retângulo acima, precisamos somar as medidas de seus lados:

Lado maior

$$b + a + b = 2 \cdot b + a$$

$$\Rightarrow 2 \cdot b + a = 2 \cdot (a + c) + a = 3 \cdot a + 2c$$

$$\Rightarrow 3 \cdot a + 2 \cdot c = 3 \cdot a + 2 \cdot \frac{a}{2} = 4 \cdot a$$

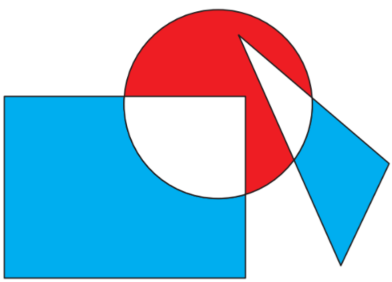
Lado menor

$$2 \cdot c = 2 \cdot \frac{a}{2} = a$$

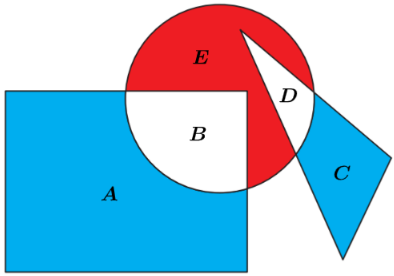
Portanto, qualquer retângulo com lados $4 \cdot a$ e a pode ser dividido como nas ilustrações acima.

□

Exercício Resolvido 3.5. (OBMEP - 2018 - 1ª Fase) Na figura temos um retângulo com área igual a 120 cm^2, um círculo com área igual a 81 cm^2 e um triângulo com área igual a 29 cm^2. Qual é a diferença entre a soma das áreas das regiões azuis e a área da região vermelha?



Solução. Para começar a resolver este exercício vamos nomear cada área conforme a figura a seguir.



Podemos observar que a região em azul é a soma de $A + C$ e a região em vermelho é somente a área representada por E.

Queremos descobrir a soma das áreas das regiões em azul menos a área da região em vermelho, ou seja,

$$A + C - E \qquad (1)$$

Observe que

$$A + B = \text{área do retângulo}$$

$$C + D = \text{área do triângulo}$$

$$B + D + E = \text{área do círculo}$$

Portanto podemos reescrever a equação (1) da seguinte forma:

$$A + C - E = (A + B) + (C + D) - (B + D + E)$$

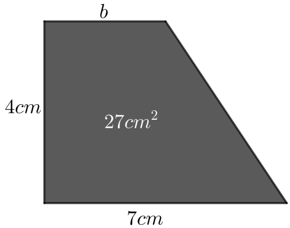
Substituindo os valores do enunciado encontramos:

$$A + C - E = 120 + 29 - 81 = 68.$$

Portanto, a diferença entre a soma das áreas das regiões azuis e a área da região em vermelho é 68 cm^2. □

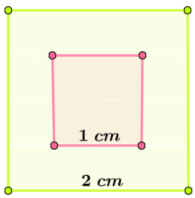
Exercícios de Fixação

1. Considere um trapézio de base maior 7 cm, altura 4 cm e área 27 cm^2, qual a medida da base menor?



2. Dado um quadrado de lado 4 cm. Se duplicarmos a medida do seu lado, quanto medirá sua nova área? Qual será a razão dessas áreas? E qual será a razão entre os lados?

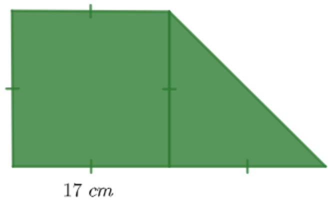
3. Seja um quadrado de lado igual a 1 cm, dentro de um quadrado de lado 2 cm. Calcule a área em verde.



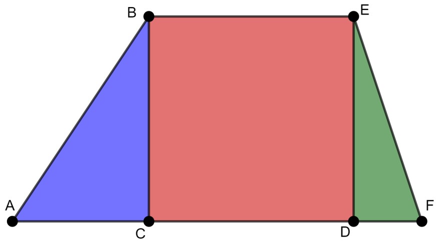
4. Qual a medida do lado de um quadrado, sabendo que seu perímetro e sua área possuem o mesmo valor?

   (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 8

5. Se um triângulo retângulo está grudado na lateral de um quadrado de lado 17cm, qual a área total da figura?



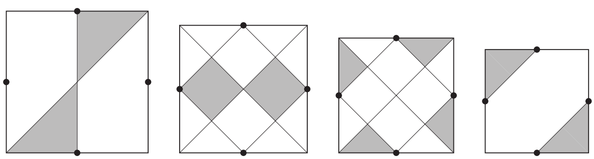
6. Sabendo que $AC = 3$ m, $CD = 4$ m, e $DF = 1$ m. Calcule $[ABC]$, $[EFD]$, e do quadrado $[BEDC]$:



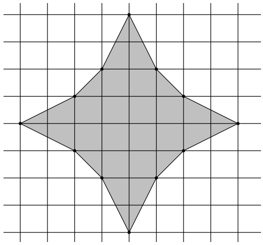
7. Determine a medida da diagonal menor de um losango cuja área é 21 cm^2 e a medida da diagonal maior é de 7 cm.

Exercícios Propostos

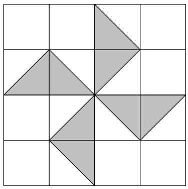
1. (OBMEP - 2015) Os pontos destacados nos quadrados abaixo são pontos médios dos lados. Quantos desses quadrados têm área sombreada igual a 1/4 de sua área?



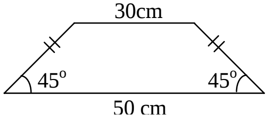
2. (OBMEP - 2017) A área da figura é igual à soma das áreas de quantos quadradinhos do quadriculado?



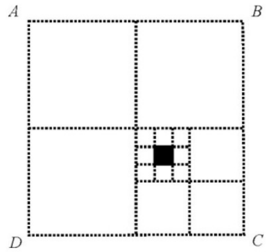
3. (OBMEP - 2010) A figura mostra um quadrado dividido em 16 quadradinhos iguais. A área em sombreado corresponde a que fração da área do quadrado?



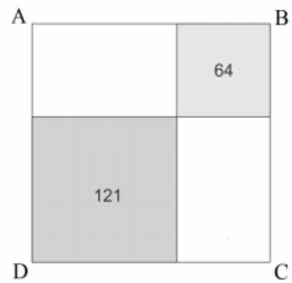
4. (OBM - 2008) Juntando quatro trapézios iguais de bases 30 cm e 50 cm, como o da figura abaixo, podemos formar um quadrado de área 2500 cm^2, com um buraco quadrado no meio. Qual é a área de cada trapézio, em cm^2?



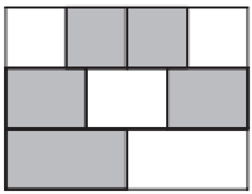
5. (OBM - 2016) A figura apresenta quadrados de quatro tamanhos diferentes. A área do pequeno quadrado preto é 1 cm^2. Qual é a área do quadrado maior $ABCD$?



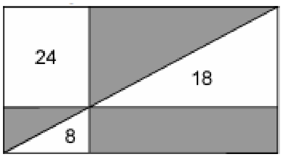
6. (OBM - 2016) O quadrado $ABCD$ foi dividido em dois retângulos congruentes e mais dois quadrados cujas áreas em metros quadrados estão indicadas na figura. Qual é a área do quadrado $ABCD$ em metros quadrados?



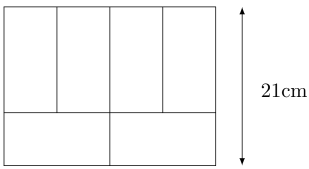
7. (OBMEP - 2013) A figura representa um retângulo de área 36 m^2, dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes sombreadas?



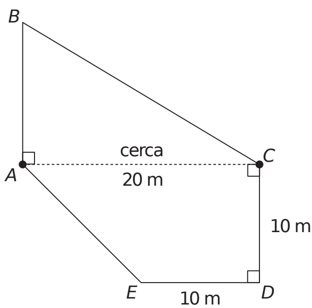
8. (OBM - 2014) O retângulo da figura foi repartido em várias regiões por meio de três segmentos concorrentes, sendo um deles uma de suas diagonais e os outros dois paralelos aos lados do mesmo. Os números indicam as áreas em m^2 das regiões brancas em que se encontram. Qual é a área do retângulo original?



9. (OBM - 2005) Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?

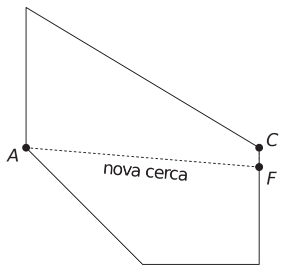


10. (OBMEP - 2008) A figura abaixo representa o terreno de Sinhá Vitória. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento $\overline{AC}$. A parte triangular ABC tem área igual a 120 m^2.

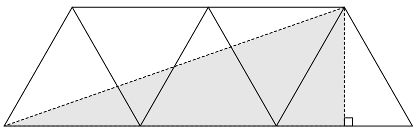


(a) Qual é a área do terreno?

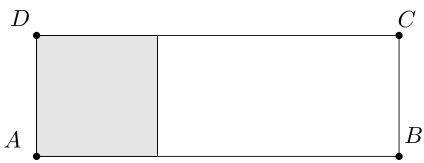
(b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento $\overline{AF}$ na figura abaixo, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância $\overline{CF}$?



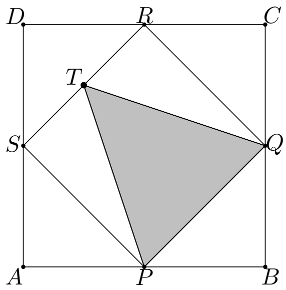
11. (OBMEP - 2009) A figura mostra cinco triângulos equiláteros. A que fração da área da figura corresponde a área sombreada?



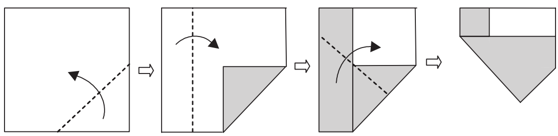
12. (OBMEP - 2008) A região cinza na figura é um quadrado de área 36 cm^2 que corresponde a $\frac{3}{8}$ da área do retângulo $ABCD$. Qual é o perímetro desse retângulo?



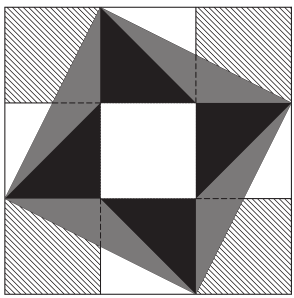
13. (OBMEP - 2009) Na figura, o quadrado $ABCD$ tem área 40 cm^2. Os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrado e T é o ponto médio do segmento $\overline{RS}$. Qual é a área do triângulo PQT?



14. (OBMEP - 2016) Alice fez três dobras numa folha de papel quadrada de lado 20 cm, branca na frente e cinza no verso. Na primeira dobra, ela fez um vértice coincidir com o centro do quadrado e depois fez mais duas dobras, como indicado na figura. Após a terceira dobra, qual é a área da parte cinza da folha que ficou visível?



15. (OBMEP - 2016) A figura abaixo foi desenhada sobre um quadriculado formado por nove quadradinhos, cada um com área igual a 4 cm^2.

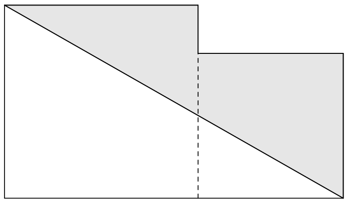


(a) Qual é a área total pintada de preto?

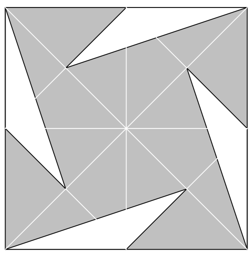
(b) Qual é a área total listrada?

(c) Qual é a área total pintada de cinza?

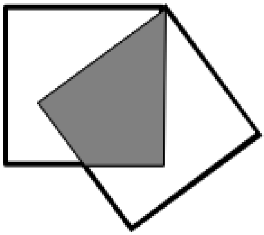
16. (OBMEP - 2014) A figura é formada por dois quadrados, um de lado 8 *cm* e outro de lado 6 *cm*. Qual é a área da região sombreada?



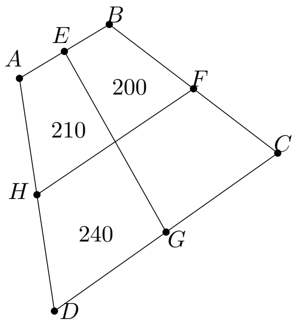
17. (OBMEP - 2010) A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área em cinza corresponde a que fração da área do quadrado?



18. (OBM - 2007) A figura abaixo é formada por dois quadrados de área 100 cm^2 cada um, parcialmente sobrepostos, de modo que o perímetro da figura (linha mais grossa) é igual 50 cm. Qual é a área da região comum aos dois quadrados, em cm^2?



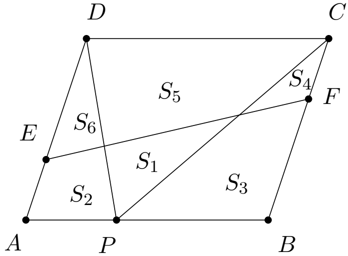
19. Na figura abaixo E, F, G, H são pontos médios. Determine a área do quadrilátero que está faltando.



20. Na figura, $ABCD$ é paralelogramo e $\overline{AE} = \overline{CF}$. Seja P um ponto qualquer sobre o lado AB. Mostre que

    (a) $S_5 = S_2 + S_3$

    (b) $S_1 = S_4 + S_6$



Aula 4

Ângulos

Sempre ouvimos dizer que a Matemática está presente em tudo na nossa vida, mas às vezes aprendemos um novo conteúdo na escola e parece que aquilo não se aplica ao nosso dia a dia.

Já pensou um engenheiro construir uma coluna torta que sustenta vários andares de um prédio? Esse é um exemplo de como os ângulos são fundamentais para a construção civil.

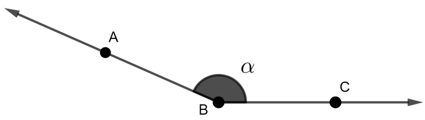
Na imagem ao lado, temos uma boa representação de onde encontramos os ângulos e do porquê eles são tão importantes. Por isso, precisamos aprender sobre sua construção.

4.1 Formando ângulos

Um dos conceitos geométricos primitivos que estudamos na primeira aula é a reta. De maneira geral, ela pode ser entendida como uma união de infinitos pontos. Pensando dessa forma, será que é possível dividi-lá? Sim, ao escolhermos um ponto qualquer de uma reta, ele passará a dividi-la em duas semirretas.

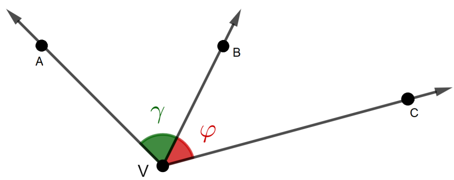
Definição 4.1. Dada uma reta r e um ponto pertencente a ela, este ponto divide r em duas semirretas com mesma origem.

Com esta construção definida, encontramos nossos ângulos. Esse objeto geométrico é a região interna da união de duas semirretas distintas com mesma origem. Já vimos um pouquinho sobre ele no primeiro capítulo. Observe a imagem a seguir para recordar.



Você lembra qual é notação de ângulo? Caso não se lembre, não tem problema, vamos relembrar agora. Podemos denotar o ângulo da figura anterior das seguintes formas: α, $\angle ABC$, $A\hat{B}C$ ou simplesmente $\hat{B}$.

Precisamos tomar cuidado quando utilizarmos a última notação. Na figura a seguir temos um exemplo de quando não podemos denotar o ângulo apenas pelo ponto.



Note que quando chamamos o ângulo da imagem anterior de $\hat{V}$, não sabemos se ele está se referindo ao ângulo γ ou φ.

4.2 Relações entre ângulos

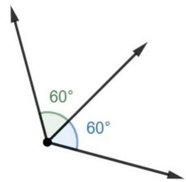
4.2.1 Ângulos Adjacentes

Se continuarmos observando a imagem anterior, podemos notar que os ângulos γ e φ têm o vértice V e a semirreta $\overrightarrow{VB}$ em comum. Isto significa que eles são **ângulos adjacentes**.

Definição 4.2. Ângulos adjacentes são regiões distintas que possuem um vértice e uma semirreta em comum.

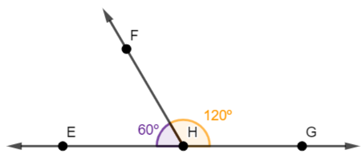
4.2.2 Ângulos Congruentes

Definição 4.3. Ângulos que possuem mesma medida, porém são construídos de maneiras distintas, são chamados de **ângulos congruentes**.



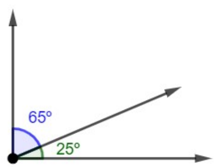
4.2.3 Ângulos Suplementares

Definição 4.4. Ângulos cuja soma **sempre** resulta em 180°, são chamados de **ângulos suplementares**.



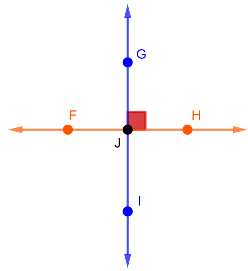
4.2.4 Ângulos Complementares

Definição 4.5. Ângulos cuja soma **sempre** resulta em 90°, são chamados de **ângulos complementares**.



Como podemos descobrir a medida do ângulo $F\hat{J}G$ na figura ao lado?

Para descobrirmos essa medida, vamos usar a ideia da divisão de uma reta em duas semirretas. Pela figura, sabemos que o ângulo em vermelho é perpendicular, ou seja, mede 90° e também conseguimos identificar que $\overrightarrow{JF}$ e $\overrightarrow{JH}$ estão unidas pelo ponto J, ou seja, elas formam uma reta. Então, o ângulo formado entre elas é igual a 180°. Dessa forma, temos que



$$F\hat{J}G + G\hat{J}H = 180^\circ$$

$$F\hat{J}G + 90^\circ = 180^\circ$$

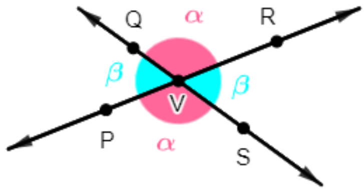
$$F\hat{J}G = 90^\circ.$$

Sendo assim, podemos observar duas coisas. A primeira delas é que os ângulos $F\hat{J}G$ e $G\hat{J}H$ possuem a mesma medida, ou seja, são **ângulos congruentes**. E, a outra observação que podemos fazer é em relação a soma dos ângulos em uma reta. Perceba que, pelo fato de $F\hat{J}G$ e $G\hat{J}H$ estarem na mesma reta, ao somarmos, chegamos em 180°. Nesse caso, dizemos que eles são **ângulos suplementares**.

A partir de agora vamos estabelecer várias relações de igualdade entre ângulos com a mesma medida, porém com estruturas diferentes.

4.2.5 Ângulos Opostos Pelo Vértice

Se duas retas distintas se interceptam em um único ponto, esse ponto será o vértice dos **ângulos opostos pelo vértice (OPV)**. Como podemos observar na imagem a seguir.



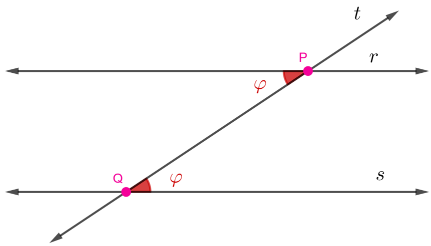
Ou seja, o ângulo α é oposto pelo vértice ao ângulo α, assim como, β é oposto a β.

Proposição 4.1. Ângulos opostos pelo vértice têm a mesma medida.

Portanto, $R\hat{V}S$ é congruente a $Q\hat{V}P$, assim como $Q\hat{V}R$ é congruente a $P\hat{V}S$.

4.2.6 Ângulos Alternos Internos e Retas Paralelas

Considerando duas retas paralelas e uma terceira reta que as intersecta (chamada de reta **transversal**), teremos dois pontos de intersecção, como podemos observar na figura abaixo.



P e Q são os pontos de intersecção que servirão de vértices. Os ângulos destacados na imagem são chamados de **ângulos alternos internos**.

Proposição 4.2. Ângulos alternos internos têm a mesma medida.

Por isso, os ângulos φ destacados, cujos vértices são formados pela intersecção das retas paralelas r e s com a transversal t, são congruentes. São eles que recebem o nome de ângulos alternos internos.

Vimos que as retas paralelas são importantes para determinarmos os ângulos alternos internos, mas como podemos ter certeza de que duas retas são paralelas? É o que iremos descobrir a seguir.

Quinto Postulado de Euclides

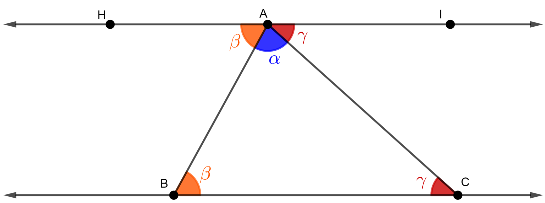
Definição 4.6. Duas retas são paralelas se, e somente se, os ângulos alternos internos são congruentes.

Esse postulado nos garante que:

- Se duas retas paralelas forem cortadas por uma terceira reta, então teremos ângulos alternos internos;
- Se tivermos três retas r, s, t, de tal forma que t corte as duas retas formando ângulos alternos internos, então teremos r e s paralelas.

Com o quinto postulado, podemos demonstrar qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo. Aconselho que você também faça a demonstração a partir da explicação a seguir, para facilitar o entendimento.

Vamos construir um triângulo ΔABC, a reta $\overleftrightarrow{BC}$ e a reta paralela a ela que passa por A:



α, β e γ são os ângulos internos do triângulo ΔABC. Pelo Quinto Postulado, temos que:

$$H\hat{A}B = C\hat{B}A = \beta \text{ e } C\hat{A}I = A\hat{C}B = \gamma$$

Vimos que dada uma reta e um ponto pertencente a ela como vértice do ângulo, o ângulo formado será de 180°. Então teremos:

$$H\hat{A}I = 180^{\circ}$$

Mas podemos escrever esse ângulo como a soma de outros ângulos:

$$H\hat{A}I = H\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}I = 180^{\circ}$$

Utilizando as igualdades do Quinto Postulado:

$$H\hat{A}I = \beta + B\hat{A}C + \gamma = 180^{\circ}$$

Ou seja:

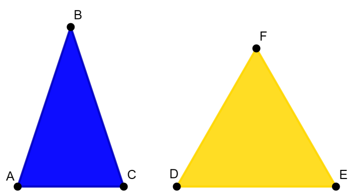
$$H\hat{A}I = \beta + \alpha + \gamma = 180^{\circ} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}.$$

A soma dos ângulos internos de um triângulo
sempre será igual a 180°.

4.3 Ângulos Internos

4.3.1 Ângulos Internos de Triângulos

Acabamos de ver que a soma dos ângulos internos é sempre a mesma. Porém, temos diferentes tipos de triângulos, como já estudamos anteriormente. Veremos, agora, quais são as características dos ângulos internos dos triângulos equiláteros e dos triângulos isósceles. A demonstração dessas afirmações serão feitas mais adiante, nos próximos capítulos.



O triângulo à esquerda é isósceles, pois possui $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ congruentes. Como consequência disso, temos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ também são congruentes. Portanto, escrevendo a soma desses ângulos internos, teremos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Como $\hat{A} = \hat{C}$:

$$2 \cdot \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$$

Ou

$$\hat{B} + 2 \cdot \hat{C} = 180^\circ$$

Dessa forma, podemos concluir que:

Se um triângulo possui dois lados congruentes, ele também tem os dois **ângulos da base congruentes**. Logo, esse é um **triângulo isósceles**. Da mesma forma, se um triângulo possui dois ângulos congruentes, os dois lados opostos a esses ângulos são congruentes.

O triângulo à direita é equilátero, pois possui os três lados, $\overline{DF}$, $\overline{FE}$ e $\overline{ED}$, congruentes. E, como consequência, temos que os três ângulos, $\hat{D}$, $\hat{F}$ e $\hat{E}$, também são congruentes. Portanto, escrevendo a soma desses ângulos internos, teremos:

$$\hat{D} + \hat{E} + \hat{F} = 180^\circ.$$

Como $\hat{D} = \hat{E} = \hat{F}$:

$$3 \cdot \hat{D} = 3 \cdot \hat{F} = 3 \cdot \hat{E} = 180^\circ.$$

E, portanto:

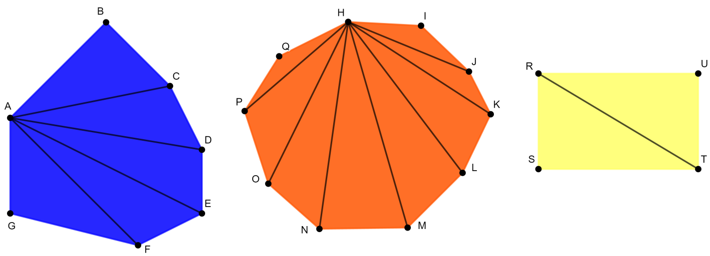
$$\hat{D} = \hat{F} = \hat{E} = 60^\circ.$$

Sendo assim, podemos concluir que:

Todo triângulo equilátero possui todos os lados congruentes, assim como todos os ângulos internos iguais a 60°.

4.3.2 Ângulos Internos de Qualquer Figura

Vimos a soma dos ângulos internos de um triângulo, mas como poderíamos saber a soma dos ângulos de qualquer figura geométrica plana?



Após observar as imagens acima, podemos perceber que a partir de um vértice é possível traçar segmentos de um vértice a outro de maneira que vários triângulos são formados. Notemos que:

- A figura em amarelo é formada por dois triângulos, ΔRST e ΔRUT. Cada triângulo possui 180°. Portanto, podemos concluir que a soma dos ângulos internos desse quadrilátero é igual a 360°.

- De forma análoga, a figura em azul possui cinco triângulos, logo a soma dos ângulos internos será $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$.

- Por fim, a figura em laranja possui 8 triângulos, logo a soma dos ângulos internos será $8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Perceba que existe uma relação entre a quantidade de vértices e ângulos. Complete a tabela abaixo com as figuras de 3, 4, 5, 6, 7 e 8 vértices, e tente achar a seguinte relação:

$$S = (v - 2) \cdot 180^\circ$$

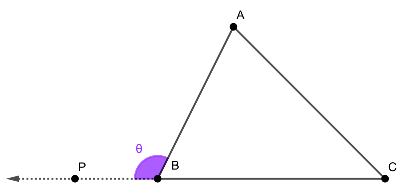
Vértices	**Soma dos Ângulos Internos**
3	
4	360°
5	
6	
7	900°
8	

Sendo **v** a quantidade de vértices da figura e **S** a soma dos ângulos internos da mesma.

4.4 Ângulos Externos

Os triângulos não possuem apenas ângulos internos. Um ângulo externo ao triângulo é formado a partir de um lado e uma reta que passa por outro, de modo que o vértice do triângulo seja o vértice do ângulo.

A partir desse ângulo iremos obter uma importante relação que envolve ângulo externo e soma de dois ângulos interno do triângulo. Considere o triângulo ABC e um ângulo externo θ como na imagem a seguir.



Pela soma dos ângulos internos do triângulo teremos:

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^\circ.$$

Mas sabemos que:

$$\theta + A\hat{B}C = 180^{\circ} \Rightarrow A\hat{B}C = 180^{\circ} - \theta.$$

Substituindo esse valor que acabamos de encontrar na equação da soma dos ângulos internos, teremos:

$$(180^{\circ} - \theta) + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^{\circ}$$

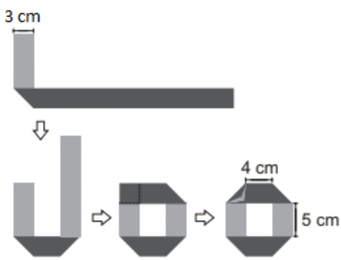
$$B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^{\circ} - (180^{\circ} - \theta)$$

$$B\hat{C}A + C\hat{A}B = \theta$$

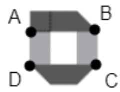
$$\Rightarrow \theta = B\hat{C}A + C\hat{A}B$$

Isso significa que a medida do **ângulo externo** é igual a **soma dos dois ângulos internos do triângulo** que não compartilham vértice com o ângulo externo.

Exercício Resolvido 4.1. (OBMEP - 2015) Júlia dobrou varias vezes uma tira retangular de papel com 3 cm de largura, como na figura. Todas as dobras formam um ângulo de 45° com os lados da tira. Qual é o comprimento dessa tira?



Solução. Primeira observação importante a se fazer é que o último pedacinho da tira está dobrado, então precisamos desdobrar para realizar as contas. Vamos nomear os pontos, na figura abaixo, para facilitar o entendimento.

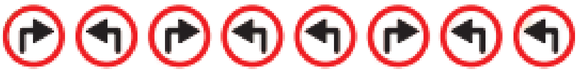


Note que nos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos 2 vezes a largura da fita mais 4 cm, logo $\overline{AB} = \overline{CD} = 10$ cm. Agora, os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ medem 5 cm. Por fim, observe que o pedacinho da tira que estava dobrado mede 3 cm, e iremos chamar de A. Então,

$$\textbf{comprimento da tira} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} + \overline{A}$$

Portanto, o comprimento dessa tira é igual a 33 cm. □

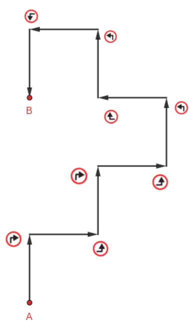
Exercício Resolvido 4.2. (OBMEP - 2019 - Adaptado) A formiguinha da OBMEP iniciou uma caminhada indo para o norte (N) e encontrou ao longo de seu trajeto a seguinte sequência de placas:



Toda vez que encontrou uma placa ela virou 90º para o lado indicado, continuando depois em linha reta até a próxima placa. Em qual sentido cardinal ela passou a andar após passar pela última placa?

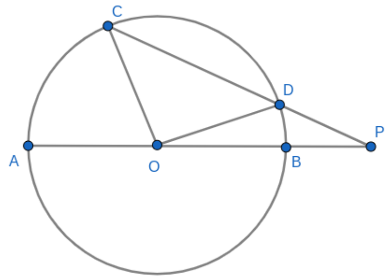
Solução. Sabemos que a formiguinha começou sua caminhada andando para o Norte, para desenhar seu trajeto, vamos imaginar que ela partiu do ponto A.

Após observar o caminho percorrido pela formiguinha na imagem ao lado, podemos concluir que para ela chegar ao destino final (ponto B), ela estava andando na direção Sul.

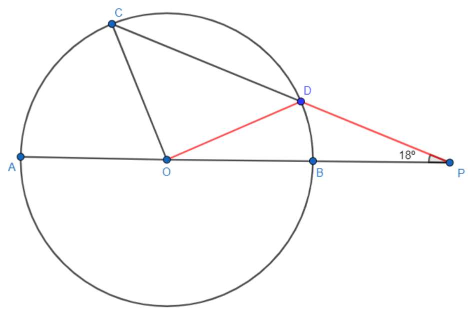


□

Exercício Resolvido 4.3. (OBMEP - 2019) O segmento $\overline{AB}$ de comprimento 16 cm é o diâmetro de um círculo de centro O. Uma reta secante corta o círculo em C e D e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em P, como indica a figura a seguir. Se $\overline{OD} = \overline{DP}$ e $\angle APC = 18^{\circ}$, qual o valor do ângulo $\angle AOC$?



Solução. Vamos começar nossa resolução inserindo as informações do texto na nossa figura.

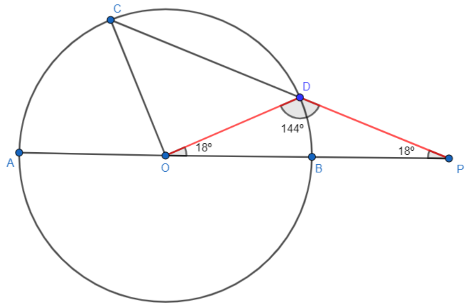


Como dois lados do nosso triângulo têm a mesma medida sabemos se trata de um triângulo isósceles. Portanto, sabemos que os ângulos O e P possuem a mesma medida, que é 18°.

A partir disso, podemos descobrir o ângulo $\hat{D}$ no ΔODP, pela soma dos ângulos internos.

$$\hat{O} + \hat{D} + \hat{P} = 180^{\circ}$$

$$18^\circ + \hat{D} + 18^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \hat{D} = 144^\circ$$

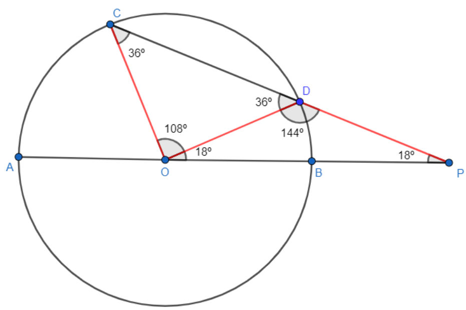


Agora, podemos descobrir a medida do ângulo $\angle ODC$.

$$\angle ODC + \angle ODP = 180^\circ$$
$$\angle ODC + 144^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \angle ODC = 36^\circ.$$

Como $\overline{CO} = \overline{DO}$, então $\angle ODC = \angle OCD = 36^\circ$. Portanto, pela soma dos ângulos internos nesse triângulo COD:

$$\angle OCD + \angle COD + \angle ODC = 180^\circ$$
$$36^\circ + \angle COD + 36^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \angle COD = 108^\circ.$$



Para descobrir o ângulo $\angle AOC$, basta fazer a conta

$$\angle AOC + \angle COD + \angle DOP = 180^\circ$$
$$\angle AOC + 108^\circ + 18^\circ = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \angle AOC = 54^\circ.$$

□

Exercícios de Fixação

1. Das afirmações a seguir, identifique a(s) verdadeira(s) e corrija a(s) falsa(s).

   a) Se duas linhas formam um ângulo de 90° entre si, então elas são paralelas.

   b) Se duas retas não possuem ponto de intersecção, elas são perpendiculares.

   c) Se a soma da medida de dois ângulos de um triângulo é igual a 100°, então com certeza um ângulo externo ao triângulo possui 100°.

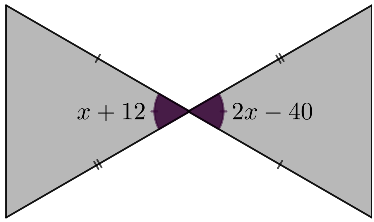
   d) O nome que damos para o ângulo com valor de 90° é ângulo reto.

   e) Ângulos congruentes possuem mesmo valor, e por isso são ângulos iguais.

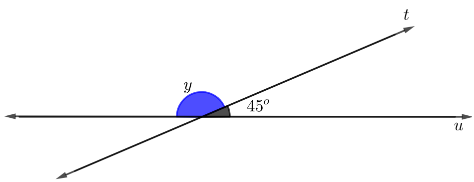
   f) Se $\angle TOP$ e $\angle SOM$ são opostos pelo vértice, então o valor do primeiro ângulo é o dobro do segundo.

   g) É possível construir um triângulo equilátero ABC com $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ e $\hat{C} = 30^\circ$.

2. A figura a seguir trata de um caso OPV. Qual o valor de x?



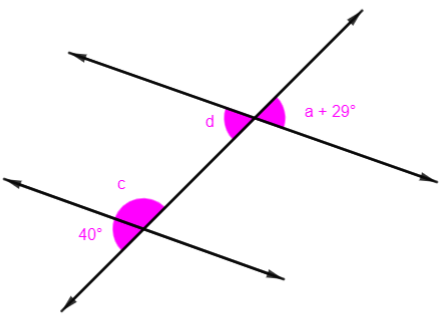
3. Qual o valor de y na figura abaixo?



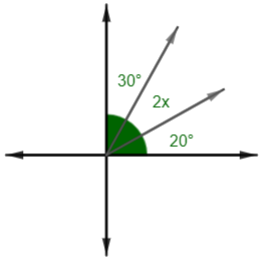
4. A soma de um ângulo interno com seu externo correspondente vale sempre:

a) 60° b) 80° c) 90° d) 180° e) 360°

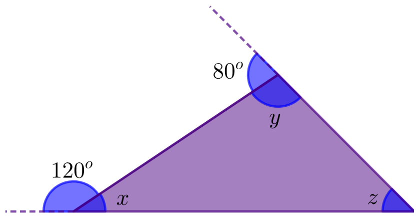
5. Dada a figura a seguir, quais os valores de a, c e d?



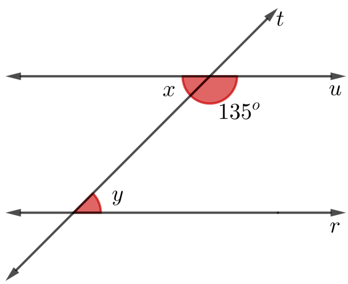
6. Dada a figura a seguir, qual o valor de x?



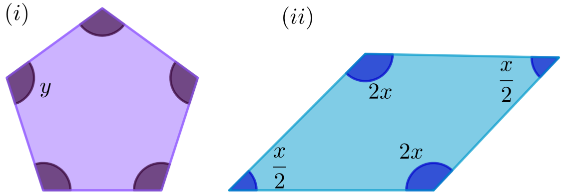
7. Calcule o valor de x, y e z.



8. Qual o valor de x e y na imagem a seguir?



9. A imagem a seguir possui duas figuras.

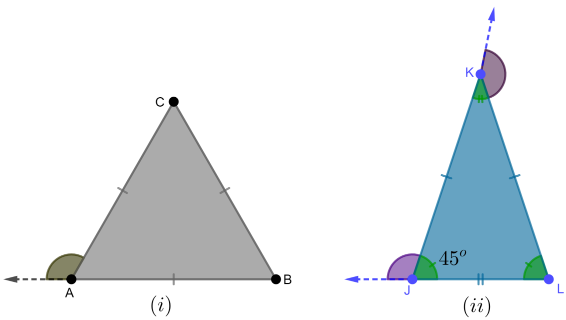


A figura (i) é um pentágono com todos os lados iguais e todos os seus ângulos congruentes. A figura (ii) é um paralelogramo.

a) Qual o valor de y?

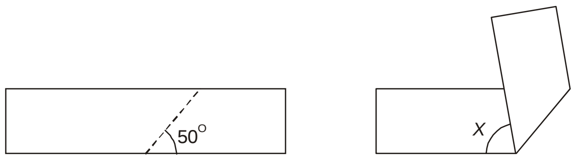
b) Qual o valor de x?

10. Qual o valor do ângulo externo das figuras a seguir, sabendo que (i) é um triângulo equilátero e (ii) é um triângulo isósceles, com ângulo de 45° na base?

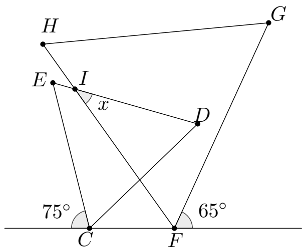


Exercícios Propostos

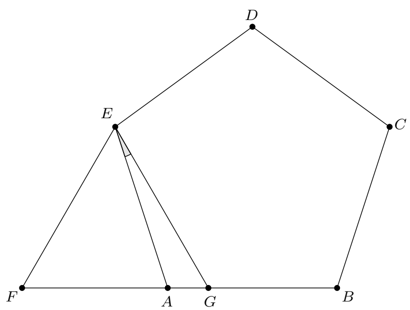
1. Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana abaixo. Qual a medida do ângulo x?



2. (OBM - 2005) Na figura a seguir temos dois triângulos equiláteros. Determine o valor de x.

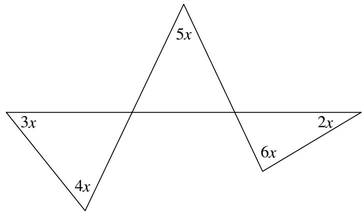


3. (OBM - 2014) Na figura abaixo, $ABCDE$ é um pentágono regular e EFG é um triângulo equilátero. Determine a medida, em graus, do ângulo $\angle AEG$.

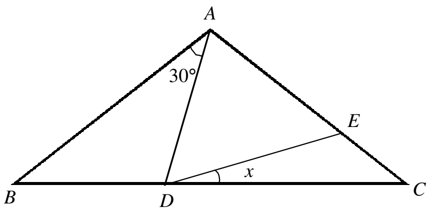


4. (OBMEP - 2005 - ADAPTADA) Qual é a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando ele marca 12 horas e 30 minutos?

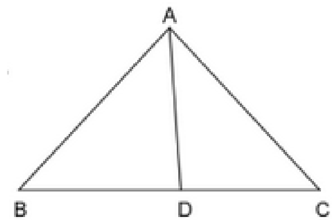
5. Na figura, quanto vale x?



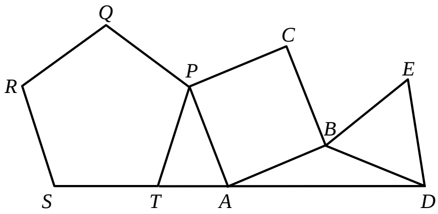
6. (OBM - 2006) Na figura, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{AE} = \overline{AD}$ e o ângulo $\angle BAD$ mede 30°. Então o ângulo x mede ...



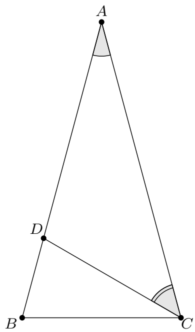
7. (OBMEP - 2009) Encontre $B\hat{A}D$, sabendo que $D\hat{A}C = 39^\circ$, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\overline{AD} = \overline{BD}$.



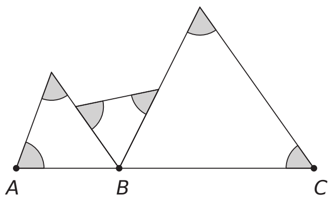
8. Na figura abaixo temos um pentágono regular, um quadrado e um triângulo equilátero, todos com a mesma medida de lado. Determine a medida, em graus, do ângulo $\angle QCE$.



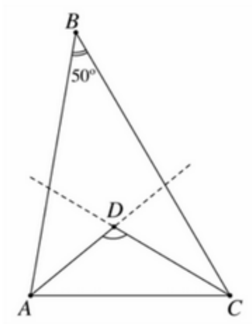
9. (OBMEP - 2005) O triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e o ângulo $\angle BAC$ mede $30°$. O triângulo BCD é isósceles de base $\overline{BD}$. Determine a medida do ângulo $\angle DCA$.



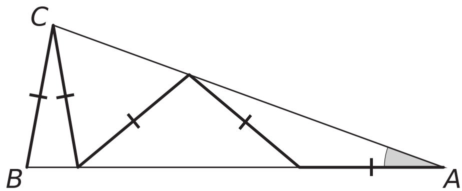
10. (OBMEP - 2014) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



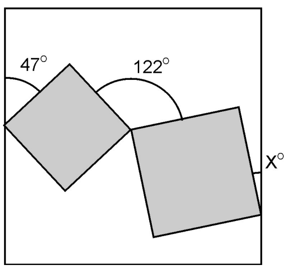
11. (OBMEP - 2006) Na figura temos $\hat{B} = 50°$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$ dividem os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ em duas partes iguais, respectivamente. Qual é a medida do ângulo $A\hat{D}C$?



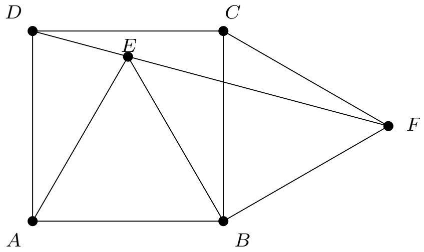
12. (OBMEP - 2009) No triângulo ABC temos $\overline{AB} = \overline{AC}$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $\angle BAC$?



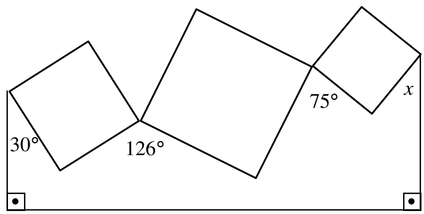
13. (OBM - 2016) Na figura, os quadrados cinzentos têm um vértice comum e o quadrado maior tem um vértice de cada um desses quadrados em seus lados. As medidas de alguns ângulos, em graus, estão indicadas na figura. Qual é o valor de X?



14. (OBMEP - 2011) Construímos dois triângulos equiláteros ABE interno e BFC externo ao quadrado $ABCD$. Prove que os pontos D, E e F se localizam na mesma reta.

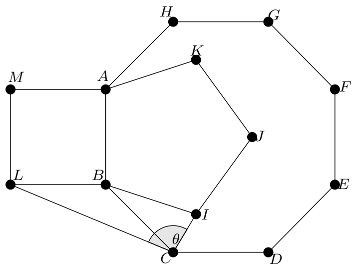


15. (OBM - 2006) Três quadrados são colados pelos seus vértices entre si e a dois bastões verticais, como mostra a figura.

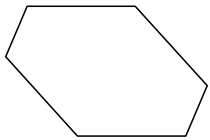


A medida do ângulo x é ...

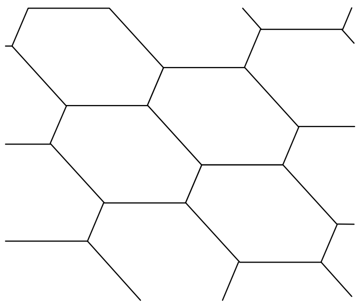
16. (OBM - 2016) Na figura a seguir sabe-se que $ABCDEFGH$ é um octógono regular, $ABIJK$ é um pentágono regular e $ABLM$ é um quadrado. Determine a medida em graus do ângulo $\angle LCI$ denotado na figura pela letra θ.



17. (OBM - 2008) Considere o seguinte hexágono:



Com cópias desse polígono podemos cobrir todo o plano, sem sobreposições, como mostra a figura a seguir.



(a) É possível cobrir o plano com cópias de um pentágono regular?

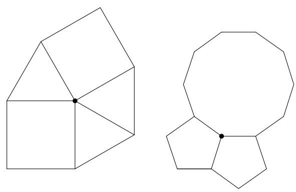
(b) Seja $ABCDE$ um pentágono com todos os lado iguais e tal que a medida do ângulo interno nos vértices A e B são $\angle A = 100^\circ$ e $\angle B = 80^\circ$. Mostre como é possível cobrir todo o plano com cópias desse pentágono, sem sobreposições.

18. (OBMEP - 2007)

    (a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos de um polígono regular de n lados é $(n-2) \times 180^\circ$.

n	**Soma dos ângulos** internos	**Ângulo interno**
3	180°	60°
4	360°	90°
5		
6		
8		

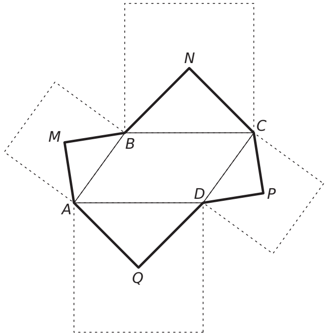
Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



   (b) Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

   (c) Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

19. (OBMEP - 2008) Na figura, $ABCD$ é um paralelogramo de área $20\ cm^2$ e lados medindo $4\ cm$ e $6\ cm$. Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.

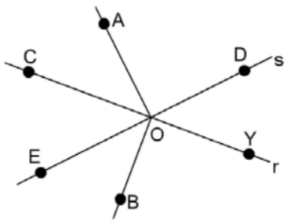


(a) Calcule a área do polígono $AMBNCPDQ$.

(b) Mostre que os ângulos $\angle MAQ$ e $\angle MBN$ têm a mesma medida.

(c) Mostre que $MNPQ$ é um quadrado e calcule sua área.

20. (OBMEP - 2009) Na figura, $A\hat{O}D$ e $B\hat{O}Y$ são ângulos retos e a medida de $D\hat{O}Y$ está entre 40° e 50°. Além disso, os pontos C e Y estão sobre a reta r, enquanto D e E estão sobre a reta s.



Os possíveis valores para a medida de $A\hat{O}C$ variam de:

(a) 30° a 40°

(b) 40° a 50°

(c) 50° a 60°

(d) 40° a 60°

(e) não podem ser determinados

Aula 5

Geometria 3D

5.1 Sólidos

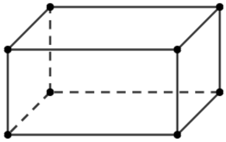
Você sabia que uma latinha de refrigerante, os dados de joguinhos, a casquinha do sorvete, a bola de futebol, entre muitos outros objetos do nosso cotidiano são exemplos de sólidos? Mas, o que é um sólido?

Os sólidos são objetos geométricos que possuem altura, comprimento e largura (ou profundidade). Observe a imagem.

Note que as regiões externas desses sólidos formam figuras geométricas planas, iguais as que estudamos nos capítulos anteriores. Essas regiões recebem o nome de **faces**.

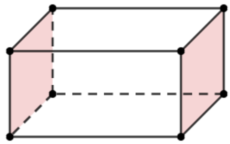
Paralelepípedo

Paralelepípedo é um sólido geométrico que possui 6 faces retangulares, 8 vértices e 12 arestas, como podemos observar na imagem a seguir.



Você sabe onde podemos encontrar este sólido? Nas caixas de bombons, nos tijolos, nas caixinhas de leite, nas caixas de sapato... Você consegue identificar algum objeto que tenha na sua casa no formato de paralelepípedo? Qual(is)?

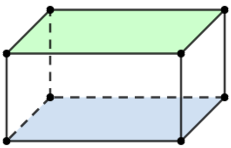
Agora, vejamos as nomenclaturas dos elementos do paralelepípedo.



Faces Opostas: Duas faces são ditas opostas se estiverem "de frente" uma a outra, como destacado em vermelho na figura ao lado.

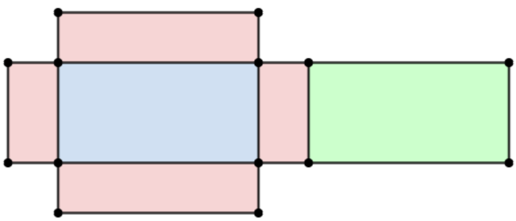
Note que o par de faces opostas são sempre figuras geométricas iguais.

Bases: podem ser classificada em superior ou inferior. Se pensarmos que o paralelepípedo está apoiado numa mesa (plano) apenas uma face ficará em contato com a mesa. Essa face é chamada de **base inferior**, destacada em azul na figura abaixo, enquanto que a face oposta será chamada de **base superior**, destacada em verde.



Faces Laterais: são todas as faces, exceto as bases. São as faces não pintadas na figura anterior.

Agora vamos planificar este paralelepípedo, ou seja, vamos "abrir" o sólido. Observe a imagem abaixo.

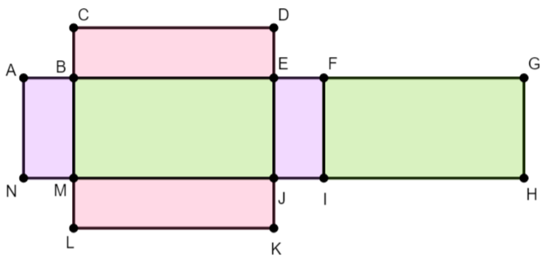


Note que a planificação facilita a visualização dos elementos presentes no sólido. Em azul temos a base inferior, em verde a base superior e em vermelho as faces laterais.

Agora que já descobrimos todos os componentes de um paralelepípedo, vamos calcular sua área. Observe que a área total, A_T, pode ser calculada da seguinte maneira:

$$A_T = A_{base} + A_{lateral}$$

Nesse momento, vamos reorganizar nossa planificação. Além de identificar os vértices das figuras, devemos observar que alguns retângulos tem mesmo tamanho e consequentemente possuem áreas iguais. Por isso, iremos identificar cada par de retângulos côngruos com cores diferentes.



Sendo assim, temos que

$$A_{base} = A_{[BEJM]} = A_{[FGHI]}$$

Para calcularmos a área lateral, vamos primeiro calcular a área dos retângulos roxo e rosa.

$$A_{roxo} = A_{[ABMN]} = A_{[EFIJ]}$$

$$A_{rosa} = A_{[BCDE]} = A_{[JKLM]}$$

Então, temos que a área lateral será:

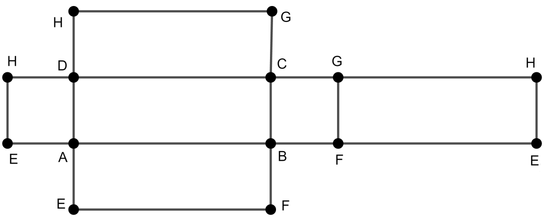
$$A_{lateral} = 2 \cdot A_{roxo} + 2 \cdot A_{rosa}$$

Portanto, a área total será igual a:

$$A_T = 2 \cdot A_{base} + 2 \cdot A_{roxo} + 2 \cdot A_{rosa}$$

Exercício Resolvido 5.1. Se a seguinte caixa possui comprimento de 7 m, altura 2 m e largura 2 m. Calcule a área da superfície:

Solução. Primeiramente, vamos planificar a caixa:



Note que temos quatro retângulos que possuem a mesma área e dois quadrados com a mesma área. Para calcularmos a área da superfície temos que calcular a área dos retângulos (A_1) e a área dos quadrados (A_2).

$$A_1 = 4 \cdot (AB \cdot BC) = 4 \cdot (7 \cdot 2) = 56\ m^2$$

$$A_2 = 2 \cdot (BF \cdot BC) = 2 \cdot (2 \cdot 2) = 8\ m^2$$

Portanto, a área de superfície A_s será:

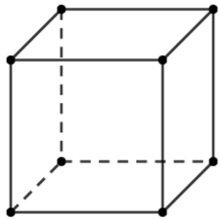
$$A_s = A_1 + A_2 = +2 \cdot 4 = 56 + 8 = 64\ m^2.$$

□

O que aconteceria se a medida da altura, do comprimento e da largura fossem iguais? Vejamos a seguir.

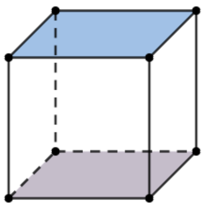
Cubo

É um sólido geométrico que possui 6 faces quadradas, 8 vértices e 12 arestas. Além de todas as faces formarem a mesma figura plana, todas as arestas possuem a mesma medida. Observe ao lado um exemplo.



Você sabe onde podemos encontrar este sólido? Nos cubos mágicos, nos dados, em porta canetas, nos puffs ... Você consegue identificar algum objeto que tenha na sua casa no formato de cubo? Qual(is)?

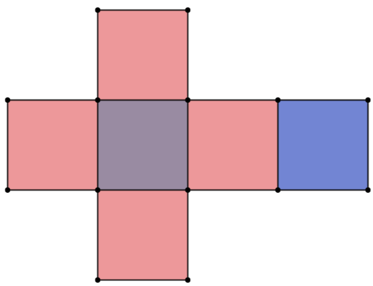
Assim como fizemos anteriormente, vamos destacar os elementos presentes na estrutura do cubo:



Bases: podemos classificar em inferior e superior, como dito anteriormente. A base inferior está destacada em roxo na figura ao lado e a base superior, em azul.

Faces Laterais: são todas as faces, exceto as bases. São as faces não pintadas na imagem.

Observe na imagem abaixo a planificação do cubo.



Em azul e roxo temos as bases e em rosa, as faces laterais. Note que, como todas as faces são quadradas de lados iguais, as seis áreas também serão iguais. Chamando os lados de l, podemos somar a área dos seis quadrados para obtermos a área da superfície, A_T:

$$A_T = l^2 + l^2 + l^2 + l^2 + l^2 + l^2 = 6 \cdot l^2$$

5.2 Volume de Sólidos

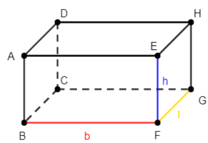
Você já deve ter visto uma garrafa com informação de quantos litros (l) ou mililitros (ml) ela possui de água ou suco. Essa informação serve para indicar o volume da garrafa, mostrando a capacidade de líquido dentro dela.

Para calcularmos o volume dos sólidos apresentados, utilizaremos três medidas: comprimento, altura e largura. Para isto, basta multiplicarmos essas medidas, da seguinte forma:

$$V = b \cdot h \cdot l$$

V → Volume do sólido
b → comprimento da base (do sólido)
h → altura do sólido
l → largura do sólido

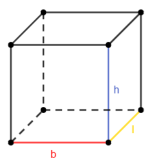
Na figura ao lado, temos um paralelepípedo no qual o comprimento b está destacado em vermelho, a altura h, em azul, e sua largura l, em amarelo. Portanto, o seu volume é igual a



$$V = b \cdot h \cdot l$$

Como todos os lados do cubo possuem a mesma medida, temos que $b = h = l$, então seu volume é igual a

$$V = l \cdot l \cdot l = l^3$$

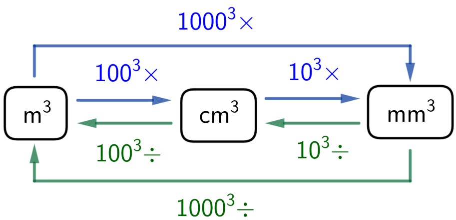


Portanto, obtemos o volume do cubo elevando a medida do seu lado ao cubo.

Assim como quando estudamos áreas vimos que existe a unidade de área, aqui veremos as **unidades de volume**.

Unidades de Volume

As unidades que utilizaremos com mais frequência serão metro cúbico (m^3), centímetro cúbico (cm^3) e milímetro cúbico (mm^3). Assim como na unidade de medida de área, não podemos realizar operações com unidades de volumes distintas. Para isso, utilizaremos também uma tabela de conversão:



Assim como as tabelas de conversões anteriores, as setas estão partindo da unidade inicial para a desejada. A diferença é que agora todos os valores estão elevados ao cubo.

Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 5.2. Converta as unidades de volume:

(a) 225 m^3 em cm^3.

Solução. Para convertermos a unidade de m^3 para cm^3 devemos multiplicar 225 por 100^3, portanto:

$$225 \cdot 100^3 = 225 \cdot 1\ 000\ 000 = 225\ 000\ 000$$

E portanto o resultado da conversão é 225 000 000 cm^3. □

(b) 123,45 mm^3 em cm^3.

Solução. Para convertermos a unidade de mm^3 para cm^3, devemos dividir 123,45 por 10^3:

$$123,45 : 10^3 = 123,45 : 1\ 000 = 0,12345$$

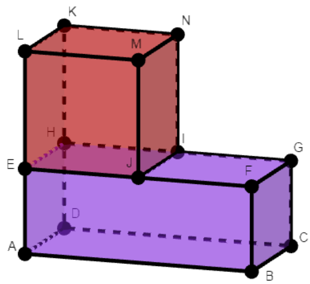
E portanto o resultado da conversão é 0,12345 cm^3. □

Resolva os próximos itens.

(c) $20,21\ m^3$ em cm^3.

(d) $3141592\ cm^3$ em m^3.

Exercício Resolvido 5.3. Na imagem a seguir temos um cubo vermelho grudado num paralelepípedo lilás. Calcule o volume desses sólidos a partir das situações apresentadas nos itens a seguir:



(a) $EH = 2\ m$; $AB = 3\ m$; $BF = 1\ m$.

Solução. Podemos calcular o volume do cubo, (V_c), elevando EH ao cubo, portanto:

$$V_c = (EH)^3 = 2^3 = 8$$

Para o volume do paralelepípedo, notemos que o comprimento mede AB, a altura mede BF, e a largura mede BC. Só que $BC = AD = EH$. Logo, o volume V_p será:

$$V_p = AB \cdot BF \cdot EH = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

Portanto, o volume do cubo é igual a 8 m^3 e do paralelepípedo é 6 m^3. □

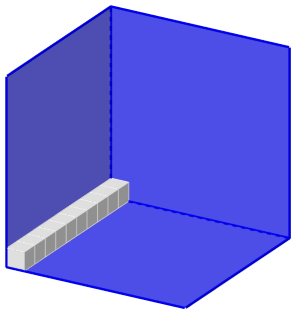
Para praticar, resolva você mesmo os próximos itens.

(b) $LM = 2\ mm$; $AB = 4\ mm$; $BF = 3\ mm$; $BC = 2\ mm$.

(c) $AE = EL = 2\ cm$; $EF = 5\ cm$.

Exercício Resolvido 5.4. O Professor Luiz sabe fazer grandes cubos de gelo. Um dia, o professor decidiu fazer um experimento:

* Pegou uma caixa com formato cúbico de lado 1 m.
* Colocou vários cubos de gelo, como na figura a seguir:



Ele observou que os cubos ocuparam totalmente o canto da caixa. Considerando a imagem e informações anteriores,

(a) faltam quantos cubos de gelo para ocupar toda a caixa?

(b) Quantos litros têm cada cubo de gelo?

Considere que 1 $m^3 = 1\ 000\ litros$.

Solução. Vamos chamar a aresta da caixa de A, e a aresta do cubo de gelo de a. Para a questão (a), notemos que existem 10 cubos de gelo na aresta da caixa, então podemos afirmar que:

$$A = 10 \cdot a$$

Ou seja, a aresta da caixa equivale a 10 arestas do cubo de gelo. Para calcularmos a capacidade máxima de cubos de gelo, precisamos do volume da caixa.

$$V = A^3$$

Substituindo $A = 10 \cdot a$, teremos:

$$V = (10 \cdot a)^3$$

$$V = 1\ 000 \cdot a^3$$

Isso significa que a caixa equivale a 1 000 cubos de gelo. Agora, vamos calcular a quantidade F de cubos de gelo que faltam para preencher a caixa subtraindo a quantidade inicial I:

$$F = 1\ 000 - I$$

Pela imagem temos que $I = 10$, então:

$$F = 1\ 000 - 10$$

$$\Rightarrow F = 990$$

Logo, faltam 990 cubos de gelo para ocupar toda a caixa. Observe que não utilizamos valores numéricos, apenas algébricos. Agora, vamos resolver utilizando valores numéricos. Como a aresta da caixa equivale a 10 arestas do cubo de gelo, temos:

$$A = 1\ m = 10 \cdot a$$

$$\Rightarrow a = 0,1\ m$$

Calculando o volume V da caixa teremos:

$$V = A^3$$

$$V = 1^3$$

$$\Rightarrow V = 1\ m^3$$

Agora o volume v do cubo de gelo:

$$v = a^3$$

$$v = (0,1)^3$$

$$\Rightarrow v = 0,001\ \mathrm{m}^3$$

Ou seja, cabem 1 000 cubos na caixa. Como existiam 10 no início, faltam 990 cubos de gelo para ocupá-la totalmente.

(b) Utilizando a expressão algébrica acima, e que $1\ m^3 = 1\ 000\ l$ (litros) temos:

$$v = 0,001\ m^3$$

Como temos um milésimo de metro cúbico, teremos um milésimo de 1 000 **l**, portanto:

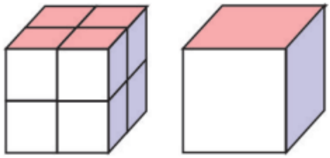
$$v = 0,001 \cdot 1\ 000\ l$$

Ou seja:

$$v = 1\ l$$

Logo, cada cubo de gelo tem 1 litro. □

Exercício Resolvido 5.5. (OBM - 2017) Jacira tem muitos cubinhos cujos lados medem 1 cm, 2 cm ou 3 cm. Assim, por exemplo, ela tem duas maneiras diferentes de obter um cubo cujo volume é 8 cm^3: uma delas é montar um cubo com 8 cubinhos de 1 cm de lado e a outra é simplesmente pegar um cubo com 2 cm de lado, como mostrado na figura. Note que dois cubos de mesmo volume são obtidos de maneiras diferentes se, e somente se, são montados com diferentes números de cubos.



(a) De quantas maneiras diferentes ela pode obter um cubo com volume de 27 cm^3?

(b) De quantas maneiras diferentes ela pode obter um cubo com volume de 64 cm^3?

Solução. (a) Queremos construir um cubo com 27 cm^3. Sabendo que quando um cubo tem lado a, calculamos seu volume como $a \cdot a \cdot a = a^3$. Para isso, temos que o seu lado deve medir 3 cm. Utilizando as peças de Jacira, podemos montá-lo das seguintes maneiras:

- 27 cubinhos de 1 cm de lado;
- 1 cubinho de 2 cm de lado e 19 cubinhos de 1 cm;
- 1 cubinho de 3 cm de lado.

Portanto, existem 3 maneiras distintas de montarmos um cubo de 27 cm^3 com as peças disponíveis.

(b) Se o volume do cubo é igual a 64 cm^3, então seu lado mede 4 cm. Podemos montá-lo das seguintes maneiras:

- 64 cubinhos de 1 cm de lado;
- 1 cubinho de 2 cm de lado e 56 cubinhos de 1 cm de lado;
- 2 cubinhos de 2 cm de lado e 48 cubinhos de 1 cm de lado;

$$\vdots$$

- 6 cubinhos de 2 cm de lado e 16 cubinhos de 1 cm de lado;

– 7 cubinhos de 2 cm de lado e 8 cubinhos de 1 cm de lado;

– 8 cubinhos de 2 cm de lado;

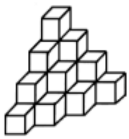
– 1 cubinho de 3 cm e 37 cubinhos de 1 cm.

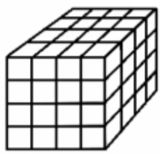
Portanto, existem 10 maneiras distintas de montarmos um cubo de 64 cm^3 com as peças disponíveis.

□

Exercício Resolvido 5.6. (OBM - 2015)

Em um mercado Vinícius estava empilhando caixas mas deu seu horário de ir embora. As caixas que conseguiu empilhar aparecem na figura abaixo na esquerda. Sua colega Lana começou seu turno logo em seguida para terminar a tarefa. Lana terminou a tarefa e a pilha de caixas ficou como mostra a figura abaixo na direita. Quantas caixas Lana teve que colocar na pilha de Vinícius para chegar no resultado final?





Solução. Podemos observar que Lana formou um cubo $4 \times 4 \times 4$ com as caixas que empilhou. Portanto, sabemos que no total foram empilhadas $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ caixas. Se observarmos as pilhas que Vinícius empilhou, podemos notar que as colunas de caixas tem tamanhos diferentes.

- ⋆ A coluna mais ao centro, possuí 4 caixas;
- ⋆ As duas imediatamente ao seu lado têm 3;
- ⋆ As três que estão ao lado das pilhas de três, têm 2 caixas cada;
- ⋆ E as quatro mais a frente, possuem apenas uma caixa cada.

Sabemos, então que Vinícius empilhou

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4 + 6 + 6 + 4 = 20 \text{ caixas.}$$

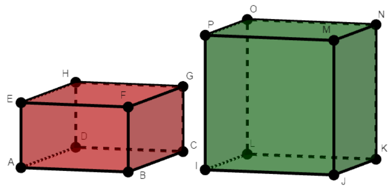
Subtraindo esse valor do total, sabemos que Lana empilhou 44 caixas. □

Exercício Resolvido 5.7. (OBMEP - 2015) Pedrinho colocou 1 copo de suco em uma jarra e, em seguida, acrescentou 4 copos de água. Depois decidiu acrescentar mais água até dobrar o volume que havia na jarra. Ao final, qual é o percentual de suco na jarra?

Solução. Para resolver este exercício precisamos lembrar que Pedrinho utilizou o mesmo copo para medir o suco e a água. Após colocar 1 copo de suco e 4 copos de água em uma jarra, o volume de líquido nesta jarra é igual a 5 copos. Ao dobrar o volume temos um total de 10 copos, sendo 1 copo de suco e 9 copos de água. Portanto, o percentual de suco na jarra é de 10%. □

Exercícios de Fixação

1. Na figura a seguir temos um paralelepípedo vermelho e um cubo verde.



Calcule a área da superfície para as seguintes situações:

(a) $AB = 2$ m; $BF = 1$ m; $BC = 2{,}5$ m; $IJ = 3$ m.

(b) $AD = 15$ cm; $DC = 10$ cm; $CG = 7$ cm; $LK = 0{,}1$ cm.

2. Considere as medidas a seguir pertencentes ao paralelepípedo. Sendo $h = altura$, $p = profundidade$ e $c = comprimento$, calcule o volume em m^3 e em cm^3 para cada item:

(a) $h = 200\ cm$
$p = 55\ cm$
$c = 3\ cm$

(b) $h = 10\ m$
$p = 0,25\ m$
$c = 3\ m$

(c) $h = 1\ m$
$p = 1\ cm$
$c = 1\ mm$

3. Se um cubo possui face de 34 mm, qual a área da sua superfície?

4. Rosane faz caixas de papelão sem tampa com base, altura e profundidade medindo 3 m, 4 m, e 5 m, respectivamente. Qual é a área da superfície e o volume dessa caixa? Note que a caixa não tem tampa!

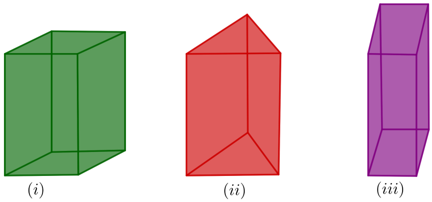
5. (OBMEP - 2017) Zequinha tem três dados iguais, com letras **O**, **P**, **Q**, **R**, **S** e **T** em suas faces. Ele juntou esses dados como na figura, de modo que as faces em contato tivessem a mesma letra. Qual é a letra na face oposta à que tem a letra T?

6. (UFMG - 2008) Considere um reservatório, em forma de paralelepípedo retângulo, cujas medidas são 8 m de comprimento, 5 m de largura e 120 cm de profundidade. Bombeia-se água para dentro desse reservatório, inicialmente vazio, a uma taxa de 2 litros por segundo. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que, para se encher completamente esse reservatório, serão necessários:

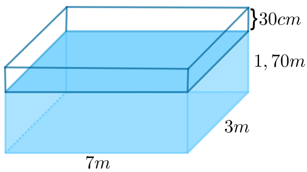
(a) 40 min (b) 240 min (c) 400 min (d) 480 min

7. Uma caixa d'água tem espaço interno na forma de um cubo com 1m de aresta. Retira-se um litro de água da mesma, o que baixa o nível em seu interior. De quanto baixa esse nível? (**Dica: 1 m^3 = 1 000 l**)

8. Quantos vértices, arestas e faces possuem as figuras a seguir? Visualmente, por que as figuras (i) e (iii) possuem as mesmas quantidades?



9. Em dias de calor, é bom entrar na piscina e se divertir. Muitas vezes, levamos boias ou outros brinquedos para a diversão ficar maior. Na figura a seguir, estão dados os valores da largura, comprimento e profundidade da piscina.

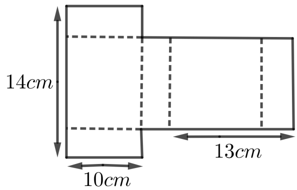


   (a) Qual o volume da água na piscina?
   (b) Se um brinquedo com volume igual a $250m^3$ é colocado na piscina, o que aconteceria com o nível da água?
   (c) Se a água estivesse até a borda, quantos litros teriam esta piscina? ($1\ m^3 = 1\ 000\ L$)

10. Dado um cubo de lado L, o que acontece

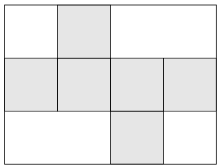
   (a) com o volume, se dobrarmos o valor do lado?
   (b) com os lados, se duplicarmos o valor do volume?

11. Dobrando o paralelepípedo a seguir nas linhas tracejadas, qual seu volume?

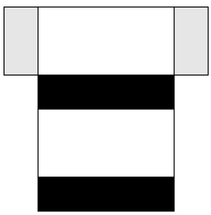


Exercícios Propostos

1. (OBM - 2006) Com a parte destacada da folha retangular a seguir, pode-se montar um cubo. Se a área da folha é 300 cm^2, qual é o volume desse cubo, em cm^3?

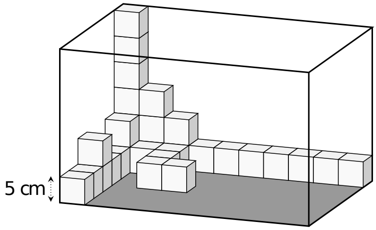


2. (OBM - 2015) Juliana fez a planificação de uma caixa de papelão com duas faces brancas, duas pretas e duas cinzentas. As faces brancas têm área de 35 cm^2 cada uma, as faces pretas têm área de 21 cm^2 cada uma e as cinzentas, 15 cm^2. Qual é o volume da caixa?



3. (OBMEP - 2005) Emília quer encher uma caixa com cubos de madeira de 5 cm de aresta. Como mostra a figura, a caixa

tem a forma de um bloco retangular, e alguns cubos já foram colocados na caixa.



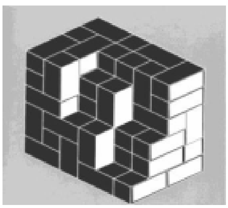
(a) Quantos cubos Emília já colocou na caixa?

(b) Calcule o comprimento, a largura e a altura da caixa.

(c) Quantos cubos ainda faltam para Emília encher a caixa completamente, se ela a continuar a empilhá-los conforme indicado na figura?

4. (OBM - 2002) Num armazém foram empilhadas embalagens cúbicas conforme mostra a figura a seguir. Se cada caixa pesa 25 kg, quanto pesa toda a pilha?

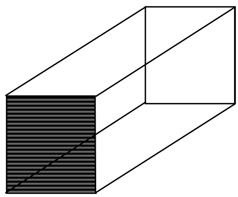
5. (OBM - 2013) Esmeralda está construindo um paralelepípedo usando blocos menores iguais. Para terminar sua tarefa, quantos blocos Esmeralda ainda deve colocar?



6. Qual é a área total, ou seja, a soma das áreas das faces de um cubo cujo volume é 125 cm^3?

7. Frederico ganhou uma bola "quadrada" (uma bola em formato de cubo) de aniversário e, para levá-la em sua mochila para a escolinha de futebol, Frederico precisa saber quais são as medidas de sua bola nova. Ao ler a embalagem, viu nas especificações que o volume da bola era de 8.000 cm^3. Quais são as dimensões da bola de Frederico?

8. (OBM - 2005) Um carpinteiro fabrica caixas de madeira abertas na parte de cima, pregando duas placas retangulares de 600 cm^2 cada uma, duas placas retangulares de 1200 cm^2 cada uma e uma placa retangular de 800 cm^2 , conforme representado no desenho. Qual é o volume, em litros, da caixa? Note que 1 litro = 1 000 cm^3.

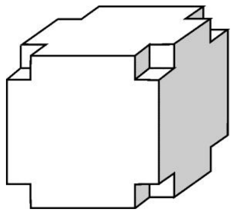


9. (OBM - 2015) Esmeralda cola cubinhos brancos para montar cubos maiores. Depois de montar os cubos maiores, ele pinta algumas faces dos cubinhos de verde ou de amarelo.

   (a) Depois de montado um cubo grande, Esmeralda pintou de verde as faces dos cubinhos com três faces visíveis e de amarelo as faces dos cubinhos com duas faces visíveis. Após a pintura, são visíveis no cubo grande exatamente 120 faces pintadas de amarelo. Quantas faces visíveis permaneceram brancas?

   (b) Depois de montar um cubo com oito cubinhos, Esmeralda pintou três faces do cubo maior de verde e três faces de amarelo. No máximo, quantos cubinhos tiveram duas faces pintadas de verde e uma face pintada de amarelo?

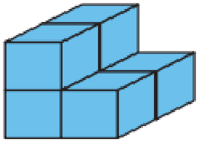
10. (OBM - 2013) O ourives Carlos tem um cubo de madeira de arestas de 10 centímetros. Ele retira cubos de 2 centímetros de aresta de cada vértice do cubo e cola sobre toda a superfície do sólido resultante uma folha fina de ouro ao preço de 8 reais por centímetro quadrado. Sem desperdícios, qual é o custo em reais dessa cobertura?



11. (OBM - 1998) Pintam-se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 centímetros. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1 000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Determine:

    (a) o número de cubos que não possuem nenhuma face pintada de preto.
    (b) o número de cubos que possuem uma única face pintada de preto.
    (c) o número de cubos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.
    (d) o número de cubos que possuem três faces pintadas de preto.

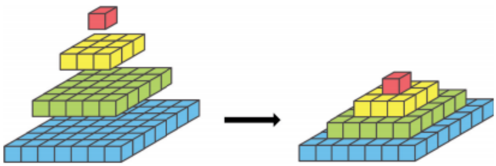
12. (OBMEP - 2012) Cláudia gosta de montar sólidos colando cubinhos de aresta 1 cm. Ela sempre usa um pingo de cola entre duas faces de cubinhos que ficam em contato; por exemplo, para montar o sólido abaixo ela usou 7 pingos de cola.



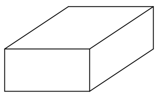
(a) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 2 cm?

(b) Quantos pingos ela vai usar para montar um cubo de aresta 3 cm?

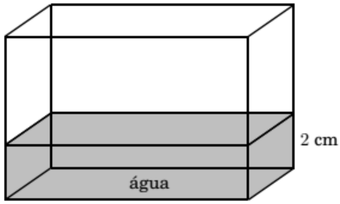
(c) Cláudia montou o sólido abaixo, com quatro camadas de cubinhos. Quantos pingos de cola ela usou?



13. Uma caixa fechada de vidro em formato de paralelepípedo está parcialmente preenchida com 1 litro de água. Ao posicionarmos essa caixa sobre uma mesa de três formas diferentes, a altura do nível da água é de 2 cm, 4 cm e 5 cm respectivamente. Qual é a capacidade máxima (em litros de água) dessa caixa? Observação: 1 litro de água ocupa um espaço de 1 000 cm^3 de volume.

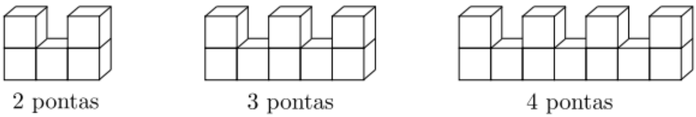


14. (OBMEP - 2014) Maria encheu uma caixa em forma de paralelepípedo retangular com 160 ml de água e a apoiou em uma das suas faces, como na figura abaixo:



Maria, então, mediu a altura que a água atingiu e obteve 2 cm. Depois, ela repetiu o experimento apoiando a caixa em outras faces e obteve alturas de 4 cm e 5 cm. Quais são as dimensões (largura, altura e comprimento) da caixa?

15. (OBMEP - 2014) Utilizando-se cubos de 1 m de aresta, são construídos muros conforme ilustrado na figura abaixo:



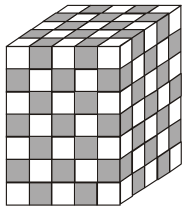
Os muros da figura possuem 2, 3 e 4 pontas.

(a) Calcule o número de cubos necessários para construir um muro com 5 pontas.

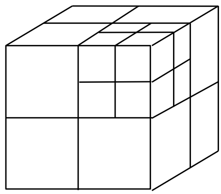
(b) Calcule o número de cubos necessários para construir um muro com 2014 pontas.

(c) Decide-se pintar a superfície do muro com 2014 pontas (sem pintar a base). Calcule a área total pintada.

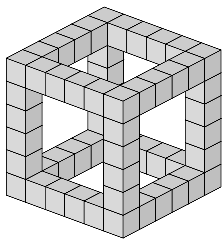
16. (OBM - 2004) Juntando cubinhos de mesmo volume mas feitos de materiais diferentes - cada cubo branco pesando 1 grama e cada cubo cinza pesando 2 gramas - formou-se um bloco retangular, conforme mostrado na figura abaixo. Qual é a massa, em gramas, desse bloco?



17. (OBM - 1999) Diga como dividir um cubo em 1999 cubinhos. A figura mostra uma maneira de dividir um cubo em 15 cubinhos.



18. (OBM - 2015) Zuleica cola cubinhos iguais de isopor para montar “esqueletos” de cubos, estruturas conforme o exemplo dado.

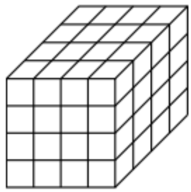


(a) Quantos cubinhos ela usou para montar o esqueleto da figura?

(b) Se ela quiser completar o maior cubo maciço com este esqueleto, preenchendo os espaços vazios com cubinhos iguais aos usados e continuando a ver o esqueleto, quantos cubinhos a mais deverá usar?

(c) Existe um cubo cujo esqueleto, para ser montado, precisa de uma quantidade de cubinhos igual à quantidade de cubinhos necessários para completar os espaços vazios do esqueleto desse cubo. Se Zuleica quiser montar esse esqueleto, quantos cubinhos terá que usar?

19. (OBMEP - 2013) Aline ganhou de presente um cubo composto por $4 \times 4 \times 4$ cubinhos brancos, como na figura a seguir.



Sem separar os pequenos cubinhos, Aline decidiu pintar todas as faces do seu cubo com tinta vermelha.

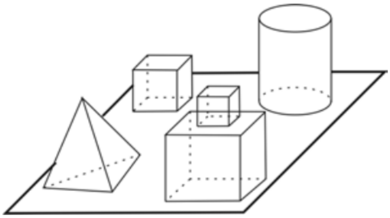
(a) Diga quantos cubinhos ficaram com exatamente uma de suas faces pintada em vermelho.

(b) Diga quantos cubinhos ficaram com exatamente duas das suas faces pintadas em vermelho.

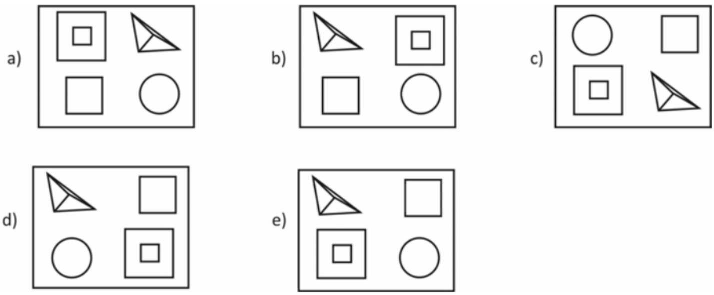
(c) Tempos depois, Aline pediu ao seu pai um cubo ainda maior para pintar da mesma maneira que ela havia feito com o cubo anterior. Após realizar a pintura, Aline separou os cubinhos. Ela notou que a quantidade de cubinhos que ficaram sem nenhuma face pintada em vermelho é igual ao triplo da quantidade de cubinhos que ficaram com duas faces pintadas em vermelho. Descubra o tamanho do novo cubo que Aline recebeu.

20. (OBMEP - 2008) Sobre uma mesa retangular de uma sala foram colocados quatro sólidos, mostrados no desenho. Uma

câmera no teto da sala, bem acima da mesa, fotografou o conjunto.



Qual dos esboços a seguir representa melhor essa fotografia?



Aula 6

Congruências de Triângulos

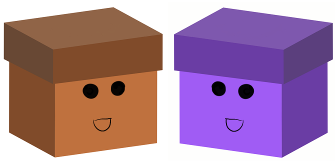
6.1 O Jogo dos Triângulos

Uma professora inspirada em jogos de adivinhação, criou o "*Jogo dos Triângulos*", com o objetivo de adivinhar o triângulo de outra pessoa a partir de algumas dicas. O jogo segue as seguintes regras:

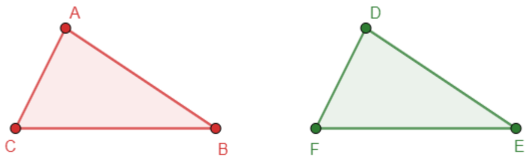
- A cada rodada alguém desenha dois triângulos para a outra tentar adivinhar se são iguais;
- Quem está adivinhando, pode fazer perguntas sobre a estrutura dos triângulos;

  Exemplo: o valor do ângulo $\hat{A}$ do triângulo ABC, se repete em algum dos ângulos do triângulo DEF?
- Se a pessoa conseguir adivinhar com até três perguntas, ganhará 10 pontos.

Quando ela mostrou o jogo aos seus alunos, eles alegaram que era muito difícil. Então, resolveram desafiar a própria professora a adivinhar todos os pares de triângulos que eles haviam desenhado. A professora, muito esperta, aceitou o desafio, e pediu aos alunos que colocassem um triângulo na caixa da direita e o outro triângulo deste par na caixa da esquerda.



A primeira a terminar os desenhos foi a Amora, ela colocou seu triângulo ABC na caixa da esquerda, e o triângulo DEF na caixa da direita. Os triângulos são como mostra a figura a seguir:

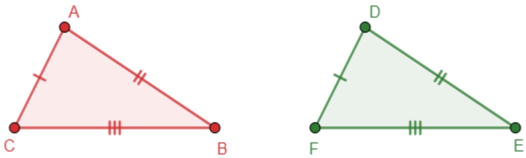


Depois de ter feito as perguntas, a professora conseguiu as seguintes informações:

- O lado $\overline{AB}$ possui mesma medida que o lado $\overline{DE}$;
- O lado $\overline{BC}$ possui mesma medida que o lado $\overline{EF}$;
- O lado $\overline{CA}$ possui mesma medida que o lado $\overline{FD}$.

Com isso, ela concluiu que os triângulos eram iguais.

Veja os triângulos da Amora a partir das informações que a professora conseguiu:



Breno, Caio e Daniel ficaram impressionados com o acerto da professora. Breno desenhou triângulos BRA e ZUK, Caio desenhou GEN e TIL, por fim Daniel desenhou XYW e VCJ. Eles criaram um desafio a professora, limitando o tipo de pergunta sobre o triângulo. Cada um impôs uma regra:

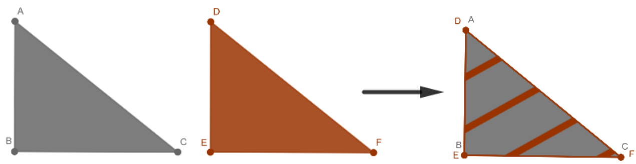
Da esquerda para a direita, temos Breno, Caio e Daniel. Incrivelmente, a professora obteve a resposta realizando apenas três perguntas para cada. Veja as anotações dela:

Breno	**Caio**	**Daniel**
$\overline{BR} = \overline{ZU}$	$\hat{G} = \hat{T}$	$\hat{X} = \hat{V}$
$\hat{R} = \hat{U}$	$\overline{GE} = \overline{TI}$	$\hat{Y} = \hat{C}$
$\overline{RA} = \overline{UK}$	$\hat{E} = \hat{I}$	$\hat{W} = \hat{J}$

A partir dessas informações, quem você acha que fez triângulos iguais? Para poder responder a essa pergunta, veremos, a seguir, sobre a "**Congruência de Triângulos**".

6.2 Congruência de Triângulos

Podemos dizer que dois triângulos são iguais, fora do rigor matemático, se conseguimos colocá-los um em cima do outro, de modo que se encaixem, ou seja, nenhuma parte fique de fora. Veja um exemplo nas figuras a seguir.



Na matemática, quando nos deparamos com essa situação, dizemos que eles são triângulos **congruentes**. O símbolo ($\equiv$) é a notação que utilizamos para esses casos . Por exemplo,

$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF.$$

Para termos certeza que dois triângulos são congruentes, precisamos analisar as suas estruturas. E a partir da congruência de algumas características, diremos se eles fazem parte de um dos **quatro casos** de congruência:

6.2.1 Caso Lado - Lado - Lado (LLL):

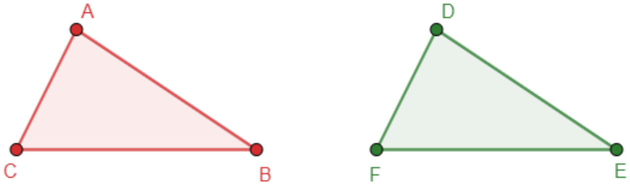
Se dois triângulos ABC e DEF têm 3 pares de lados iguais, ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{DE},\ \overline{BC} = \overline{EF} \text{ e } \overline{CA} = \overline{FD},$$

então,

$$\Delta ABC \equiv \Delta DEF.$$

Veja a seguinte imagem:



Temos que:

$$\overline{AB} = \overline{DE}$$
$$\overline{BC} = \overline{EF}$$
$$\overline{CA} = \overline{FD}$$

Pelo caso LLL, concluímos que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

6.2.2 Caso Lado - Ângulo - Lado (LAL):

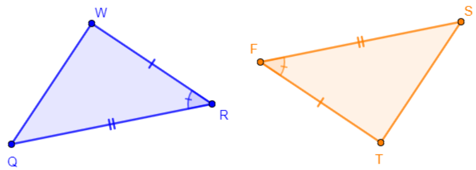
Se dois triângulos QWR e SFT têm 2 pares de lados iguais, de modo que os ângulos formados por eles nos respectivos triângulos são iguais, ou seja,

$$\overline{WR} = \overline{FT},\ \overline{RQ} = \overline{TS} \text{ e } \angle WRQ = \angle FTS$$

então,

$$\Delta QWR \equiv \Delta SFT.$$

Vamos analisar a seguinte imagem:



Podemos anotar os seguintes dados:

$$\overline{WR} = \overline{FT}$$

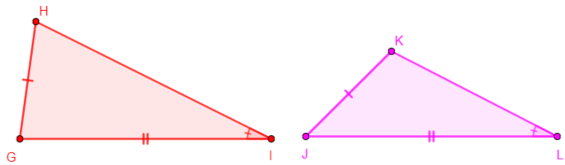
$$\hat{R} = \hat{T}$$

$$\overline{RQ} = \overline{TS}$$

Portanto $\Delta QWR \equiv \Delta SFT$ pelo caso LAL.

É importante ressaltar que o ângulo congruente deve ser formado pelos lados congruentes!

Vejamos, agora, um exemplo de quando isso não ocorre. Considere os triângulos HGI e KJL, tal que:



$$\overline{HG} = \overline{KJ}$$

$$\hat{I} = \hat{L}$$

$$\overline{GI} = \overline{JL}$$

Apesar de ser parecido com o caso anterior, os ângulos congruentes não são formados pelos lados congruentes. Sendo assim, não podemos garantir que existe congruência.

Neste caso, percebemos que de fato os triângulos não são congruentes.

6.2.3 Caso Ângulo - Lado - Ângulo (ALA):

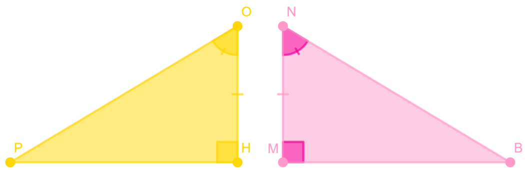
Se dois triângulos POH e BNM têm 2 pares de ângulos iguais, de modo que o lado em comum dos ângulos possui mesma medida, ou seja,

$$\angle POH = \angle BNM,\ \angle OHP = \angle NMB \text{ e } \overline{OH} = \overline{NM}$$

então,

$$\Delta POH \equiv \Delta BNM.$$

Considere a imagem a seguir.



Temos que:

$$\hat{O} = \hat{N}$$
$$\overline{OH} = \overline{NM}$$
$$\hat{H} = \hat{M}$$

Então, $\Delta POH \equiv \Delta BNM$ pelo caso ALA.

6.2.4 Caso Lado - Ângulo - Ângulo Oposto (LAA$_O$):

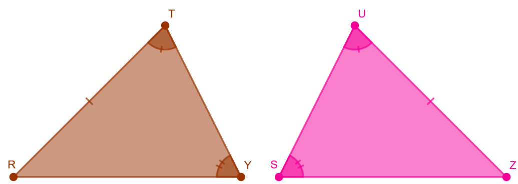
Se dois triângulos RTY e ZUS têm, nessa ordem, um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruentes, então esses triângulos são congruentes, ou seja,

$$\angle RTY = \angle ZUS, \ \angle TYR = \angle USZ \text{ e } \overline{RT} = \overline{ZU}$$

então,

$$\Delta RTY \equiv \Delta ZUS.$$

Observe a imagem:



Note que os ângulos $\hat{Y}$ e $\hat{S}$ são os ângulos opostos aos lados $\overline{RT}$ e $\overline{ZU}$, respectivamente. Temos então que:

$$\overline{RT} = \overline{ZU}$$

$$\hat{T} = \hat{U}$$

$$\hat{Y} = \hat{S}$$

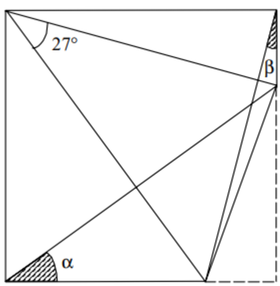
E portanto $\Delta RTY \equiv \Delta ZUS$ pelo caso LAA$_O$.

Note que é importante verificarmos a congruência de triângulos, pois, ao mostrarmos que dois triângulos são congruentes, obtemos a informação que toda a estrutura dos triângulos é congruente. Para entendermos melhor, vamos aos exercícios resolvidos.

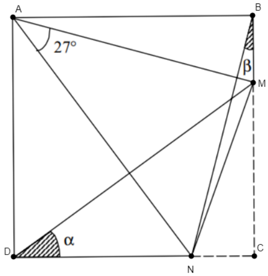
Exercícios Resolvidos

Exercício Resolvido 6.1. (OBM - 2ª fase - Nível 2 - 2005)

O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura abaixo?



Solução. Vamos começar nomeando os pontos, como na figura a seguir, para facilitar o entendimento.



O enunciado afirma que a soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado, ou seja,

$$\overline{CM} + \overline{CN} = \overline{BC} = \overline{CD}.$$

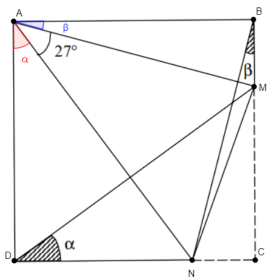
Note que:

$$\overline{CM} + \overline{CN} = \overline{BC} \qquad \overline{CM} + \overline{CN} = \overline{BM}$$

$$\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{CM} \qquad \overline{CD} = \overline{CN} + \overline{ND}$$

$$\Rightarrow \overline{CN} = \overline{BM} \qquad \Rightarrow \overline{CM} = \overline{ND}$$

Agora, observe que os triângulos ADN e DCM são congruentes, pelo caso LAL. E o mesmo acontece nos triângulos ABM e BCN. Pelas congruências, encontramos os seguintes ângulos:



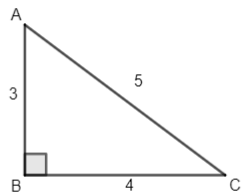
Portanto,

$$\alpha + \beta + 27^\circ = 90^\circ$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 63^\circ.$$

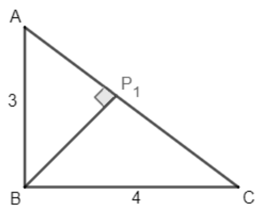
□

Exercício Resolvido 6.2. (OBMEP - 2014 - Adaptado)

O professor João gosta de fazer cópias reduzidas. Ele começa desenhando o triângulo retângulo ABC abaixo:



Em seguida, o professor João traça um segmento BP_1 de forma que BP_1 seja perpendicular a BC, conforme mostra a figura abaixo.

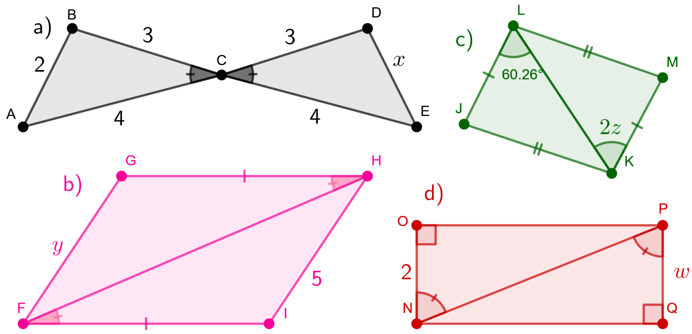


João afirma então que o triângulo BP_1C é semelhante ao triângulo ABC. Mostre que o professor João está certo!

Solução. É fácil perceber que o segmento $\overline{BC}$ se mantém em ambos os triângulos. Da mesma forma, sabemos que $B\hat{C}P_1 = B\hat{C}A$. Resta, agora, encontrarmos mais um ângulo com a mesma medida nos dois triângulos.

No ΔABC, $A\hat{B}C$ mede 90º e, no ΔBP_1C, $B\hat{P}_1C = 90$º. Portanto, temos um caso de triângulos semelhantes por ALA. □

Exercício Resolvido 6.3. Considere a seguinte imagem e encontre os valores de x, y, z e w.



Solução. a) Para encontrarmos o valor de x. Podemos ver que:

$$\overline{BC} = \overline{DC}$$
$$\angle BCA = \angle DCE$$
$$\overline{CA} = \overline{CE}.$$

Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta EDC$ pelo caso LAL. Portanto, temos que:

$$\overline{AB} = \overline{ED} = x$$

Como $\overline{AB} = 2$, temos que:

$$x = 2.$$

b) Para determinarmos o valor de y, precisamos ver que existe uma congruência nos triângulos FGH e HIF.

$$\overline{GH} = \overline{IF}$$
$$\angle GHF = \angle IFH$$
$$\overline{HF} = \overline{FH}.$$

Logo $\Delta FGH \equiv \Delta HIF$ pelo caso LAL e portanto:

$$\overline{FG} = \overline{HI} = 5.$$

Como $\overline{FG} = y$, temos que:

$$y = 5.$$

c) Vamos agora achar o valor de z. Note que não conseguimos afirmar muitas coisas relacionadas ao ângulo, apesar de ser a única informação numérica no desenho. Porém, temos que:

$$\overline{JL} = \overline{MK}$$
$$\overline{LK} = \overline{KL}$$
$$\overline{KJ} = \overline{LM}.$$

Temos então que $\Delta JLK \equiv \Delta MKL$ pelo caso LLL e portanto:

$$\angle MKL = \angle JLK$$
$$2 \cdot z = 60,26^{\circ}$$
$$\Rightarrow z = 30,13^{\circ}.$$

d) Por fim, para acharmos o valor de w usaremos novamente congruência. Vamos resolver de dois modos. O primeiro modo será considerar que:

$$\overline{PN} = \overline{NP}$$
$$\angle PNO = \angle NPQ$$
$$\angle NOP = \angle PQN.$$

Então $\Delta PNO \equiv \Delta NPQ$ pelo caso LAA$_o$. Temos então que:

$$\overline{PQ} = \overline{NO}.$$

Como $\overline{PQ} = w$ e $\overline{NO} = 2$, temos:

$$w = 2.$$

O outro modo para resolvermos é pela soma dos ângulos internos do triângulo.

$$\angle PNO + \angle NOP + \angle OPN = 180^\circ.$$

E também:

$$\angle NPQ + \angle PQN + \angle QNP = 180^\circ.$$

Igualando as equações:

$$\angle PNO + \angle NOP + \angle OPN = \angle NPQ + \angle PQN + \angle QNP$$

Mas

$$\angle NOP = \angle PQN = 90^\circ \text{ e } \angle PNO = \angle NPQ,$$

então:

$$\angle PNO + \angle NOP + \angle OPN = \angle NPQ + \angle PQN + \angle QNP$$
$$\angle PNO + 90^\circ + \angle OPN = \angle PNO + 90^\circ + \angle QNP$$
$$\Rightarrow \angle OPN = \angle QNP.$$

Então $\Delta PNO \equiv \Delta NPQ$ pelo caso ALA, pois:

$$\angle OPN = \angle QNP$$

$$\overline{PN} = \overline{NP}$$

$$\angle PNO = \angle NPQ.$$

Portanto:

$$\overline{PQ} = \overline{NO}.$$

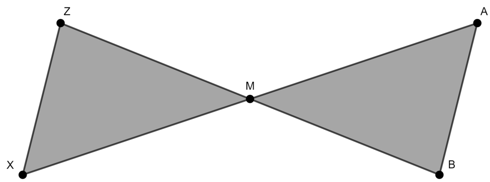
Como $\overline{PQ} = w$ e $\overline{NO} = 2$:

$$w = 2.$$

Portanto, x, y, z e w medem, respectivamente, 2 $u.m.$, 5 $u.m.$, $30,13^\circ$ e 2 $u.m.$.

$\square$

Exercício Resolvido 6.4. Na figura a seguir temos que M é o ponto médio de $\overline{ZB}$. Os ângulos $\hat{Z}$ e $\hat{B}$ são congruentes, e os pontos X, M e A estão alinhados. Mostre que $\overline{XM} = \overline{AM}$.



Solução. Como M é ponto médio de $\overline{ZB}$, temos:

$$\overline{ZM} = \overline{MB}.$$

Os pontos X, M e A estão na mesma reta, formando um segmento $\overline{XA}$. Então temos dois segmentos, $\overline{ZB}$ e $\overline{XA}$, com um ponto em comum em M. Podemos afirmar que:

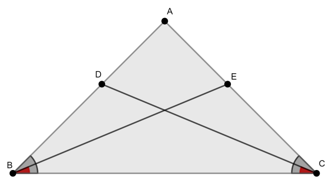
$$\angle ZMX = \angle AMB.$$

Pois são ângulos OPV. Temos os seguintes dados sobre triângulos ZMX e BMA:

$$\hat{Z} = \hat{B}$$
$$\overline{ZM} = \overline{BM}$$
$$\angle ZMX = \angle BMA.$$

Logo pelo caso ALA, temos que $\Delta ZMX \equiv \Delta BMA$, e portanto $\overline{XM} = \overline{AM}$. □

Exercício Resolvido 6.5. Na figura abaixo o triângulo ABC a seguir é isósceles com $\overline{AB} = \overline{CA}$, e os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são bissetrizes dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Mostre que $\overline{BE} = \overline{CD}$.



Solução. A bissetriz de um ângulo é um segmento de reta que divide o ângulo em duas partes iguais. No nosso caso são os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$. Como o triângulo ABC é isósceles:

$$\angle ABC = \angle ACB.$$

E como os pontos D e E fazem parte dos lados que formam ângulos, temos:

$$\angle ABC = \angle DBC \text{ e } \angle ACB = \angle ECB.$$

A partir disso, conseguimos a seguinte relação:

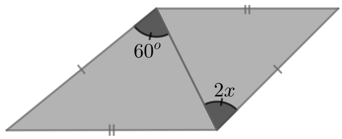
$$\angle DBC = \angle ECB$$
$$\overline{BC} = \overline{CB}$$
$$\angle BCD = \angle CBE.$$

Portanto, $\Delta DBC \equiv \Delta ECB$, então $\overline{BE} = \overline{CD}$. □

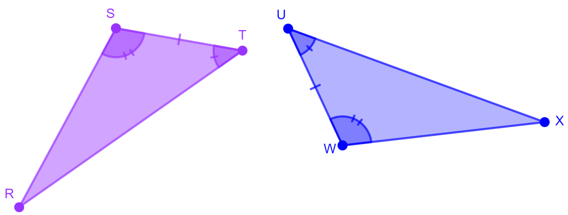
Exercícios de Fixação

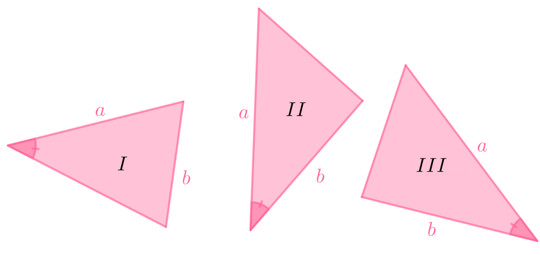
1. Volte ao tema anterior "O Jogo dos Triângulos". Os triângulos que Breno, Caio e Daniel apresentaram eram congruentes? Justifique.

2. Os triângulos da figura abaixo são congruentes. Qual o valor de x?

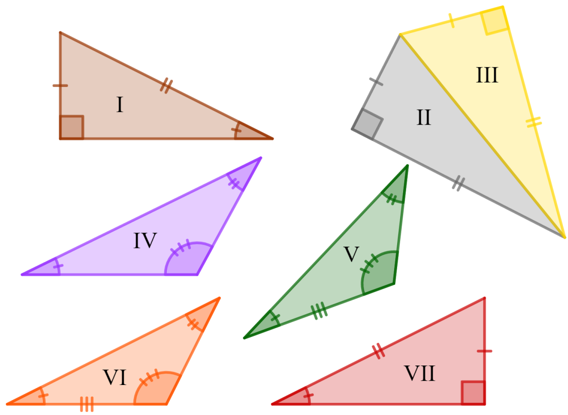


3. Os triângulos a seguir são congruentes? Justifique.





4. A figura a seguir mostra sete triângulos. Verifique as congruências e justifique cada uma delas.



5. Considere os triângulos POT e ISZ e os seguintes dados:

   - O lado OT possui mesma medida que o lado SZ.
   - O ângulo $\hat{T}$ possui mesma medida que o ângulo $\hat{Z}$.
   - O lado PO possui mesma medida que o lado IS

   A partir dessas informações, podemos afirmar que os triângulos são congruentes? Justifique.

Exercícios Propostos

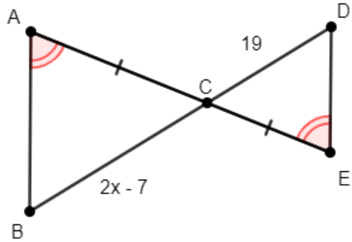
1. Assinale com V (verdadeiro) ou com F (falso) as seguintes afirmações:

   ( ) Ao comparar dois triângulos, se a medida dos ângulos for congruente, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes pelo caso Ângulo, Ângulo e Ângulo;

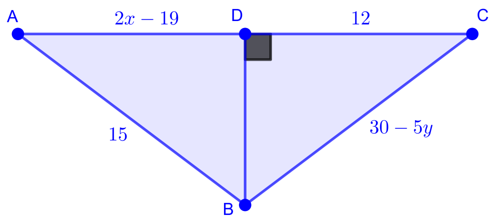
   ( ) Dois triângulos equiláteros podem não ser congruentes.

   ( ) Ao comparar dois triângulos, as medidas dos lados forem congruentes um a um, então, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.

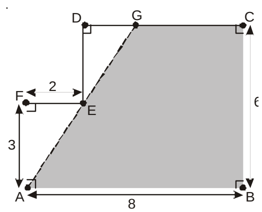
2. Na figura os triângulos ABC e CDE são congruentes. Encontre o valor de x.



3. O triângulo ADB é congruente ao triângulo CDB. Encontre os valores de x e y.

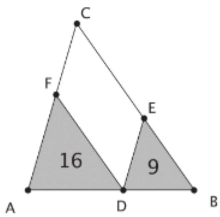


4. (OBMEP - 2005) A figura mostra um polígono $ABCDEF$ no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é a área do polígono $ABCG$?

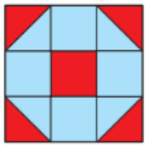


5. (OBMEP - 2013) Na figura abaixo, as retas $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ são

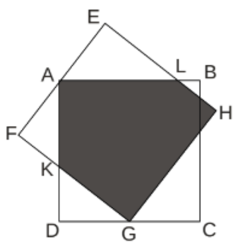
paralelas, respectivamente, aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC. Os triângulos ADF e DBE têm áreas 16 e 9, respectivamente. Qual é a área do quadrilátero $CFDE$?



6. (OBMEP - 2019) O quadrado abaixo está dividido em nove quadradinhos iguais. A área pintada de vermelho mede 6 cm^2. Quanto mede a área pintada de azul?

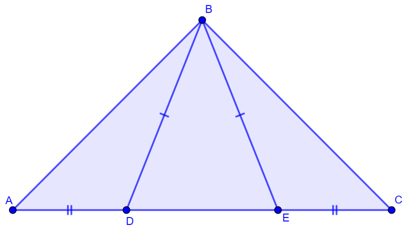


7. (OBM - 2009) Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são quadrados de lado 48 cm. Sabendo que A é o ponto médio de $\overline{EF}$ e G é o ponto médio de $\overline{DC}$, determine a área destacada em cm^2.



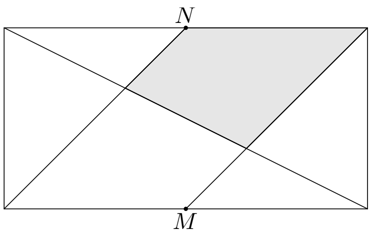
8. Na imagem a seguir temos que o triângulo DBE é isósceles. Os pontos A, D, E e C estão alinhados. Os segmentos AD e

EC possuem mesma medida. Mostre que o triângulo ABC é isósceles.

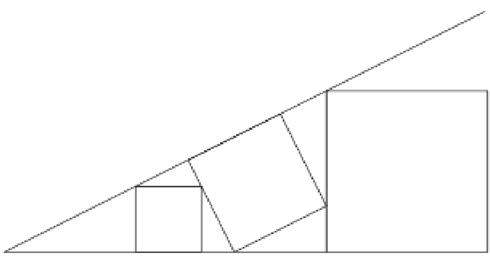


Dica: o que podemos falar sobre os ângulos da base do triângulo DBE? E sobre os $\angle ADB$ e CEB?

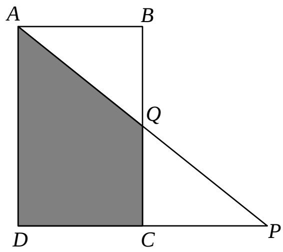
9. (OBMEP - 2013) A figura representa um retângulo de 120 m^2 de área. Os pontos M e N são os pontos médios dos lados a que pertencem. Qual é a área da região sombreada?



10. Na figura abaixo existem três quadrados de lados $3 < 4 < x$. Determine x.



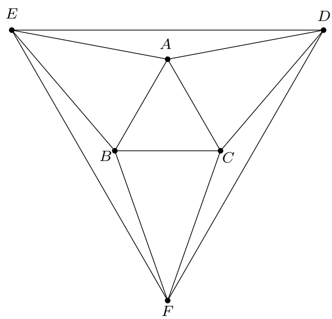
11. (OBM - 2009) Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP. Se $AB = 5\ cm$, $AD = 8\ cm$ e a área da região cinza é $3/4$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC?



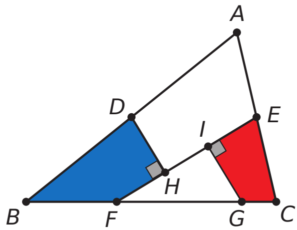
12. $ABCD$ é um paralelogramo e ABF e ADE são triângulos equiláteros construídos exteriormente ao paralelogramo. Prove que FCE também é equilátero.

13. (NOIC - 1989) Seja $ABECDF$ um hexágono (nesta ordem). De modo que $ABCD$ e $AECF$ são paralelogramos. Mostre que $BE \mid\mid DF$.

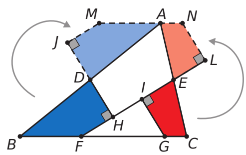
14. Na figura a seguir ΔABC é equilátero e $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{BF} = \overline{AD} = \overline{CD}$ de modo que o ΔABC é interno ao ΔDEF. Prove que ΔDEF é equilátero.



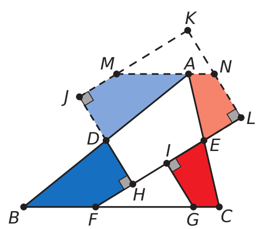
15. (OBMEP - 2011) Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de $\overline{AB}$, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2} \cdot BC$.



(a) Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo $\angle MAN$ é igual a 180°.



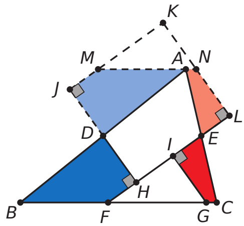
(b) Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido.

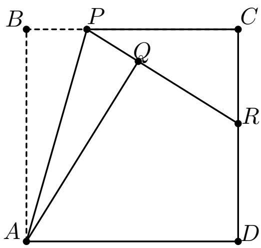
(c) Mostre que $LH = EF$.

(d) Na figura o triângulo ABC tem área 9 e $HJKL$ é um quadrado. Calcule o comprimento de EF.



16. (NOIC - 1995) Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$ e $B\hat{A}C = 36^\circ$. Desenhamos a bissetriz de $A\hat{B}C$ que corta $\overline{AC}$ em D e desenhamos também a bissetriz de $B\hat{D}C$ que corta $\overline{BC}$ em P. Marca-se um ponto R na reta $\overline{BC}$ tal que B é o ponto médio do segmento PR. Mostre que $RD = AP$.

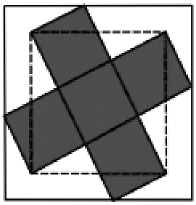
17. (OBM - 2013) Seja $ABCD$ um quadrado de papel de lado 10 e P um ponto sobre o lado $\overline{BC}$. Ao dobrar o papel ao longo da reta AP, o ponto B determina o ponto Q, como na figura a seguir. A reta PQ corta o lado CD em R. Calcular o perímetro do triângulo PCR.



18. (OBM - 2018) Em um paralelogramo $ABCD$, seja M o ponto sobre o lado $\overline{BC}$ tal que $MC = 2BM$ e seja N o ponto sobre

o lado CD tal que $NC = 2DN$. Se a distância do ponto B à reta AM é 3, calcule a distância do ponto N à reta AM.

19. (OBM - 2010) Uma figura no formato de cruz, formada por quadrados de lado 1, está inscrita em um quadrado maior, cujos lados são paralelos aos lados do quadrado tracejado, cujos vértices são vértices da cruz. Qual é a área do quadrado maior?



20. Quatro quadrados são construídos exteriormente nos lados de um paralelogramo. Mostre que os centros destes quadrados também formam um quadrado.