Geometria

POTI/TOPMAT UFPR

Nível 3

3ª edição

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Coordenadores:	Fernanda de Oliveira de Jesus Leonardo Knelsen Mahmut Telles Cansiz
Site:	http://poti.ufpr.br/
E-mail:	poti@ufpr.br
Capa:	Luciana Laroca
Impressão:	Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de produzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinco e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024
Departamento de Matemática - UFPR
Janeiro de 2024

Sumário

Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo "eu já sei, já estudei isso". Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

Equipe POTI/TOPMAT
Nível 3
2024

Aula 1

Introdução

Nesta aula, apresentaremos algumas noções básicas de geometria, a fim de que o aluno adquira recursos capazes de o levar a desenvolver - por si só - conceitos mais gerais sobre estruturas em um plano geométrico.

1.1 Noções Primitivas

1.1.1 Ponto

Costumamos entender o *ponto* como uma mancha arredondada sobre o papel, mas poucos sabem que esse é apenas um jeito de lhe dar cara, face. Um ponto, na verdade, é aquilo de que nada é parte, ou seja, é aquilo que não possui forma alguma, nem nenhuma qualidade, como comprimento, altura ou profundidade, embora estruture (e assim dê forma a) todas as figuras geométricas. A rigor, então, não somos capazes de desenhá-lo, apenas descrevê-lo.

Mas, se o ponto não é nada de imagem, como é possível que ele forme todas as figuras que conhecemos? Isso ainda permanece um mistério, mas, analisando a questão, algo podemos pensar: é só porque não tem uma forma específica que ele é capaz de formar (isto é, modelar, configurar). Quando olhamos a figura de um triângulo, por exemplo, nela há ponto, no entanto, ele não é visto, e assim o triângulo pode aparecer. Com todo o resto acontece o mesmo: o ponto permite que tudo apareça através dele, como uma janela que, aberta, nos dá a ver.

Não podemos, porém, confundi-lo com o que modernamente conhecemos como átomo ou coisa semelhante, pois o ponto não faz "parte" da figura, ele não é elemento dela, mas somente aquilo que possibilita o seu surgimento, pontuando, limitando, definindo. Pois ponto, a rigor, é pura definição, limitação. Pontuar é delimitar, é formar.

Mesmo sabendo disso, muitas vezes temos de lidar com situações em que o ponto precisa "aparecer". Nestes casos, iremos traçá-lo ao modo clássico, como uma bolinha preta, e/ou nomeá-lo com uma letra maiúscula: A, B, C...

Figura 1.1: Ponto A.

Exercício de Fixação 1.1. Há como dizer quantos pontos há na letra "a" impressa neste papel? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 1.1. É possível colocar dois pontos um ao lado do outro sem que haja separação entre eles? Se sim, que figura geométrica teríamos?

Exercício de Aprofundamento 1.2. Explique por que podemos dizer que em duas figuras diferentes (independente do tamanho) encontramos sempre a mesma quantidade de pontos.

1.1.2 Abertura entre Pontos

Abertura entre Pontos é a separação entre dois ou mais pontos, a partir de onde surge a ideia de *distância*.

Normalmente, a abertura entre uma coisa e outra é medida em linha reta, mas esse é apenas um modo de medir. A rigor, a abertura entre dois pontos não pode ser mensurada, pois podemos traçar infinitos caminhos (com tamanhos igualmente infinitos) entre eles.

Figura 1.2: Abertura entre A e B.

Nota 1. Costumamos dar nomes distintos para elementos entre os quais há alguma abertura. Por isso, no exemplo acima, nomeamos de forma diferente os pontos em destaque.

1.1.3 Segmento

Um *segmento* é um caminho possível que conecta dois pontos separados. Representamo-lo com uma linha.

Entre um ponto e outro há infinitos caminhos, isto é, infinitos segmentos.

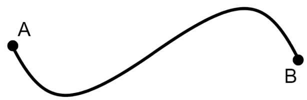


Figura 1.3: Segmento entre os pontos A e B.

Segmento de Reta

Podemos dizer que um *segmento de reta* é o menor caminho entre dois pontos separados. Nesse sentido, ele não é simplesmente uma linha sem curvas, mas, mais propriamente, a menor distância entre o que está afastado.

Notação 1. Um segmento de reta com extremidades A e B pode ser escrito da seguinte maneira: $\overline{AB}$. Diz-se "segmento de reta AB" ou, simplesmente, "segmento AB", já que não trabalharemos com outros tipos de segmentos.

Figura 1.4: Segmento de Reta $\overline{AB}$.

Exercício de Aprofundamento 1.3. Quantos pontos são atravessados (ultrapassados) por um segmento de reta que tem o comprimento de um ponto? Justifique a sua resposta.

Exercício de Aprofundamento 1.4. Se colocássemos infinitos segmentos (independente do tamanho de cada um deles) um ao lado do outro, teríamos um segmento de tamanho infinito, certo? Tomemos agora o segmento $\overline{AB}$, com 1 cm. Podemos dividi-lo quantas vezes quisermos, de modo que, realizando-o infinitas vezes, teremos infinitos fragmentos dele, cuja união lado a lado não resultará em um segmento de tamanho infinito. Como podemos conciliar este resultado com o que fora dito no início da questão?

1.1.4 Reta

Uma reta é o menor caminho entre dois pontos que "moram" no infinito, isto é, que estão onde não conseguimos ver.

Aqui vale um parenteses: como a geometria lida com o visível, o infinito (entendido como aquilo que não tem definição) tem de ser pensado exatamente a partir da não-visão, de modo que o colocamos sempre fora de onde conseguimos ver.

Sendo assim, não podendo ter à frente os pontos no infinito, costumamos pegar outros dois pontos (visíveis) atravessados pela reta para representá-la.

Notação 2. Dada uma reta que passa pelos pontos A e B, podemos escrevê-la da seguinte forma: $\overleftrightarrow{AB}$. Diz-se "reta AB". É comum também representarmos as retas com as letras minúsculas do alfabeto. Se dissermos, por exemplo, que a reta r passa por A e B, então $r = \overleftrightarrow{AB}$.

Figura 1.5: Reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Nota 2. Observe que tanto na notação $\overleftrightarrow{AB}$ quanto na figura as extremidades da reta são representadas com flechas. Isso indica que ela se estende para o infinito, isto é, suas extremidades não podem ser vistas e, portanto, seu tamanho é incomensurável (não pode ser medido).

Exercício de Aprofundamento 1.5. Dados dois pontos quaisquer, quantas retas passam por eles? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 1.6. Os primeiros matemáticos diziam que uma reta é apenas comprimento, e não tem nada de altura. Você consegue explicar o motivo pelo qual eles diziam isso?

Semirreta

Semirreta é o caminho mais curto entre um ponto que conseguimos ver e outro que mora no infinito.

Notação 3. Seja A o ponto que conseguimos ver e B um ponto qualquer atravessado pela semirreta, podemos escrevê-la assim: $\overrightarrow{AB}$. Diz-se “semirreta AB”.

Nota 3. O ponto A é chamado de “origem da semirreta”.

Figura 1.6: Semirreta $\overrightarrow{AB}$.

1.1.5 Plano ou Superfície

Podemos dizer que há infinitos pontos e, assim, infinitos caminhos que os conectam. A união desses caminhos é o que podemos chamar de “plano” ou “superfície”.

Há apenas duas qualidades no plano: comprimento e altura.

Notação 4. Costumamos escrever o plano com uma letra grega minúscula, como α, β, γ etc.

Nota 4. Nosso curso tratará dos conhecimentos relativos à geometria plana, e não espacial, então dificilmente falaremos de mais de um plano. Assim, não o precisando nomear, reservaremos as letras gregas também para outros elementos geométricos.

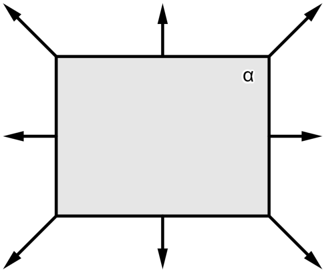


Figura 1.7: Plano α.

1.2 Retas Paralelas e Retas Concorrentes

Duas retas distintas são *paralelas* se, e somente se, não atravessam nenhum ponto em comum.

Por outro lado, duas retas são *concorrentes* se, e somente se, atravessam um único ponto em comum.

Notação 5. Costumamos representar o paralelismo entre retas da seguinte forma: dadas r e s paralelas, escrevemos $r \,/\!/\, s$.

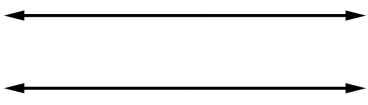


Figura 1.8: Retas Paralelas.

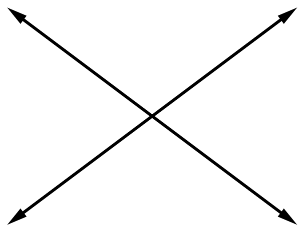


Figura 1.9: Retas Concorrentes.

Nota 5. Se duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, atravessam o ponto P, dizemos que elas se *intersectam* em P, isto é, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = P$. De outra forma, se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, então $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$.

Nota 6. Se as retas r e s atravessam mais de um ponto em comum, necessariamente elas são iguais. Neste caso, dizemos que r e s são *coincidentes*, e escrevemos $r = s$.

1.3 Colinearidade

1.3.1 Pontos colineares

Dois ou mais pontos são *colineares* se uma mesma reta os atravessa.

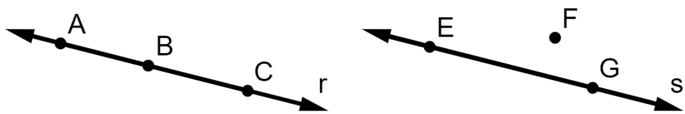


Figura 1.10: Os pontos A, B e C são colineares. Já os pontos E, F e G não são colineares.

Nota 7. Se o ponto A é atravessado pela reta r, podemos escrever $A \in r$ (diz-se "A pertence à r). Desse modo, se A, B e C são colineares à reta r, então $A, B, C \in r$.

Exercício de Fixação 1.2. Dois pontos são sempre colineares? Por quê?

Exercício de Fixação 1.3. Os vértices de um triângulo são sempre não colineares? Por quê?

Exercício de Fixação 1.4. Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos, qual a probabilidade de apenas um deles não ser colinear aos demais?

Exercício de Fixação 1.5. Sejam T e U pontos distintos, ambos atravessados pelas retas r e s. Podemos concluir que $r = s$? Justifique.

1.3.2 Segmentos (de reta) colineares

Dois ou mais segmentos são *colineares* se todos os pontos atravessados por eles também são atravessados por uma mesma reta.

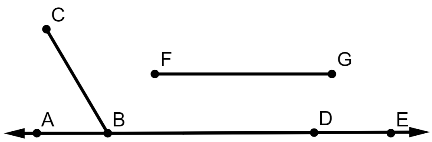


Figura 1.11: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são colineares. Já os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ ou $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ não são colineares.

Exercício de Fixação 1.6. Na figura acima, que outros segmentos são colineares e que outros não são colineares? Anote todos!

1.4 Congruência de Segmentos

Uma relação entre segmentos é dita "congruência" (símbolo: $\equiv$) se as seguintes propriedades são satisfeitas:

i. *Reflexividade.* Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (diz-se: $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{AB}$).

ii. *Simetria.* Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.

iii. *Transitividade.* Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

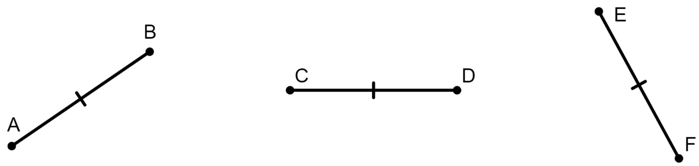


Figura 1.12: Congruência de segmentos.

Nota 8. Na figura acima, há um pequeno traço no meio de cada segmento, isso quer dizer que eles são congruentes. Ou seja, segmentos com a mesma quantidade de traços são sempre congruentes. Mas, atenção, esse caso vale apenas para segmentos da mesma figura!

Nota 9. Em geometria, costumamos dizer que duas figuras são congruentes se elas possuem a mesma forma e o mesmo tamanho.

Exercício de Fixação 1.7. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são congruentes. Por quê?

1.5 Adição de Segmentos

A partir da ideia de congruência, podemos "somar" segmentos. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos quaisquer, $\overrightarrow{EG}$ uma semirreta com origem em E e $F \in \overrightarrow{EG}$. Se $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{FG}$, então dizemos que $\overline{EG} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

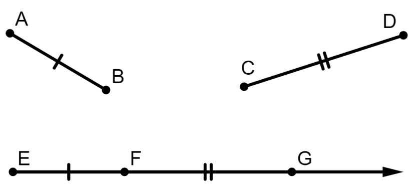


Figura 1.13: Adição de Segmentos.

Nota 10. Se o segmento $\overline{CD}$ é igual a soma de n segmentos congruentes ao segmento $\overline{AB}$, dizemos que $\overline{CD} = n\overline{AB}$.

1.6 Ponto Médio de um Segmento

O ponto M é um *ponto médio* de $\overline{AB}$ se, e somente se, M estiver "dentro" de $\overline{AB}$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

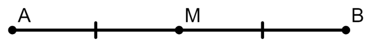


Figura 1.14: M é ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

1.7 Perpendicularidade

Sejam r e s duas retas concorrentes, cuja intersecção é o ponto M, e A, B pontos de r, sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$. Considere também um ponto qualquer C da reta s, diferente de M. Dizemos que r e s são *perpendiculares* se $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$.

Notação 6. Simbolizamos duas retas r e s perpendiculares por $r \perp s$.

1.8 Projeção de um Ponto sobre uma Reta

Damos o nome de "projeção ortogonal de P sobre r" à intersecção entre a reta r e sua perpendicular que passa pelo ponto P.

Notação 7. Costumamos chamar a projeção de P sobre r de "Ponto P' ".

1.9 Medição de Segmentos

A medida de um segmento é o que chamamos de "comprimento".

Há muitas unidades de medida para o cálculo do comprimento, a escolha de uma delas depende do contexto no qual se está. Podemos usar centímetros, metros, quilômetros, etc. Há casos, inclusive, em que não haverá unidade específica, ficando estabelecido apenas um valor x para a medida. Por exemplo, $AB = 5$.

Notação 8. A medida de um segmento $\overline{AB}$ é denotada por AB, sem a barra em cima.

Assim, tomando $PQ = 6$ e $QR = 7$, temos que o segmento $\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ mede $PQ + QR = 6 + 7 = 13$.

1.9.1 Distância Geométrica

Dados dois pontos, A e B, dizemos que a *distância geométrica* (ou apenas *distância*) entre eles é igual ao comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$.

Notação 9. Escrevemos a distância entre A e B do seguinte modo: $d_{A,B}$.

1.10 Coordenadas Cartesianas

Em meados do século XVII, o matemático René Descartes criou um método capaz de mapear figuras geométricas utilizando eixos perpendiculares com escalas: o eixo das abscissas (comumente chamado de "eixo x") e o eixo das ordenadas ("eixo y"). A primeira normalmente se dispõe horizontalmente, enquanto que a segunda, verticalmente. A esse mapa, damos o nome de "plano cartesiano".

A ideia é a de que, com um sistema de orientação em que o centro (chamado também de "origem") é a intersecção entre os eixos x e y, consigamos escrever algebricamente figuras geométricas. Cada eixo funciona como uma régua medidora na qual o ponto zero é a origem e as semirretas formadas a partir dele, as orientações, que são divididas em duas classes: positivas e negativas. As semirretas que avançam para a direita e para cima representam os números reais positivos; e as outras duas, os números reais negativos.

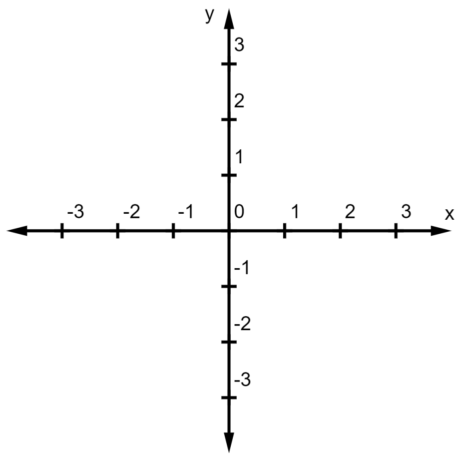


Figura 1.15: Plano Cartesiano.

Desse modo, podemos mapear pontos, retas ou qualquer outra figura utilizando apenas números, equações... Mas, para que vejamos isso, devemos antes aprender a nos localizar no plano cartesiano.

Façamos assim: pensemos os eixos como coordenadas que nos dizem para onde devemos olhar, ou seja, quanto devemos ir para os lados e/ou para cima ou para baixo a partir da origem. Se quisermos andar para os lados, temos de olhar para o eixo x; para cima e para baixo, olhamos para o eixo y.

Notação 10. Para simplificar, usamos a seguinte notação: (x, y). Do lado esquerdo, escrevemos quanto devemos andar no eixo x; do lado direito, quanto devemos andar em y.

Assim, se escrevermos $(2, 3)$, sabemos que devemos andar duas unidades para a direita e três para cima, como na figura abaixo. O lugar onde paramos é justamente o *ponto* $(2, 3)$.

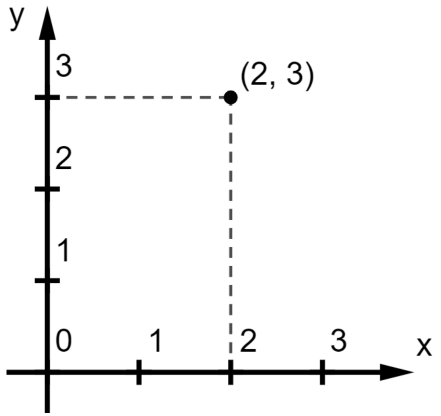


Figura 1.16: Representação gráfica do ponto de coordenadas $(2, 3)$.

Podemos também escrever retas, como, por exemplo, a reta (x, x). Isto é, o mesmo tanto que andarmos em x, teremos de andar em y.

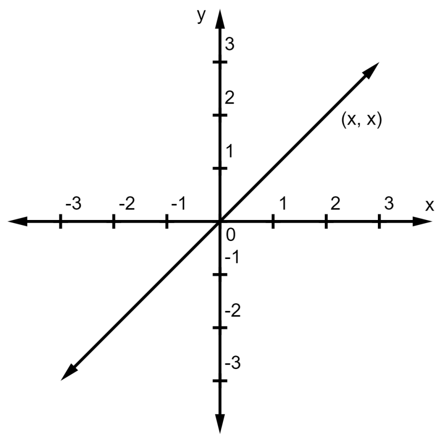


Figura 1.17: Representação gráfica do conjunto de todos os pontos da forma (x, x), $x \in \mathbb{R}$: uma reta.

Exercício de Aprofundamento 1.7. Em coordenadas cartesianas, como poderíamos escrever uma reta que passa pela origem e é perpendicular à (x, x)?

Exercício de Fixação 1.8. Desenhe o plano cartesiano e marque os pontos $(1, 2)$, $(-2, 3)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$ e $(2, -2)$.

Exercício de Fixação 1.9. Desenhe o plano cartesiano e trace a reta que atravessa os pontos $(2, 2)$ e $(-2, 3)$.

Exercício 1.1. Se $A = (1, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (3, 3)$ e $D = (3, 1)$, que figura geométrica os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ formam?

Exercício 1.2. Usando do exercício acima, calcule $d_{A,B}$, $d_{B,C}$, $d_{C,D}$, $d_{D,A}$ e $d_{(0,3),B}$.

1.10.1 Distância entre Pontos no Plano Cartesiano

Para calcular a *distância geométrica* entre dois pontos quaisquer no Plano Cartesiano, temos a seguinte fórmula: sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos no plano, temos que $d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exercício de Fixação 1.10. Calcule a distância entre os pontos $(1, 4)$, $(-2, 11)$ e $(3, -7)$.

1.11 Razão entre Segmentos

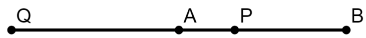
Razão é sempre a divisão entre dois números ou elementos. Assim, se quisermos estabelecer a razão entre segmentos, estaremos pensando em seus comprimentos. Se $AB = 2$ e $CD = 3$, então a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ será $\frac{2}{3}$.

Notação 11. Escrevemos a razão entre dois segmentos do mesmo modo que a razão entre números. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, então a razão entre eles será $\frac{AB}{CD}$.

Nota 11. Dizemos que quatro segmentos de reta são *proporcionais* quando a razão entre os comprimentos de dois deles forem iguais à razão entre os comprimentos dos dois restantes.

1.11.1 Divisão Harmônica

Dizemos que os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento $\overline{AB}$, quando $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$.



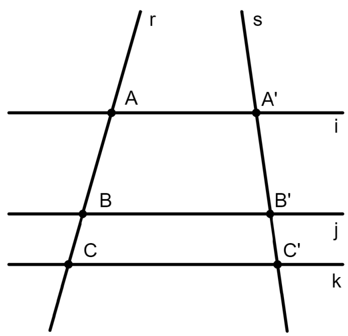
Como $\frac{PA}{PB} = k = \frac{QA}{QB}$, então os pontos P e Q dividem $\overline{AB}$ na mesma razão. Estes pontos, portanto, são denominados "conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão k"

1.11.2 Teorema de Tales

Um *teorema* matemático é uma afirmação que pode ser demonstrada (provada) a partir de alguns argumentos lógicos, usando como base princípios que orientam o que está sendo estudado.

O *Teorema de Tales* afirma que retas paralelas cortadas ou intersectadas por retas transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes.

Observe a figura abaixo, onde $i // j // k$, e r e s são retas transversais.



Daí, temos o seguinte: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

Exercício de Aprofundamento 1.8. Com base no que fora dito anteriormente, mostre que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

1.12 Construção da Circunferência

Agora, mostraremos o processo de construção de uma circunferência, para que mais tarde possamos verificar as suas propriedades.

Tome o segmento $\overline{CA}$, com C fixado, tal que $d_{CA} = r$. Em seguida, gire A em torno de C. O contorno formado por A é a circunferência de raio r e centro em C.

Notação 12. Para a circunferência de raio r e centro em C damos o nome de (C, r).

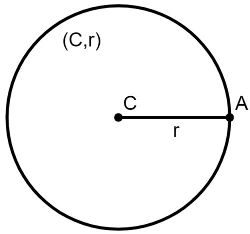


Figura 1.18: Circunferência (C, r)

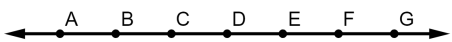
Nota 12. Chamamos "círculo" a união entre a parte interna da circunferência (C, r) e a própria circunferência (C, r).

Problemas Propostos

Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Abaixo estão alguns pontos distintos atravessados por uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses pontos e não atravessam o ponto C?



2. Seja $AB = 40$ cm, determine o comprimento de $\overline{AC}$ nos seguintes casos:

   a) Quando $CB = 16$ cm.

   b) Quando $AC - CB = 2$ cm.

   c) Se $AC = 4x$ e $CB = 2x + 4$

3. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Se $AM = 4x - 10$ e $MB = x + 14$, qual o valor de x?

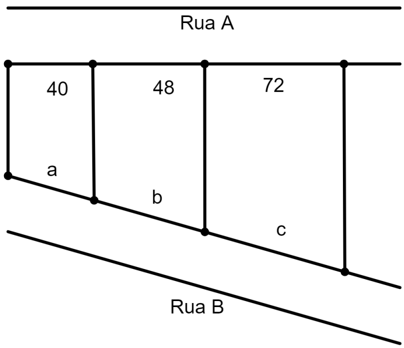
4. Os pontos A, B e P são distintos e são atravessados por uma mesma reta, com A situado à esquerda de B. Se $PA > AB$ e $PB < AB$, o que podemos dizer sobre a ordem dos três pontos na reta?

5. Sejam A, B, C e D pontos consecutivos atravessados por uma mesma reta. Se $AD = 2BC$ e $AB + CD = 20$, determine o valor de AD.

6. (Portal do Saber - OBMEP) Em uma reta se encontram os quatro pontos consecutivos A, B, C e D, com $AB = AC - 3$, $AB + CD = 4$ e que satisfazem a seguinte relação: $3AB - BD - 2CD = 3$. Determine as medidas AD e AB.

7. (Portal do Saber - OBMEP) Os pontos A, B, C e D estão sobre uma mesma reta e são consecutivos. Sabendo que $BC = CD$ e que $AC \cdot BC = 40$, determine o valor de $AD^2 - AB^2$.

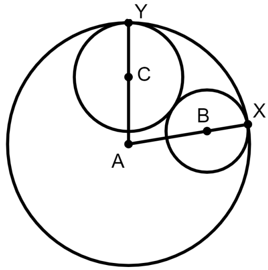
8. O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura abaixo. Determine os valores de a, b e c, em metros, sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 240$ metros.



9. ▲ (Fuvest - SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede $0,6$ m. Qual a altura do poste? (esse exercício lembra muito a história de como Tales de Mileto mediu a altura de algumas pirâmides do Egito, séculos antes de Cristo. Pesquise!)

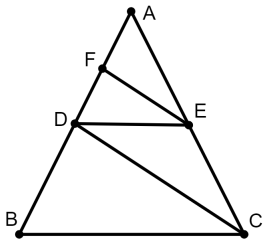
10. ▲ (Portal do Saber OBMEP) Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, contidos numa mesma reta, de modo que $AB = BC$, com $A \neq C$. É sempre verdade que $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{AB}$? Justifique.

11. ♦ (MAθ 1987) Na figura abaixo, a circunferência de centro em B está tangenciando a circunferência de centro em A (isto é, ambas as circunferências atravessam apenas um ponto em comum) e a circunferência de centro em C; a circunferência de centro em C está tangenciando a circunferência de centro em A e a circunferência de centro em B. Se $AB = 6$, $AC = 5$ e $BC = 9$. Qual o comprimento de $\overline{AX}$?



12. ♦ Prove que em uma divisão harmônica com $k > 1$, temos que $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ}$. Em seguida, prove que, com $k < 1$, temos $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} - \frac{1}{AQ}$.

13. ♦ Na figura, $\overline{DE} // \overline{BC}$ e $\overline{CD} // \overline{EF}$. Prove que $AD^2 = AB \cdot AF$.

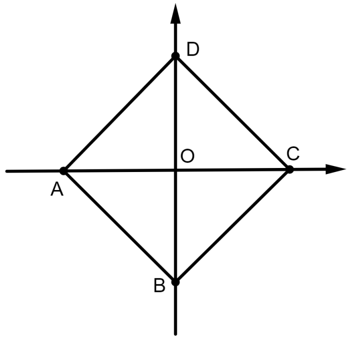


14. ♦ Sendo O o ponto médio de $\overline{AB}$ em uma divisão harmônica, prove que: $OA^2 = OP \cdot OQ$.

15. ♦ (UFRGS) Se um ponto P do eixo das abscissas é equidistante (está à mesma distância) dos pontos $A = (1, 4)$ e $B = (-6, 3)$, a abscissa de P vale quanto?

16. ♦ Sejam M e N conjugados harmônicos na razão $k > 1$ do segmento $\overline{AB}$ de comprimento 1. Qual é a distância entre os divisores harmônicos de $\overline{AB}$?

17. ♦ Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 7 cm. Obtenha as coordenadas dos quatro vértices (quatro cantos) do quadrado.



18. ♦ Determine x para que o ponto $P = (x, 2x + 3)$ seja equidistante dos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-2, 3)$.

19. ♦ Seja ABC um triângulo equilátero (isto é, com todos os lados iguais) de vértices $A = (2, 0)$, $B = (8, 0)$ e $C = (5, 3\sqrt{3})$. Seja (C, r) a circunferência de raio r, que atravessa os pontos A, B e C. Calcule o valor de r e descubra as coordenadas do ponto C, centro de (O, r).

20. ♦ O *Teorema da Base Média* diz o seguinte: "o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado".

    Seja o triângulo ABC, cujas coordenadas são dadas por $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, e sejam M e N os pontos médios respectivos aos lados AB e AC.

    Mostre, usando a ideia de distância geométrica no plano cartesiano, que $MN = \frac{BC}{2}$.

21. ★ Usando o *Teorema de Tales*, prove o *Teorema de Menelaus*, que diz o seguinte:

    Se uma reta r intersecta os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ (em pontos distintos) ou as prolongações num triângulo ABC nos pontos N, L e M, respectivamente, então

$$\frac{NA}{NB} \cdot \frac{LB}{LC} \cdot \frac{MC}{MA} = 1$$

22. ★ (Razão áurea) Dizemos que um ponto C em um segmento $\overline{AB}$ divide este segmento *em média e extrema razão*, ou ainda, na *razão áurea* se

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}.$$

Sabendo que C_1 divide um segmento $\overline{AB}$ em média e extrema razão, construímos pontos $C_2, C_3, C_4, \ldots$ de forma que $AC_2 = C_1B$, $AC_3 = C_2C_1$, $AC_4 = C_3C_2$, $\ldots$

Figura 1.19: Construção dos pontos C_n para $n \leq 4$

Mostre que C_n divide o segmento $\overline{AC_{n-1}}$ em média e extrema razão, para todo $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Aula 2

Ângulos

A palavra "ângulo", na antiguidade, significava dobra, canto, esquina, isto é, o encontro entre dois caminhos ou entre qualquer outra coisa, como duas paredes, dois pedaços de madeira etc. Por esse motivo, a matemática se apropriou desse nome, e assim podemos dizer que ângulo é o que é formado a partir do encontro entre duas retas.

Retas paralelas, por exemplo, quando não colineares, não possuem nenhum ângulo, elas não se encontram, não formam esquinas, cantos. Retas concorrentes, por outro lado, formam ângulos.

Assim, tomando dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (como na figura abaixo), que se intersectam no ponto O, podemos dar o nome de $D\hat{O}B$ ao ângulo referente a $\overline{OD}$ e $\overline{OB}$. Note, assim, que estamos representando o traçado que passa pelos pontos D, O e B e a dobra ($\hat{}$) formada em O.

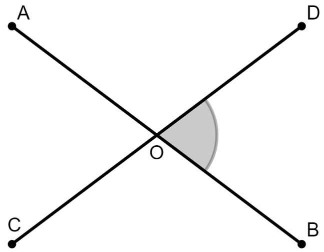


Figura 2.1: Ângulo $D\hat{O}B$.

Nota 1. O ponto O é o "*vértice*" do ângulo, enquanto que os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{OB}$ são os seus "*lados*".

Exercício de Fixação 2.1. Na figura acima, há apenas o ângulo $D\hat{O}B$? Se não, quais os demais ângulos da figura?

Bom, agora que conseguimos entender como se formam os ângulos, vamos conhecer suas classificações e propriedades.

2.1 Ângulos Consecutivos, Adjacentes e Opostos pelo Vértice

2.1.1 Ângulos Consecutivos

Podemos também analisar a relação entre dois ângulos. Assim, no caso de eles compartilharem de um mesmo lado, chamamo-los "ângulos consecutivos".

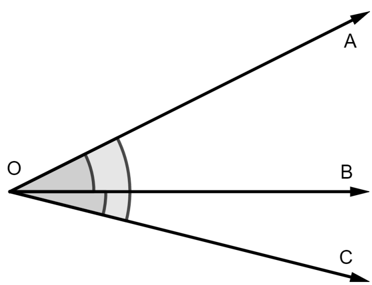


Figura 2.2: Ângulos Consecutivos.

Exercício de Fixação 2.2. Na figura, podemos ver os ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$, quais deles são consecutivos uns com os outros? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 2.1. Se pudermos somar dois ângulos, qual o resultado da soma $A\hat{O}B + B\hat{O}C$?

2.1.2 Ângulos Adjacentes

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se não estão um dentro do outro. No caso da figura anterior, temos que $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Exercício de Fixação 2.3. Desenhe os ângulos $T\hat{O}H$ e $T\hat{O}J$ de duas formas distintas: na primeira, eles deverão ser apenas consecutivos; e, na outra, adjacentes.

2.1.3 Ângulos Opostos pelo Vértice

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro. Veja na figura a seguir, $A\hat{O}C$ é oposto a $D\hat{O}B$:

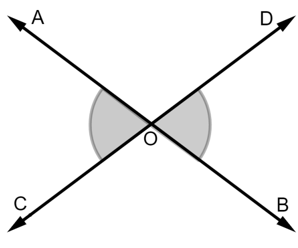


Figura 2.3: Ângulos Opostos pelo Vértice.

Note que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas e $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ também são.

Exercício de Fixação 2.4. $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ são opostos? Explique a sua resposta utilizando a definição de ângulos opostos.

2.2 Congruência de Ângulos

Uma relação entre ângulos é dita "congruência" (símbolo: $\equiv$) se as seguintes propriedades são satisfeitas:

i *Reflexividade.* Todo ângulo é congruente a si mesmo: $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}B$ (diz-se: $A\hat{O}B$ é congruente a $A\hat{O}B$).

ii *Simetria.* Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$, então $C\hat{O}D \equiv A\hat{O}B$.

iii *Transitividade.* Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ e $C\hat{O}D \equiv E\hat{O}F$, então $A\hat{O}B \equiv E\hat{O}F$.

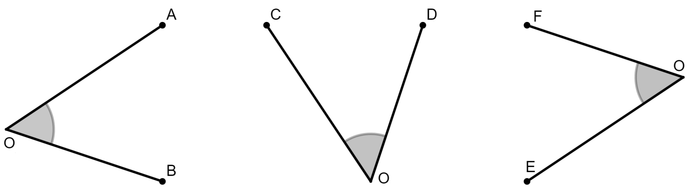


Figura 2.4: Congruência de Ângulos.

Exercício de Fixação 2.5. Ângulos opostos são congruentes? Por quê?

2.3 Adição de Ângulos

Se a semirreta $\overrightarrow{OB}$ for interna ao ângulo $A\hat{O}C$, dizemos que $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C$.

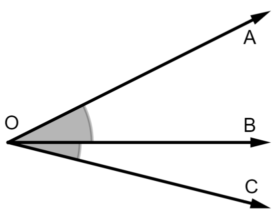


Figura 2.5: Adição de Ângulos.

Nota 2. Dado um ângulo $X\hat{O}Y$ que é a soma de n vezes um ângulo qualquer $A\hat{O}B$, dizemos que $X\hat{O}Y$ é um múltiplo de $A\hat{O}B$, de modo que podemos escrevê-lo $n(A\hat{O}B)$.

2.4 Bissetriz de um Ângulo

Uma semirreta $\overrightarrow{OB}$ interna ao ângulo $A\hat{O}C$ pode ser chamada de "bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$", se $A\hat{O}B \equiv B\hat{O}C$.

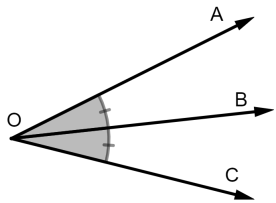
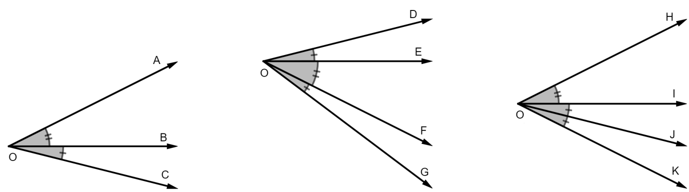


Figura 2.6: Bissetriz de um Ângulo.

Nota 3. Na figura acima, há um pequeno traço no meio dos arcos que representam os ângulos. Em cada um dos ângulos há apenas um traço (isto é, ambos têm a mesma quantidade de traços), isso quer dizer que eles são congruentes. Mas, atenção, esse caso vale apenas para ângulos da mesma figura!

Exercício de Fixação 2.6. Quais dos ângulos a seguir são congruentes?



Exercício de Fixação 2.7. Nas figuras acima, há alguma bissetriz? Qual?

Exercício 2.1. Seja $\overrightarrow{OY}$ uma semirreta interna ao ângulo $A\hat{O}B$. Se $A\hat{O}Y \equiv C\hat{O}D$ e $C\hat{O}D \equiv Y\hat{O}B$, podemos dizer que $\overrightarrow{OY}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$? Por quê?

Exercício Resolvido 2.4.1. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.

Solução. Sejam $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ as bissetrizes dos ângulos opostos pelo vértice $A\hat{O}B = \alpha$ e $C\hat{O}D$ (faça a figura, para que visualize melhor a solução), com $D\hat{O}A = \gamma$. Então, por um lado, temos $X\hat{O}A + A\hat{O}D + D\hat{O}Y = \frac{\alpha}{2} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma$. Por outro lado, temos que $2\alpha + 2\gamma = 360°$, de forma que $\alpha + \gamma = 180°$. Então, $X\hat{O}Y$ é um ângulo raso - e $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são, realmente, semirretas opostas. □

2.5 Medição de Ângulos

Tome dois segmentos de reta do mesmo tamanho, $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, tal que uma das suas extremidades (neste caso, o ponto O) seja o vértice do ângulo $A\hat{O}B$. Seja, agora, (O, r) a circunferência centrada em O e de raio OA (isto é, $r = OA$). Assim, podemos dizer que o ângulo $A\hat{O}B$ é o arco de extremidades A e B que pertence à (O, r). A rigor, todos os ângulos podem ser considerados arcos, de modo que podemos estabelecer a sua medida a partir da ideia de frações da circunferência.

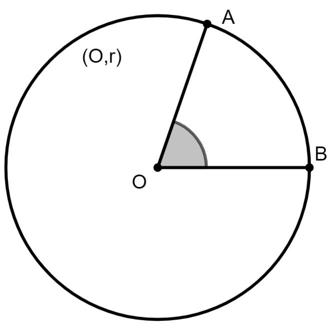


Figura 2.7: Ângulo $A\hat{O}B$ como fração de (O, r).

Nota 4. Ângulos congruentes têm a mesma medida.

2.5.1 Graus

Por convenção, costumamos dizer que um círculo (ou a abertura da sua circunferência) tem 360° (diz-se: 360 graus). Ou seja, se abrirmos o ângulo $A\hat{O}B$, mantendo fixa $\overrightarrow{OA}$, até que B complete uma volta ao redor de O, teremos percorrido 360°.

Assim, se o ângulo α é um arco que corta $\frac{1}{4}$ do círculo, temos que a sua medida é de 90°.

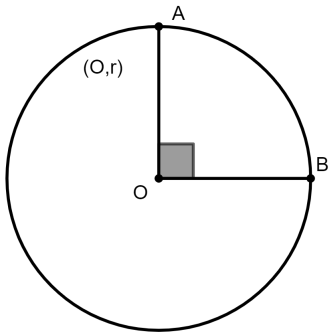
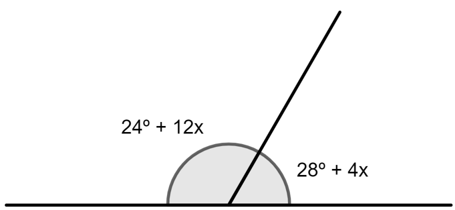


Figura 2.8: Ângulo de 90°.

Nota 5. Costumamos representar os ângulos de 90° graus com um quadrado, ao invés de um arco.

Exercício de Fixação 2.8. Dadas as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, desenhe $A\hat{O}B = 180°$. Que figura geométrica teremos traçada entre os pontos A e B?

Exercício 2.2. Determine o valor de x.



Nota 6. Observe, agora, que podemos somar ângulos da seguinte maneira: se $A\hat{O}B = 35°$ e $B\hat{O}C = 45°$ são adjacentes, então $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 35° + 45° = 80°$.

Nem sempre, porém, conseguimos um corte perfeito em termos de graus, de modo que é necessário estabelecer uma medida para porções ainda menores de ângulos (tal como os milímetros o são para os centímetros). Essas porções menores são chamadas de "minutos" e "segundos". Um grau ($1°$) equivale a sessenta minutos e um minuto equivale a sessenta segundos ($0,5°$, por exemplo, vale 30 minutos).

Representamos os minutos com o símbolo $'$; e os segundos com $''$. Ou seja, um ângulo de 10 graus, 20 minutos e 30 segundos pode ser escrito da seguinte maneira: $10°20'30''$.

Exercício de Fixação 2.9. Quanto é $11°55'13'' + 25°10'24''$?

2.5.2 Radianos

Outra maneira de medir ângulos é pelo que chamamos de "radianos". Tal como dizemos que um círculo tem $360°$, podemos também afirmar que ele tem 2π radianos. Assim, $\frac{360°}{2\pi} = 1$.

Exercício de Fixação 2.10. Escreva os seguintes ângulos em radianos: $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $180°$, $185°$, $270°$ e $300°$.

2.6 Ângulos Agudo, Reto, Obtuso, Raso, Convexo e Côncavo

O *ângulo agudo* é um ângulo menor do que $90°$. Se α é um ângulo agudo, então $0 < \alpha < 90°$.

O *ângulo reto* é um ângulo com exatamente $90°$.

O *ângulo obtuso* é um ângulo com medida entre $90°$ e $180°$, isto é, $90° < \alpha < 180°$.

O *ângulo raso* é um ângulo com medida $0°$ ou $180°$.

O *ângulo convexo* é um ângulo com medida entre $0°$ e $180°$, isto é, $0° < \alpha < 180°$.

O *ângulo côncavo* é um ângulo com medida entre 180° e 360°, isto é, $180^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Exercício de Fixação 2.11. Faça desenhos representando cada um dos ângulos acima.

2.7 Ângulos Complementares e Suplementares

Dois ângulos são *complementares* se a soma das suas medidas resulta em 90°.

Dois ângulos são *suplementares* se a soma das suas medidas resulta em 180°.

2.8 Retas Paralelas cortadas por uma Transversal.

Dadas duas retas paralelas e não colineares, r e s. Se as atravessarmos com uma reta transversal t, obteremos oito ângulos, como mostra a figura abaixo. Esses ângulos serão suplementares ou congruentes.

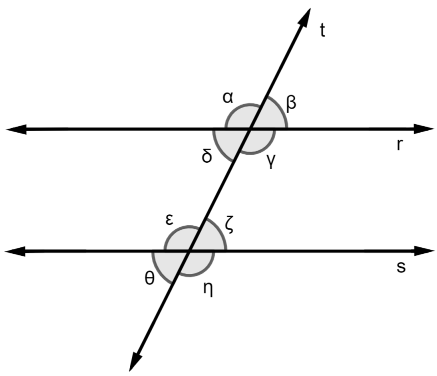


Figura 2.9: Retas Paralelas cortadas por uma Transversal

Daí, obtemos as relações nomeadas a seguir.

2.8.1 Ângulos Correspondentes

São ângulos que ocupam a mesma posição em retas distintas. No caso descrito acima, os ângulos correspondentes são congruentes. Desse modo: $\alpha \equiv \epsilon$; $\beta \equiv \zeta$; $\gamma \equiv \eta$; $\delta \equiv \theta$.

2.8.2 Ângulos Alternos Internos

Observe que o nome desses ângulos já indica a posição por eles ocupada. A palavra “interno” diz que esses ângulos se localizam na região interior de $r//s$, e a palavra “alterno” nos diz que eles aparecem em posições alternadas com relação à reta t.

Os ângulos alternos internos são congruentes. Assim, na *Figura 11*, temos que $\delta \equiv \zeta$ e $\gamma \equiv \epsilon$.

Exercício de Fixação 2.12. Se os ângulos $\alpha = (2x+10)^\circ$ e $\beta = (4x-30)^\circ$ são alternos internos, qual o valor de x?

2.8.3 Ângulos Alternos Externos

Esses ângulos se localizam na região exterior de $r/\!/s$ e, ao mesmo tempo, estão em lados opostos da reta t.

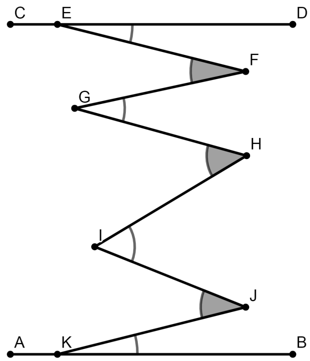
Os ângulos alternos externos também são congruentes. Desse modo, temos que, na figura acima: $\beta \equiv \theta$ e $\alpha \equiv \eta$.

Exercício de Aprofundamento 2.2. Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180 graus (usaremos essa propriedade para resolver alguns dos problemas abaixo).

Exercício de Aprofundamento 2.3. Qual a medida dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados?
Dica: calcule a quantidade de triângulos que podemos traçar a partir da conexão de um dos vértices do polígono com os demais.

Exercício 2.3. (OMM 2009) $ABGH$ é um quadrado no exterior do hexágono regular $ABCDEF$. Quanto mede o ângulo $H\hat{F}A$?

Exercício 2.4. Na figura abaixo, onde $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$, mostre que a soma dos ângulos brancos é igual à soma das medidas dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de "bicos" no desenho e o chamamos popularmente de "Teorema dos Bicos".



Problemas Propostos

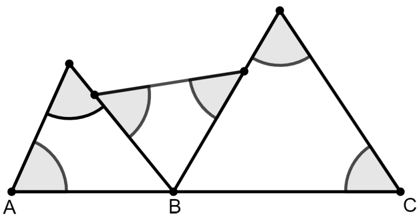
Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

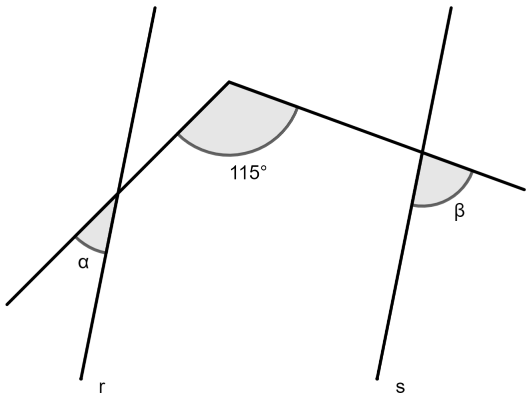
1. ● (OBMEP 2006) Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana da direita. Qual a medida do ângulo x?

2. ● Qual é o ângulo que excede o seu complemento em 76°?

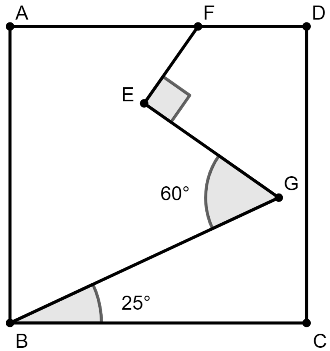
3. ● (OBMEP 2014) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



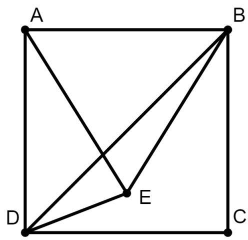
4. ● Considere $r \mathbin{/\mkern-5mu/} s$, determine $\alpha + \beta$.



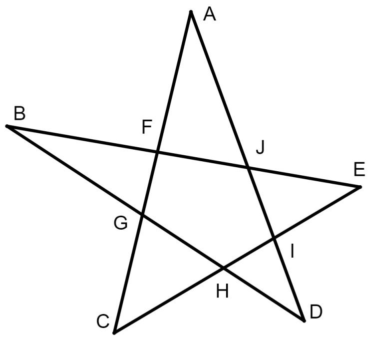
5. ▲ Determine $A\hat{F}E$, sabendo que ABCD é um quadrado (ou seja, cada um dos seus ângulos internos possui 90 graus).



6. ▲ (OMM 2005) Observe a figura abaixo. Qual é o valor do ângulo $B\hat{D}E$, sabendo que $ABCD$ é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero (que possui todos os lados iguais)?

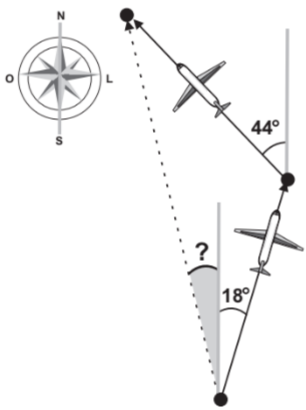


7. ▲ (OMM 2007 - Adaptada) Na estrela $ABCDE$, sabemos que $G\hat{B}F = 20°$, $G\hat{H}I = 130°$ e $G\hat{F}J = 100°$. Qual o valor de $G\hat{C}H$?

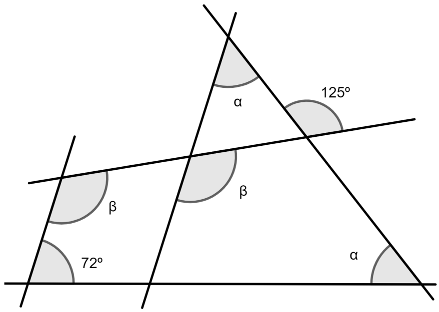


8. ▲ Em um triângulo, o maior entre dois lados quaisquer é o lado oposto ao ângulo maior. Ou seja, no triângulo ABC se $AB > AC$, então $A\hat{C}B > A\hat{B}C$ e vice-versa. A partir disso, prove que, se $AB = AC$, então os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são iguais.

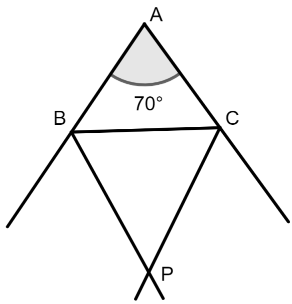
9. ▲ (OBMEP 2009) A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?



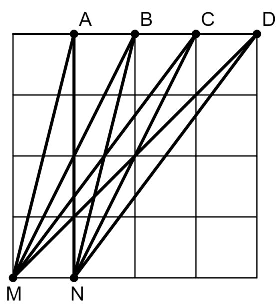
10. ▲ (OMM 2019) Na seguinte figura, algumas medidas de ângulos são mostradas. Diga: qual é o valor β?



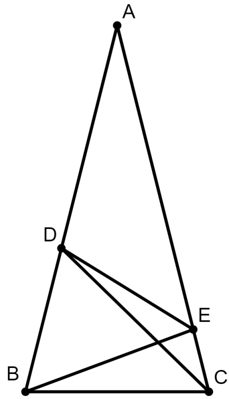
11. ♦ Na figura abaixo, P é interseção das bissetrizes externas em B e C. Calcule a medida do ângulo $B\hat{P}C$, sabendo que a medida ângulo $\hat{A}$ é 70 graus.



12. ♦ Encontre o resultado da soma dos ângulos $M\hat{A}N + M\hat{B}N + M\hat{C}N + M\hat{D}N$.

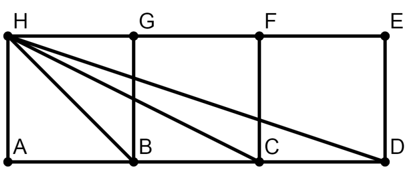


13. ♦ Seja a figura abaixo e considere: $AB = AC$, $D\hat{B}E = 60°$, $B\hat{C}D = 50°$ e $E\hat{C}D = 30°$. Determine a medida do ângulo $B\hat{E}D$.

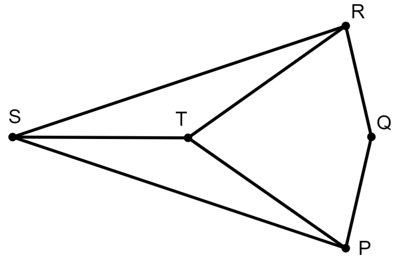


14. ♦ Dois espelhos formam um ângulo de 30 graus. Um raio de luz entra nesse espelho paralelo a um dos lados e é refletido pelos lados de acordo com a lei usual que diz que o "ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão". Quantas vezes ele vai ser refletido nos espelhos antes de sair?

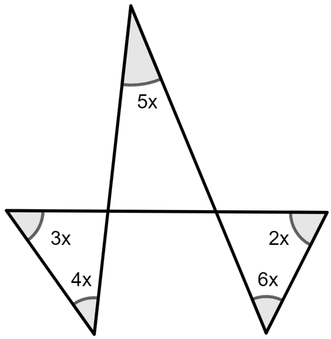
15. ♦ Na figura abaixo, $ABGH$, $BCFG$ e $CDEF$ são quadrados iguais. Determine a soma $A\hat{B}H + A\hat{C}H + A\hat{D}H$.



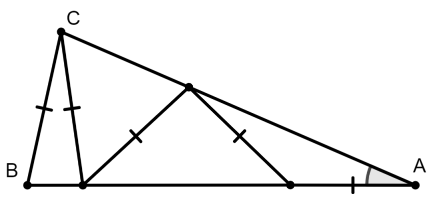
16. ♦ (OMA 2019) Na figura, $PQ = QR$, $PT = ST = RT$, $R\hat{T}P = 70°$ e $S\hat{R}Q = S\hat{P}Q = 80°$. Quanto mede $R\hat{Q}P$?



17. ♦ (OBM) Na figura, quanto vale x?



18. ♦ (OBMEP 2009) No triângulo ABC, temos $AB = AC$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$?

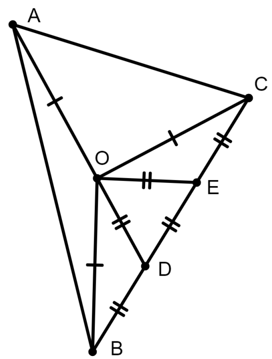


19. ♦ (OMERJ 2015) Sejam $ABCD$ um quadrado e CDE e BFG triângulos equiláteros todos com o mesmo lado, tais que A, B e F são colineares, com B entre A e F, e CDE é exterior ao quadrado.

a. Prove que $DBGE$ é um paralelogramo.

b. Calcule os ângulos do triângulo ECG.

20. ♦ (OBMEP 2019) Na figura, $OA = OB = OC$. Os pontos A, O e D estão alinhados, e os pontos D e E no segmento BC são tais que $BD = DE = EC = OD = OE$.

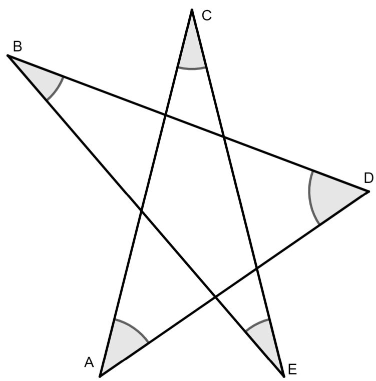


a. Calcule a medida do ângulo $O\hat{D}E$.

b. Calcule a medida do ângulo $B\hat{O}E$.

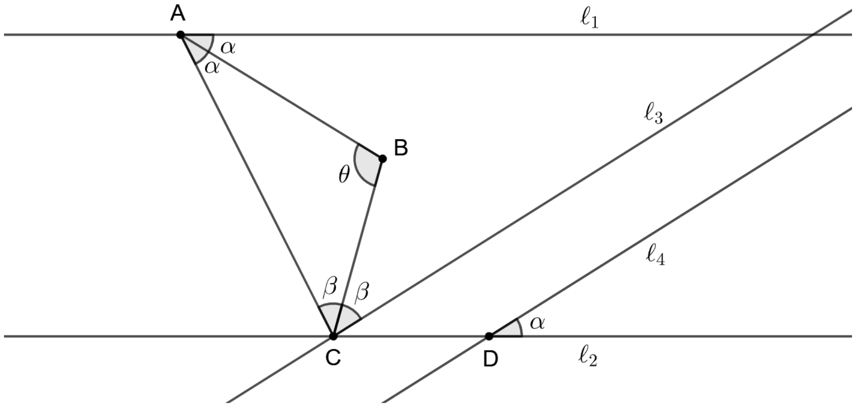
c. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

21. ♦ Prove que a soma dos ângulos nos vértices de uma estrela com cinco pontas é igual a 180 graus.



22. ★ Sejam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ duas retas que se intersectam em um ponto O. Sejam $\overrightarrow{OP}$ a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, $\overrightarrow{OT}$ a bissetriz do ângulo $P\hat{O}B$ e $\overrightarrow{OR}$ a bissetriz do ângulo $T\hat{O}D$. Se $P\hat{O}R = 25^o$, encontre o valor de $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$.

23. ★ Na figura abaixo $\ell_1 /\!/ \ell_2$ e $\ell_3 /\!/ \ell_4$. Se $0° < \alpha < 60°$ calcule o maior valor inteiro possível para o ângulo θ. Para esse valor de θ encontre α e β.



Aula 3

Triângulos

Triângulos são figuras geométricas planas formadas pela intersecção, em três pontos distintos, de três retas concorrentes.

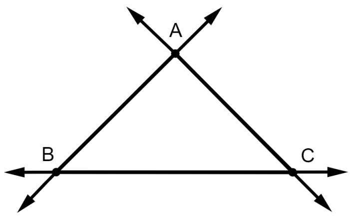


Figura 3.1: Triângulo $\triangle ABC$.

Definição 3.1. Mais especificamente, dados três pontos, A, B e C, não colineares, damos o nome de "triângulo" à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ - e a denotamos por $\triangle ABC$.

Nota 1. Os triângulos pertencem à classe de figuras geométricas chamada "polígonos", que é a classe que reúne figuras planas e fechadas, constituídas por segmentos de reta. A palavra "polígono" significa, literalmente, "muitos ângulos", pois a reunião dos segmentos de reta que compõe os seus elementos acaba por gerá-los.

3.1 Elementos do Triângulo

i. *Vértices*: os pontos A, B e C são os vértices de $\triangle ABC$.

ii. *Lados*: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados de $\triangle ABC$.

iii. *Ângulos Internos*: os ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são os ângulos internos de $\triangle ABC$.

iv. *Ângulos Externos*: são os ângulos formados a partir do encontro entre o prolongamento de um dos lados do triângulo com um lado adjacente. Se tomarmos, por exemplo, a semirreta $\overrightarrow{BC}$ que atravessa o ponto D fora de $\overline{BC}$, $A\hat{C}D$ é um dos ângulos externos de $\triangle ABC$.

Exercício de Fixação 3.1. Faça um desenho de todos os ângulos externos de $\triangle ABC$ e os nomeie.

3.1.1 Ângulos Internos e Externos

Como vimos na aula anterior, a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$.

Daí, obtemos o seguinte:

Teorema 3.1. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

Tente você mesmo demonstrar esse teorema! (lembre-se de que o ângulo externo é igual a $180°$ menos o ângulo adjacente e que o ângulo adjacente é igual a $180°$ menos os dois ângulos não adjacentes)

3.2 Classificação dos Triângulos

3.2.1 Quanto aos Lados

i. *Equilátero*: triângulo com três lados congruentes.

ii. *Isósceles*: triângulo com exatamente dois lados congruentes.

iii. *Escaleno*: triângulo com lados não congruentes uns aos outros.

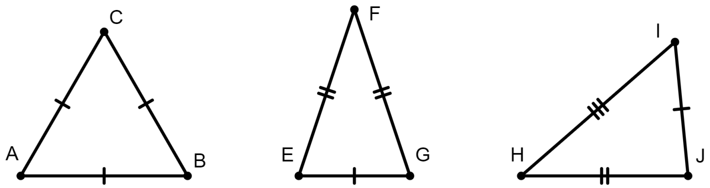
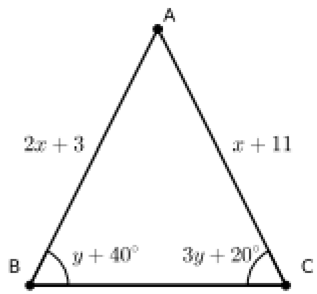


Figura 3.2: Triângulos equilátero, isósceles e escaleno, respectivamente.

Exercício 3.1. No desenho abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles com base $\overline{BC}$. Determine os valores de x e y.



3.2.2 Quanto aos Ângulos

i. *Retângulo*: triângulo com um ângulo reto.

ii. *Acutângulo*: triângulo com todos os ângulos agudos.

iii. *Obtusângulo*: triângulo com um dos seus ângulos obtuso.

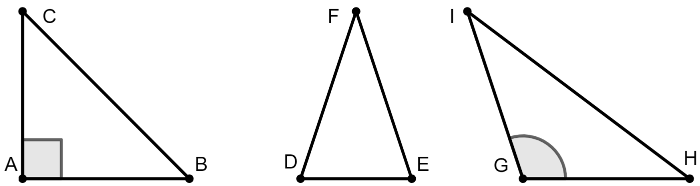


Figura 3.3: Da esquerda para a direita: triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo.

Nota 2. Damos o nome de "hipotenusa" ao lado oposto ao ângulo reto do triângulo retângulo. Aos demais lados, "catetos".

3.3 Congruência de Triângulos

Um triângulo é congruente (símbolo: $\equiv$) a outro se pudermos relacionar seus vértices de modo a que:

i. seus lados sejam congruentes aos lados do outro, ordenadamente;

ii. seus ângulos sejam congruentes aos ângulos do outro, ordenadamente.

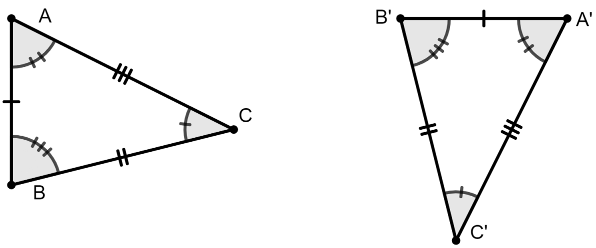


Figura 3.4: Congruência de Triângulos.

Nota 3. Como nos casos anteriores, a congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

3.3.1 Casos de Congruência

Existem algumas condições básicas que nos permitem avaliar se dois triângulos são congruentes, sem que necessitemos avaliar se cada ângulo e cada lado de um triângulo é congruente ao do outro. A essas condições básicas damos o nome de "casos de congruência".

Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos formados por esses lados também o são, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.2. Usando o caso LAL, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Exercício 3.2. Prove, usando LAL, o seguinte teorema: "se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes (teorema do triângulo isósceles)".

Caso Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Se dois triângulos têm um lado congruente e os ângulos adjacentes a esse lado também o são, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.3. Usando o caso ALA, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Exercício 3.3. Prove, usando ALA, a recíproca do teorema do triângulo isósceles: "se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então ele é isóceles".

Caso Lado-Lado-Lado (LLL)

Se dois triângulos têm os três lados congruentes, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.4. Usando o caso LLL, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Caso Lado-Ângulo-Ângulo-oposto ($\mathbf{LAA_O}$)

Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruentes, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.5. Usando o caso $\mathrm{LAA_O}$, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Caso de Congruência de Triângulos Retângulos

Se dois triângulos retângulos têm as hipotenusas e um cateto congruentes, então os triângulos são congruentes.

3.4 Mediana de um Triângulo

Mediana é o segmento que parte de um dos vértices do triângulo e encontra o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

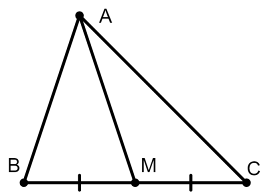
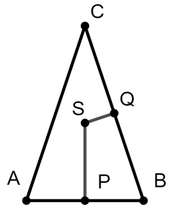


Figura 3.5: Mediana $\overline{AM}$ relativa ao vértice A e ao lado $\overline{BC}$.

Nota 4. À reta perpendicular a $\overline{BC}$ que passa por M, extremidade da mediana $\overline{AM}$, damos o nome de "mediatriz".

Exercício de Aprofundamento 3.1. Prove o seguinte teorema: "um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulo internos não adjacentes" (Teorema do Ângulo Externo).

Exercício 3.4. Em um triângulo isósceles $\triangle ABC$ de base $\overline{AB}$, o ângulo $A\hat{B}C$ é igual a $\frac{2}{3}$ de $P\hat{S}Q$, formado pelas mediatrizes $\overline{QS}$ e $\overline{PS}$. Calcule os ângulos desse triângulo.



Exercício 3.5. Mostre que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

3.5 Bissetriz Interna de um Triângulo

A *Bissetriz Interna de um Triângulo* é o segmento que parte de um dos vértices do triângulo dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes e encontra o seu lado oposto.

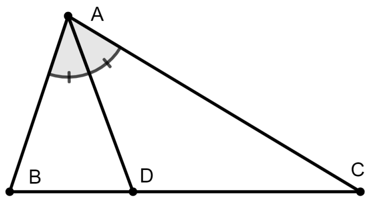


Figura 3.6: Bissetriz $\overline{AD}$ relativa ao vértice A e ao lado $\overline{BC}$.

Teorema 3.2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer (como o da figura acima). Se a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$ intersecta o lado $\overline{BC}$ no ponto D, então D divide o lado $\overline{BC}$ em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados, isto é, $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC}$.

Nota 5. A Bissetriz Externa de um Triângulo é a bissetriz de um dos ângulos suplementares aos ângulos internos do triângulo.

Exercício 3.6. As bissetrizes internas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ de um triângulo $\triangle ABC$ formam um ângulo de $103°$. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

Exercício 3.7. Determine a medida do menor ângulo formado pelas bissetrizes externas relativas aos vértices B e C (e às semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente) de um triângulo $\triangle ABC$, sabendo que $B\hat{A}C = 76°$.

Exercício 3.8. Dado o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{AD}$ bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, $AC = 6$, $BD = 2$ e $DC = 3$. Qual o valor de BA?

3.6 Altura de um Triângulo

A *altura de um triângulo* é um segmento de reta perpendicular a um dos lados do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado desde o vértice oposto. Esse lado é chamado de "base da altura", e o ponto onde a altura encontra a base é comumente chamado de "pé da altura".

Notação 1. Costumamos representar a altura com a letra h.

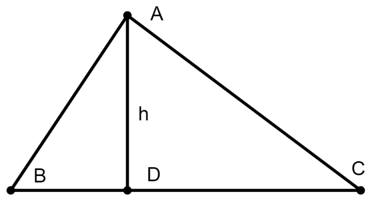


Figura 3.7: Altura h.

Exercício 3.9. As bissetrizes internas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ de um triângulo $\triangle ABC$ formam um ângulo de $116°$. Determine a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo.

3.7 Desigualdade Triangular

Questão Introdutória 1. Seria possível os lados de um triângulo medirem 2, 6 e 8 centímetros? Justifique a sua resposta.

Antes de enunciarmos o que é a chamada "desigualdade triangular", devemos anotar dois teoremas, pois nos ajudarão a entendê-la.

Teorema 3.3. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Teorema 3.4. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Agora, enunciemos o proposto.

Teorema 3.5 (Desigualdade Triangular)**.** Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Ou seja, dado um triângulo $\triangle ABC$, então $AB < BC + AC$.

Demonstração. Consideremos um Ponto K na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que:

$$\overline{AK} \equiv \overline{AB}. \tag{3.1}$$

Assim,

$$\overline{KC} = \overline{AC} + \overline{AK} \Longrightarrow \overline{KC} = \overline{AC} + \overline{AB}. \tag{3.2}$$

De (3.1), segue que $\triangle ABK$ é isósceles de base $\overline{BK}$ (isto é, $A\hat{K}B \equiv A\hat{B}K$) e A é interno a $C\hat{B}K$ (isto é, $C\hat{B}K > A\hat{B}K$). Então,

$$C\hat{B}K < A\hat{K}B \equiv C\hat{K}B. \tag{3.3}$$

No triângulo $\triangle BCK$, com (3.3) e os teoremas anteriores, temos $BC < KC$; e, com (3.2),

$$BC < AC + AB$$

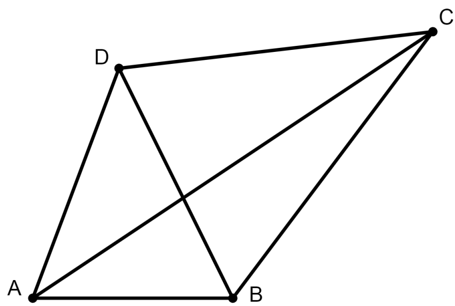
■

Exercício de Fixação 3.6. Sem repeti-los, quantos triângulos poderiam ser montados com os comprimentos a seguir: 2, 4, 5, 10, 6, 1 e 17?

Exercício de Fixação 3.7. O triângulo $\triangle ABC$ tem os lados $AB = 11,8$ e $BC = 14,3$. O perímetro (soma de todos os lados) do triângulo pode ser de $52,3$? Justifique.

Exercício 3.10. A distância de Leningrado a Moscou é de 660 km. De Leningrado até a cidade de Likovo são 310 km, de Likovo a Klin são 200 km e de Klin a Moscou são 150 km. Quão longe fica Likovo de Moscou?

Exercício 3.11. (OMM 2006) O sitiante Bernardo construiu um curral com formato de um quadrilátero convexo, conforme a figura abaixo, em que $AC = 6$ m e $BD = 5$ m. Mostre que o perímetro do curral é maior que 12 e menor que 22 metros.



3.8 Semelhança de Triângulos

O que poderiam ser triângulos semelhantes? Ter lados e ângulos com a mesma medida? Pois, se assim fosse, diríamos apenas que eles são congruentes, sem que precisássemos de outra denominação. Então, o que será que dois triângulos devem ter em comum ou de parecido para que os chamemos "semelhantes"?

Definição 3.2. Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem, de forma ordenada, os três ângulos congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Notação 2. Se $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes, escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

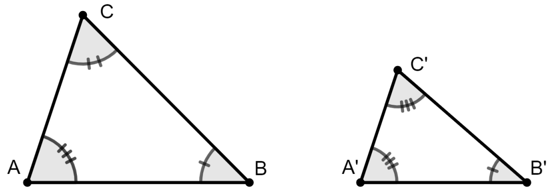


Figura 3.8: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Assim, como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, então $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$, $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$, $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'A'$ e $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = k$, com $k \in \mathbb{R}$ (k é normalmente chamado de "razão de semelhança dos triângulos").

Nota 6. Se $k = 1$, então os triângulos são congruentes.

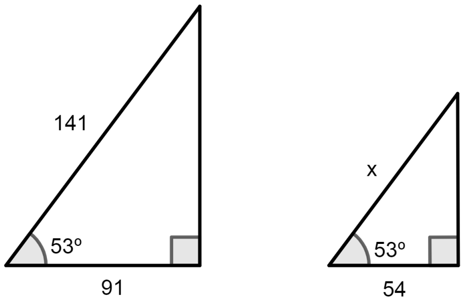
Mas será que é preciso conhecer todos os lados e ângulos de dois triângulos para que possamos dizer que eles são semelhantes? Exploremos essa questão formulando ainda outras:

Exercício de Aprofundamento 3.2. Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, eles são semelhantes? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 3.3. Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados correspondentes do outro triângulo e se o ângulo entre esses lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes? Por quê?

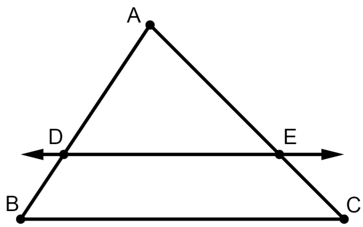
Exercício de Aprofundamento 3.4. Se dois triângulos possuem os seus lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes? Por quê?

Exercício de Fixação 3.8. Descubra o valor de x na figura a seguir.



3.9 Teorema de Tales de Mileto nos Triângulos

Questão Introdutória 2. Dado o triângulo $\triangle ABC$. Se traçarmos uma reta paralela à $\overleftrightarrow{BC}$ que cruze $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em pontos distintos, conforme a figura abaixo, podemos dizer que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$? Você seria capaz de provar isso?

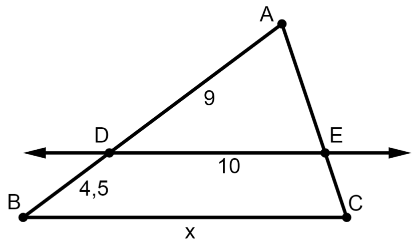


A resposta à primeira pergunta é "sim". Veja o teorema abaixo. No entanto, a segunda permanece: você seria capaz de provar essa semelhança?

Teorema 3.6. Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e atravessa os demais em pontos distintos, então o triângulo formado por essa reta é semelhante àquele que fora cortado pela reta.

Desse modo, usando a figura acima: como $\overleftrightarrow{DE} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{BC}$, então $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Exercício de Fixação 3.9. Sabendo que $\overleftrightarrow{DE} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$, determine o valor de x na figura abaixo.



Exercício de Aprofundamento 3.5. Mostre que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é 5, então a razão entre os seus perímetros também será 5.

Exercício de Aprofundamento 3.6. Dados os triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $AB = 30$ e o seu correspondente $A'B' = 60$, determine o perímetro do triângulo $\triangle ABC$, sabendo que o perímetro do triângulo $\triangle A'B'C'$ é 300.

3.10 Triângulo Retângulo

Como vimos anteriormente, um triângulo retângulo é um triângulo com um de seus ângulos medindo exatamente $90°$.

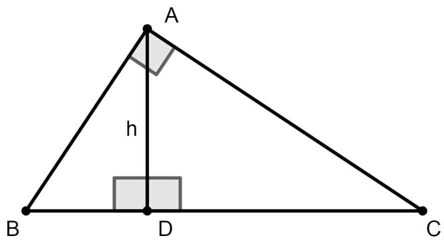
O lado oposto ao ângulo reto do triângulo retângulo é chamado de “hipotenusa” e os demais lados, “catetos”.

Exercício de Fixação 3.10. Em um triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5, quanto medem os catetos e quanto mede a hipotenusa?

Agora, vamos ver algumas características desse tipo de triângulo.

3.10.1 Semelhanças no Triângulo Retângulo

Se tomássemos um triângulo retângulo com a hipotenusa como base e traçássemos a sua altura, com D sendo o pé da altura, como na figura abaixo, poderíamos dizer que $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$? Justifique a sua resposta.



3.10.2 Teorema de Pitágoras

Assumindo que você conseguiu justificar as semelhanças acima, podemos concluir algumas relações:

1. Como $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, então

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Longrightarrow AB^2 = BC \cdot BD \tag{3.4}$$

2. De outro modo, como $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, então

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \Longrightarrow AC^2 = BC \cdot DC \tag{3.5}$$

Assim, somando (3.4) e (3.5), temos:

$$\begin{aligned} &AB^2 + AC^2 = BC \cdot BD + BC \cdot DC \\ \Longrightarrow\ &AB^2 + AC^2 = BC \cdot (BD + DC) \end{aligned}$$

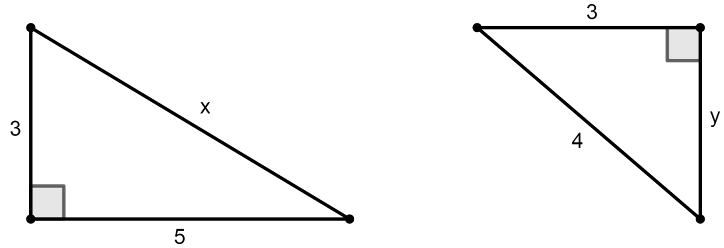
Como $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$, então:

$$\begin{aligned} &AB^2 + AC^2 = BC \cdot BC \\ \Longrightarrow\ &AB^2 + AC^2 = BC^2 \end{aligned}$$

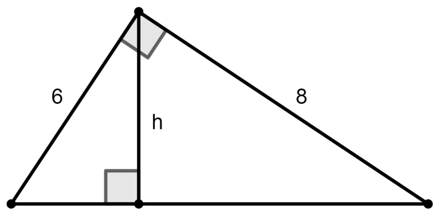
Desse modo, concluímos o seguinte:

Teorema 3.7 (Teorema de Pitágoras)**.** Em um triângulo retângulo, a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Exercício de Fixação 3.11. Determine o valor de x e y nas figuras abaixo:



Exercício 3.12. Usando o que estudamos até aqui, determine o valor de h.



3.11 Pontos notáveis

Agora vamos estudar alguns dos pontos notáveis dos triângulos e explorar suas propriedades.

3.11.1 Circuncentro

Em um triângulo ABC traçamos as mediatrizes (veja Nota 4) m_{AB}, m_{BC} e m_{AC} dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Propriedade 3.1. As retas m_{AB}, m_{BC} e m_{AC} são concorrentes, isto é, se encontram em um único ponto O.

FIGURA

Demonstração. Seja O o ponto de interseção de m_{AB} e m_{BC}, vamos mostrar que m_{AC} passa por O e portanto as retas são concorrentes. ■

Note que $r = OA = OB = OC$, portanto a circunferência de centro O e raio r passa por A, B e C. Essa circunferência é chamada de *circunferência circunscrita ao triângulo* ABC.

Definição 3.3. Ao ponto O discutido anteriormente damos o nome de *circuncentro.*

3.11.2 Baricentro

Seja ABC um triângulo e m_a, m_b e m_c as suas medianas.

Propriedade 3.2. As três medianas de ABC (m_a, m_b e m_c) se interseptam em um único ponto G que divide cada mediana em duas partes, tais que, a parte que tem o vértice é o dobro da outra.

FIGURA

Demonstração. ∎

Definição 3.4. O ponto de encontro das três medianas é chamado de *baricentro.*

3.11.3 Incentro

Denote r_A, r_B e r_C as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, de um triângulo ABC.

Propriedade 3.3. As bissetrizes do triângulo ABC são concorrentes em um único ponto I que está a igual distância dos lados do triângulo.

FIGURA

Demonstração. ∎

Perceba que, como o ponto I satisfaz $r = IP_A = IP_B = IP_C$ a circunferência de centro I e raio r está contida em ABC, tangenciando seus lados. A essa circunferência damos o nome de *circunferência inscrita* ao triângulo ABC.

Definição 3.5. O ponto de encontro das bissetrizes é chamado *incentro.*

3.11.4 Ortocentro

Sejam h_a, h_b e h_c as três alturas de um triângulo ABC

Propriedade 3.4. As retas suportes das alturas de um triângulo se encontram em um mesmo ponto H.

FIGURA

Demonstração. ■

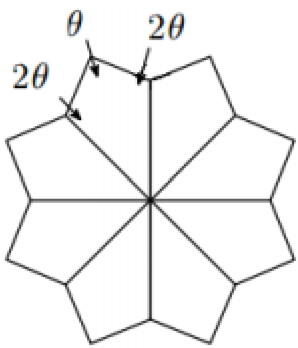
Definição 3.6. O ponto de encontro das alturas é chamado *ortocentro* e o triângulo formado pelos pés das alturas é chamado *triângulo órtico*.

Problemas Propostos

Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

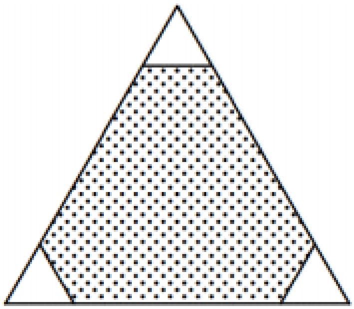
●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● (OPRM 2017 - Adaptada) Se oito pipas idênticas forem arranjadas conforme à figura abaixo, qual o valor do ângulo θ?

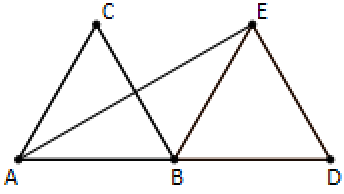


2. ● (OBM 2004) No triângulo $\triangle PQR$, a altura $\overline{PF}$ divide o lado $\overline{QR}$ em dois segmentos de medidas $QF = 8$ e $RF = 5$. Se $PF = 13$, qual é a medida de $\overline{PQ}$?

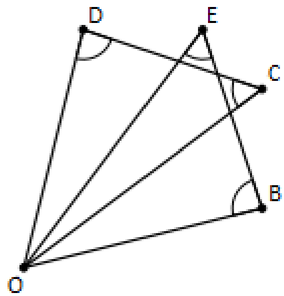
3. ● (OPRM 2017 - Adaptada) De um triângulo equilátero de perímetro 75 cm são retirados triângulos equiláteros de 5 cm de lado como mostra a figura abaixo. Quanto é o perímetro da figura resultante?



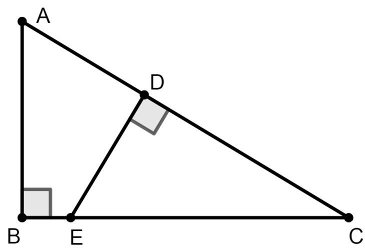
4. ● (Portal OBMEP) No desenho abaixo, os triângulos ABC e BED são equiláteros de mesmo lado. Determine o ângulo $A\hat{E}B$.



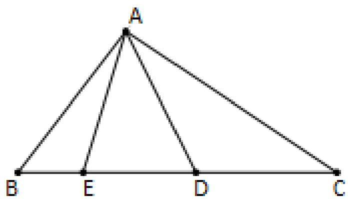
5. ▲ (Portal OBMEP) Na figura abaixo, $O\hat{D}C = O\hat{B}E$ e $O\hat{E}B = D\hat{C}O$. Se $DC = EB$, $D\hat{O}B = 60°$ e $OB = 5$ cm, determine o comprimento de BD.



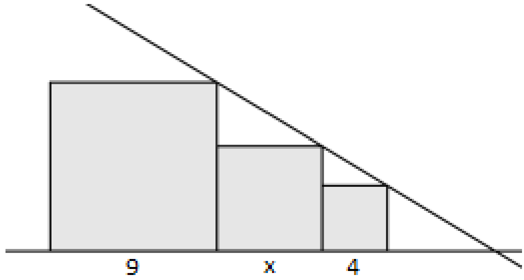
6. ▲ (Portal OBMEP) Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de DE na figura abaixo.



7. ▲ (OBM 2011) No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $D\hat{A}E = 40°$, determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

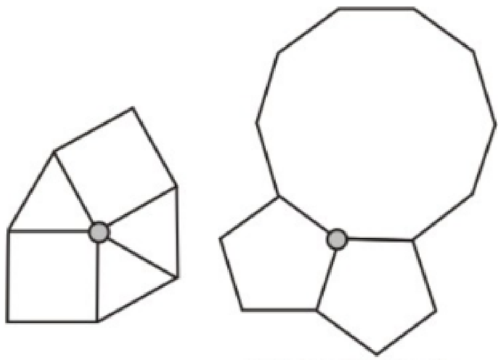


8. ▲ (Portal OBMEP) Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



9. ▲ (OBM 2013 - Adaptada) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, qual a medida da hipotenusa de ABC?

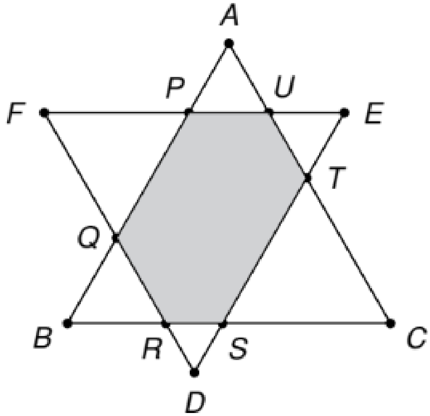
10. ▲ (OBMEP 2007 - adaptada) Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura, vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



   a. Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

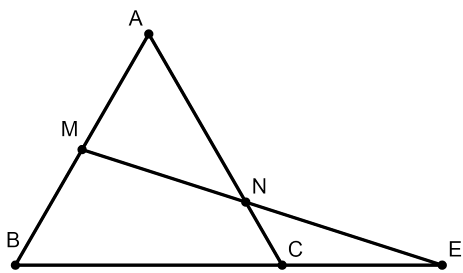
   b. Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

11. ♦ (OBMEP 2006) Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados 14 cm e 13 cm, respectivamente, e os lados $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$ são paralelos.



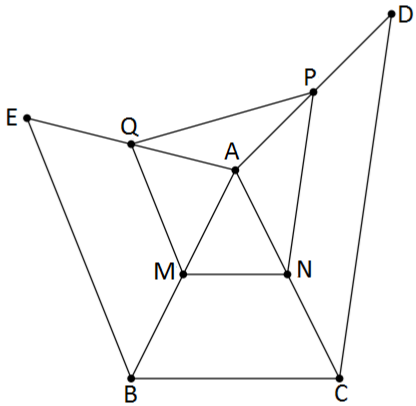
a. Calcule a medida do ângulo $E\hat{U}T$.
b. Calcule o perímetro do polígono $PQRSTU$.
c. Se o segmento PQ mede 6 cm, qual é a medida do segmento $\overline{ST}$?

12. ♦ (OPRM 2016 - Adaptada) Na figura abaixo, o perímetro do triângulo equilátero ABC é 72 cm, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $CE = 16$ cm. Quanto é a medida do segmento $\overline{CN}$, em cm?

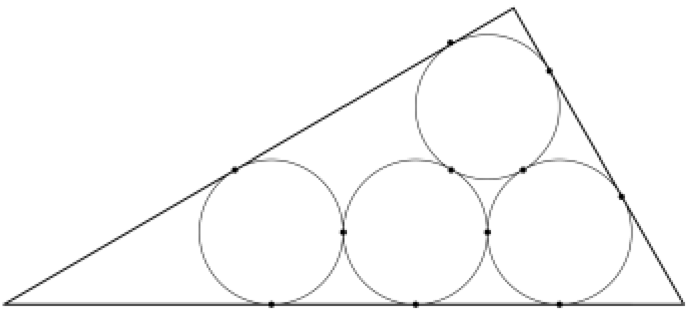


13. ♦ (OPRM 2019 - Adaptada) Considere $\triangle ABC$ um triângulo equilátero e M, N, P e Q os pontos médios dos lados $\overline{AB}$,

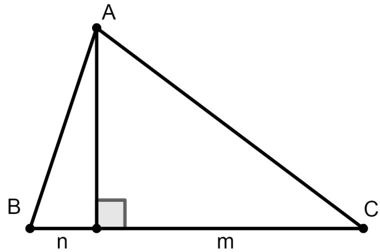
$\overline{AC}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, respectivamente. Sabendo que $AN = 2$ cm e $CD + ED + EB = 12$ cm, calcule o perímetro do quadrilátero $MNPQ$.



14. ♦ (OBMEP - Adaptada) A figura mostra quatro círculos de raio 1 cm dentro de um triângulo. Os pontos marcados são os pontos de tangência (em que a circunferência toca outra figura). Qual é o comprimento do menor lado desse triângulo?

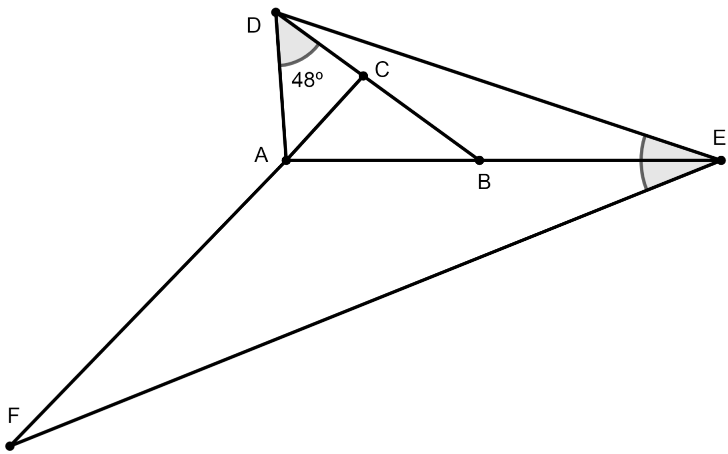


15. ♦ (OBMEP - Adaptada) No triângulo ABC, o comprimento dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a $\overline{BC}$ divide este lado em dois segmentos de comprimentos m e n, como indicado. Quanto vale $m - n$?

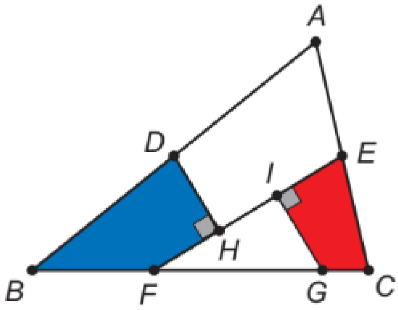


16. ♦ Em um triângulo ABC, foi desenhada uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ contendo o ponto de interseção das bissetrizes do triângulo. Esta reta intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ nos pontos M e N, respectivamente. Prove que $MN = AM + CN$.

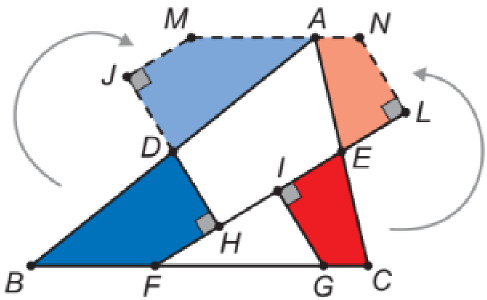
17. ♦ (OBMEP 2008) Na figura, o ângulo $A\hat{D}C$ mede 48° e os triângulos ACD, DBE e EAF são isósceles de bases $\overline{AD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$, respectivamente. Quanto mede o ângulo $D\hat{E}F$?



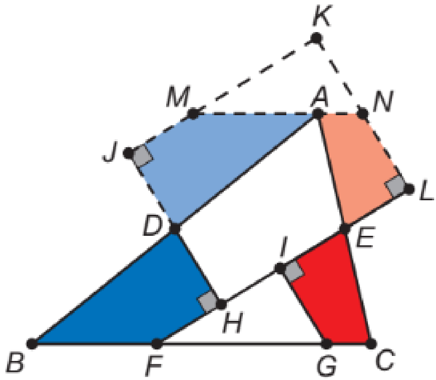
18. ♦ (OBMEP 2011) Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângulos, D é ponto médio de $\overline{AB}$, E é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{FG}$ mede $\frac{1}{2}BC$.



a. Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de $180°$ os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo MAN é igual a $180°$.



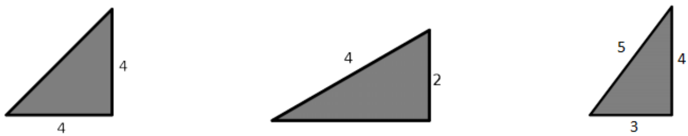
b. Na figura, o ponto K é a interseção das retas $\overleftrightarrow{JM}$ e $\overleftrightarrow{JM}$. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



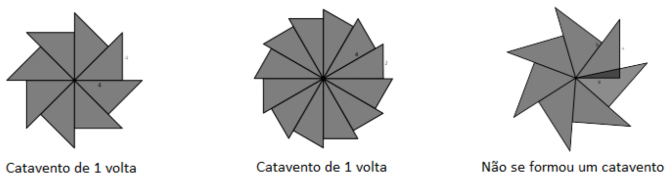
c. Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido. Mostre que $LH = EF$.

19. ♦ A altura de A ao lado de BC em um triângulo ABC não é menor do que o lado BC e a altura de B ao lado AC não é menor do que o lado AC. Encontre os ângulos de ABC.

20. ♦ (OMM 2010) Othon dispunha de triângulos retângulos de papelão de três tipos diferentes, esquematizados a seguir:

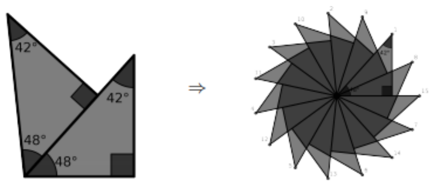


Justapondo um cateto de um triângulo à hipotenusa de outro do mesmo tipo de forma sucessiva, conforme às figuras abaixo, o primeiro e o segundo tipos formam "cataventos", enquanto o terceiro não.



a. Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que seja possível formar com ele um catavento. Aplique essa condição e verifique que os dois primeiros triângulos realmente formam cataventos. (Dica: analise o ângulo do vértice comum aos triângulos justapostos)

b. Othon percebeu que, justapondo triângulos como o abaixo, não se gerava um catavento; mas caso continuasse a justaposição após completada a primeira volta, a segunda volta terminava onde a primeira havia começado.



Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que o final da p-ésima volta coincida com o início da primeira volta. Aplique essa condição e verifique que no triângulo acima isso ocorre ao final da segunda volta.

21. ♦ Responda as questões abaixo:

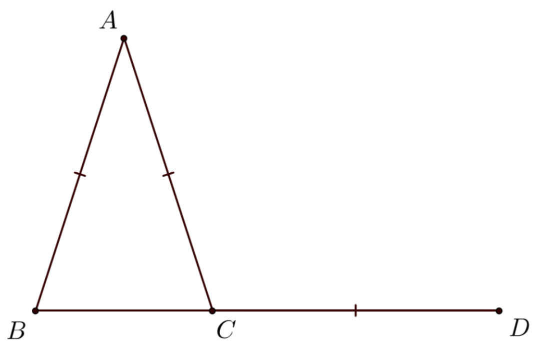
a. Cinco triângulos congruentes de papel foram colocados sobre uma mesa. Cada um deles pode ser deslocado em qualquer direção, mas não pode ser girado ou virado de modo que a face que estava para cima fique para baixo. Sempre é possível cobrir cada um desses triângulos com os outros quatro?

b. Responda a mesma pergunta, mas suponha que os triângulos são equiláteros, além de congruentes.

c. Nas condições do item anterior, sempre é possível cobrir qualquer dos triângulos com apenas três restantes?

22. ★ (IMO 2016) O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz do ângulo $E\hat{A}C$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo (com $AM \parallel EX$ e $AE \parallel MX$). Demonstre que as retas BD, FX e ME são concorrentes.

23. ★ Considere três pontos colineares B, C e D de modo que C está entre B e D. Seja A um ponto que não pertence a reta $\overleftrightarrow{BD}$ de modo que $AB = AC = CD$.



(a) Se $B\hat{A}C = 36°$, então verifique que

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{CD + BD}.$$

(b) Suponha agora que vale

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{BD} = \frac{1}{CD + BD}.$$

Verifique que $B\hat{A}C = 36°$.

Dica: Encontre triângulos congruentes (crie um triângulo novo na imagem, se necessário) e use as razões dos lados dos triângulos, para o item (a). Para o item (b), faça o "caminho inverso" e tente chegar a uma conclusão.

Aula 4

Quadriláteros Notáveis

Quadriláteros, como o nome indica, são polígonos que possuem quatro lados.

Definição 4.1. Mais especificamente, dados quatro pontos, A, B, C e D, três deles não colineares, damos o nome de "quadrilátero" à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, quanto se interceptam somente nas extremidades.

Notação 1. Denotaremos o quadrilátero com vértices A, B, C e D da seguinte forma: $ABCD$.

Há dois tipos de quadriláteros: os côncavos e os convexos, conforme a figura abaixo.

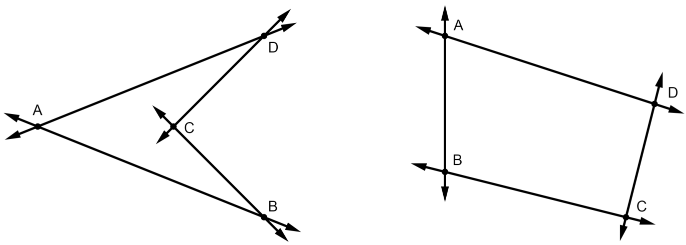


Figura 4.1: $ABCD$ côncavo (à esquerda) e $ABCD$ convexo (à direita).

Nesta aula, porém, estudaremos apenas algumas formas de quadriláteros convexos, os chamados "quadriláteros notáveis", dando atenção especial às suas propriedades.

4.1 Elementos do Quadrilátero

i. *Vértices*: os pontos A, B, C e D são os vértices de $ABCD$.

ii. *Lados*: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os lados de $ABCD$.

iii. *Ângulos*: os ângulos $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$ são os ângulos de $ABCD$.

iv. *Diagonais*: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais de $ABCD$.

Exercício de Fixação 4.1. Faça um desenho de um quadrilátero convexo com suas diagonais.

Exercício 4.1. Qual a medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero? Justifique a sua resposta.

4.2 Trapézio

Definição 4.2. Um trapézio é um quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos.

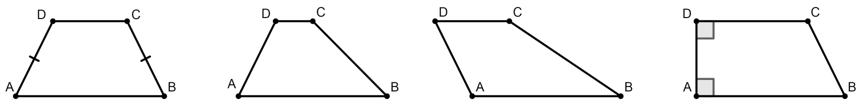
Costumamos dizer que os lados paralelos são as "bases" do trapézio.

Os dois outros lados, por sua vez, não sendo base, poderão não ser paralelos, de modo que, de acordo com a sua forma, podemos classificar os trapézios:

i. *Trapézio Isósceles*: quando esses lados são congruentes.

ii. *Trapézio Escaleno*: quando esses lados não são congruentes.

iii. *Trapézio Retângulo*: quando um desses lados for perpendicular às bases, formando ângulos de 90°.



Exercício de Fixação 4.2. Classifique os trapézios da figura acima conforme a descrição anterior.

Exercício de Aprofundamento 4.1. Prove que em todo trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos o seguinte resultado:

$$B\hat{A}D + A\hat{D}C = A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ$$

4.2.1 Trapézio Isósceles

Exercício de Aprofundamento 4.2. Mostre que os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

Teorema 4.1. As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Tente você mesmo provar o teorema acima, usando os resultados obtidos nos exercícios anteriores.

4.3 Paralelogramo

Definição 4.3. Um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos é um paralelogramo.

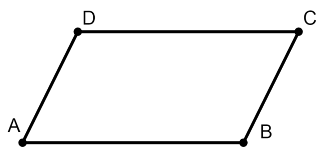
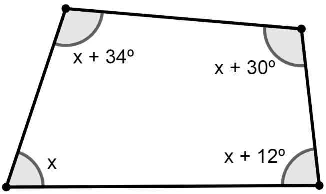


Figura 4.2: Paralelogramo $ABCD$.

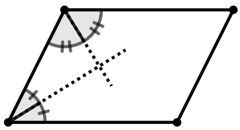
Exercício de Aprofundamento 4.3. Mostre que em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Exercício de Fixação 4.3. Em um paralelogramo $ABCD$, o ângulo $D\hat{A}B$ mede $53°$. Determine os outros três ângulos desse paralelogramo.

Exercício de Fixação 4.4. Determine o valor de x na figura abaixo:



Exercício 4.2. Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos que partilham de um mesmo lado de um paralelogramo (o ângulo a ser determinado é aquele formado pelos segmentos pontilhados abaixo).



Teorema 4.2. Todo quadrilátero convexo cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo.

A partir do que fora enunciado acima, pense: que figuras geométricas você conhece que poderiam ser consideradas paralelogramos?

Teorema 4.3. Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Exercício de Aprofundamento 4.4. Demonstre o teorema acima. Dica: trace o segmento $\overline{AC}$ e, a partir do paralelismo entre $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, garanta a congruência de $D\hat{C}A$ com $C\hat{A}B$.

Teorema 4.4. Todo quadrilátero convexo cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo.

Que figuras geométricas você conhece que atendem ao que fora dito acima?

Teorema 4.5. Em todo paralelogramo, as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

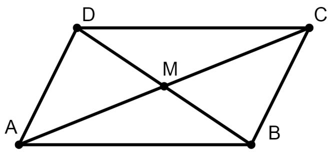


Figura 4.3: M é o ponto médio de ambas as diagonais do paralelogramo.

Teorema 4.6. Todo quadrilátero convexo cujas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios é um paralelogramo.

De acordo com o que fora dito no teorema acima, podemos concluir que, se dois segmentos de reta se interceptam nos respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo?

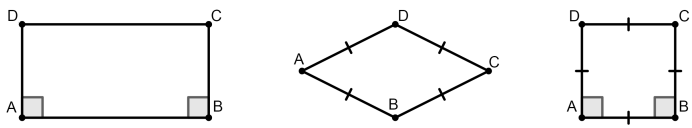
Exercício de Aprofundamento 4.5. Pense no seguinte: podemos dizer que todo quadrilátero convexo com dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo? Por quê?

Agora que conhecemos um pouco mais a respeito dos paralelogramos, estudemos mais aprofundadamente alguns deles:

i. *Retângulo*: um quadrilátero convexo cujos ângulos são congruentes.

ii. *Losango*: um quadrilátero convexo cujos lados são todos congruentes.

iii. *Quadrado*: um quadrilátero convexo que possui ângulos e lados todos congruentes.



Exercício de Fixação 4.5. Classifique os paralelogramos da figura acima de acordo com a descrição anterior.

Exercício de Fixação 4.6. Uma aranha caminha sobre um losango $ABCD$, dando 10 voltas. Se a distância entre os vértices A e B, consecutivos, é 43 cm, qual a distância percorrida pela aranha?

Exercício de Aprofundamento 4.6. Mostre que em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Exercício de Aprofundamento 4.7. Por outro lado, mostre agora que todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Exercício de Aprofundamento 4.8. Mostre que todo losango tem diagonais perpendiculares.

Exercício de Aprofundamento 4.9. Mostre, agora, que todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Exercício de Aprofundamento 4.10. Por fim, mostre que todo quadrado é retângulo e também losango.

4.4 Bases Médias

4.4.1 Base Média do Triângulo

Teorema 4.7 (Base Média do Triângulo)**.** Dado um segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:

1. ele é paralelo ao terceiro lado;

2. ele é metade do terceiro lado.

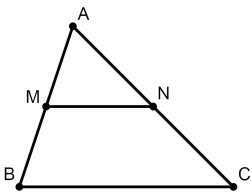
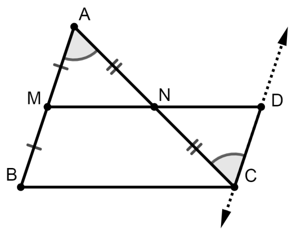


Figura 4.4: $\overline{MN}$ é base média do triângulo $\triangle ABC$.

Demonstração. Trace uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ que atravesse C. Seja, então, D o ponto de intersecção entre $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, conforme figura abaixo.



Assim, $D\hat{C}N \equiv B\hat{A}C$, $\overline{AN} \equiv \overline{CN}$ e $A\hat{N}M \equiv D\hat{N}C$, de modo que, pelo caso de congruência do triângulo Ângulo-Lado-Ângulo, $\triangle AMN \equiv \triangle CDN \Longrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AM} \Longrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{MB}$.

Como $\overline{CD} /\!/ \overline{MB}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{MB}$, então $MBCD$ é um paralelogramo, de forma que $\overline{MD} /\!/ \overline{BC} \Longrightarrow \overline{MN} /\!/ \overline{BC}$.

Além disso, dado que $\overline{MN} \equiv \overline{DN}$ e $\overline{MD} \equiv \overline{BC}$, então $2 \cdot MN = BC \Longrightarrow MN = \frac{1}{2} \cdot BC$. ■

Exercício de Fixação 4.7. No triângulo $\triangle ABC$, M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Se $AB = 22$, $BC = 18$ e $AC = 14$, calcule o perímetro do triângulo $\triangle MNP$.

4.4.2 Base Média do Trapézio

Teorema 4.8 (Base Média do Trapézio)**.** Dado um segmento com extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:

1. ele é paralelo às bases;

2. ele é igual à metade da soma das bases.

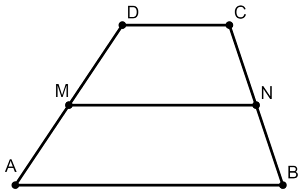


Figura 4.5: $\overline{MN}$ é a base média do trapézio $ABCD$.

Tente você mesmo demonstrar o Teorema da Base Média do Trapézio.

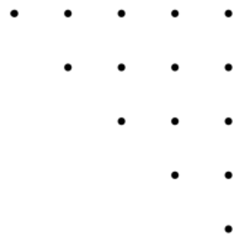
Problemas Propostos

Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

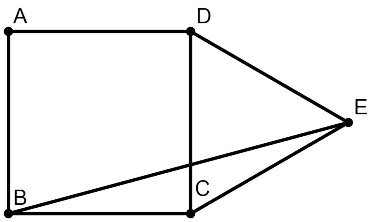
1. ● (OBMEP - Adaptada) Juliana tem 8 cartões de papelão, retangulares e iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando apenas lados de mesma medida, a maior fila que ela poderá obter terá comprimento 176 cm e a menor terá comprimento 96 cm. Qual é o perímetro (soma de todos os lados) de cada cartão?

2. ● (OBM Adaptada) Quantos quadrados têm como vértices os pontos reticulados abaixo?

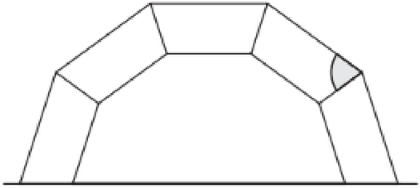


3. ● Duas escadas de concreto, ambas com um metro de altura e dois metros de comprimento da base, estão cobertas com longas tiras de carpete. A primeira escada tem sete degraus e a segunda tem nove. Uma tira de carpete que cubra completamente a primeira escada também cobrirá completamente a segunda?

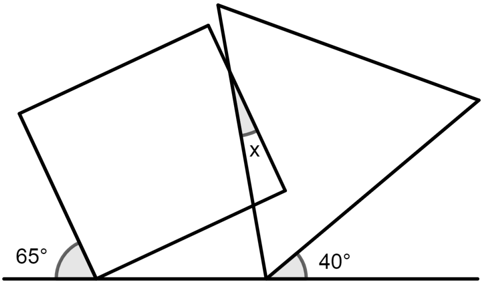
4. ● O quadrilátero $ABCD$, da figura abaixo, é quadrado e o triângulo $\triangle DCE$ e equilátero. Determine a medida do ângulo $D\hat{B}E$.



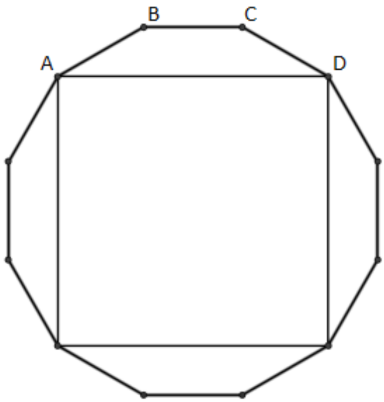
5. ▲ (OBMEP 2009) A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?.



6. ▲ (OMM 2008) Na figura estão representados um triângulo equilátero e um retângulo. Qual é o valor em graus do ângulo marcado com x?



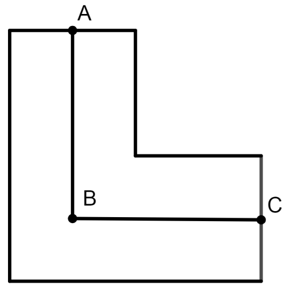
7. ▲ (OBM 2015 - Adaptada) A figura abaixo representa um dodecágono regular, qual a medida do ângulo $B\hat{A}D$ do trapézio $ABCD$?



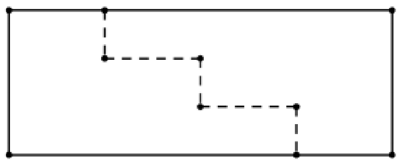
8. ▲ Determine os ângulos internos de um paralelogramo cuja diferença entre dois deles é de 40°.

9. ▲ A piscina do clube que Samuel frequenta tem a forma de um hexágono (polígono com seis lados), com um ângulo interno de 270°, os demais ângulos de 90° e os quatro lados menores com 12 m cada. Samuel costuma nadar pelo meio da piscina,

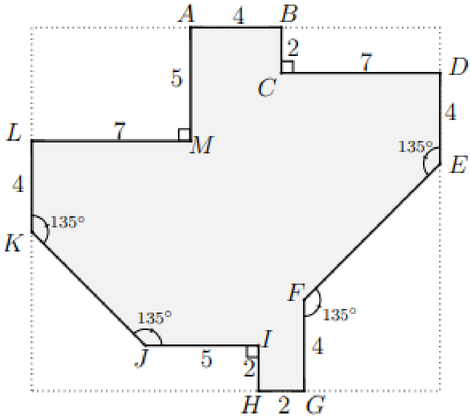
a partir do ponto A, descrevendo o trajeto representado, na figura, pelo ângulo reto $A\hat{B}C$, em que $AB = BC$. Certo dia, ele nadou por esse trajeto 4 vezes, isto é, foi e voltou 2 vezes. Quantos metros ele percorreu?



10. ▲ (OBMEP 2007 - Adaptada) Um retângulo de papelão com 45 cm de altura foi cortado em dois pedaços iguais, nos segmentos pontilhados da figura. Com esses dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que 45 cm. Qual é o comprimento da base do retângulo?



11. ▲ (OMM 2013) De uma chapa metálica retangular, foi recortada uma peça. Na figura abaixo, todas as medidas estão em centímetros, a chapa original é representada pela linha pontilhada e a parte cinza representa a peça recortada.

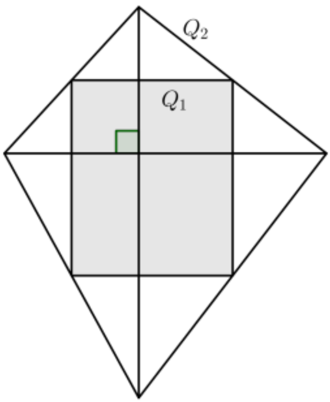


a. Qual era a largura original da chapa?

b. Qual era o comprimento original da chapa?

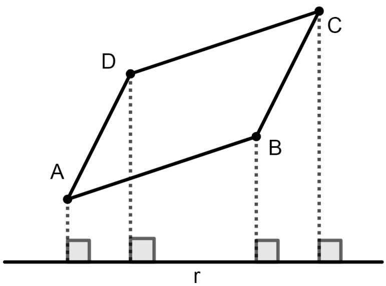
12. ♦ Seja $ABCD$ um trapézio isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com $AB > CD$. Tome $\hat{A} = 60°$ e $AD = DC = CB = 3$ cm. Calcule a base média do trapézio.

13. ♦ (Portal OBMEP) Na figura, o quadrilátero Q_1 é formado ligando-se os pontos médios dos lados do quadrilátero Q_2, que tem diagonais perpendiculares. Mostre que Q_1 tem diagonais congruentes.

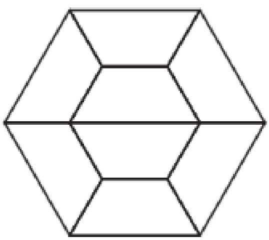


14. ♦ Seja $ABCD$ um quadrilátero (convexo ou não convexo). Assumindo que M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, mostre que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

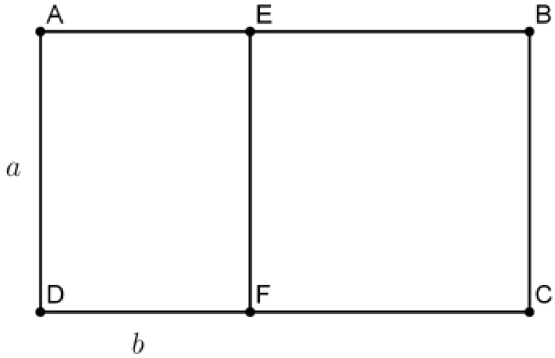
15. ♦ Sendo $ABCD$ um paralelogramo, e a, b, c e d, respectivamente, as distâncias dos vértices A, B, C e D à reta r exterior (distâncias representadas pelos pontos reticulados na figura abaixo). Mostre que $a + c = b + d$.



16. ♦ (OBMEP 2012) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?



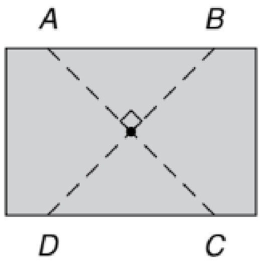
17. ♦ (Razão Áurea) O retângulo $ABCD$ da figura foi dividido em um quadrado e um retângulo pelo segmento EF. A razão das dimensões do retângulo $ABCD$ é igual à razão das dimensões do retângulo $AEFD$. Determine essa razão, $\frac{a}{b}$, a qual chamamos de "razão áurea".



18. ♦ (OCM) Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ as bases de um trapézio tal que a medida da base menor $\overline{CD}$ é igual à soma das medidas dos lados não paralelos do trapézio. Se E é um ponto de $\overline{CD}$ e $\overline{EA}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, mostre que $\overline{EB}$ é também bissetriz do ângulo $\hat{B}$.

19. ♦ (OMM 2012) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M um ponto interior. Sejam G_1, G_2, G_3 e G_4 os baricentros dos triângulos ABM, BCM, CDM e DAM, respectivamente. Mostre que $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo. (Observação: o baricentro do triângulo é o ponto de intersecção das medianas do triângulo. Além disso, é conhecido que este ponto corta as medianas na proporção $2 : 1$).

20. ♦ (OBMEP 2006 - Adaptada) Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na abaixo.

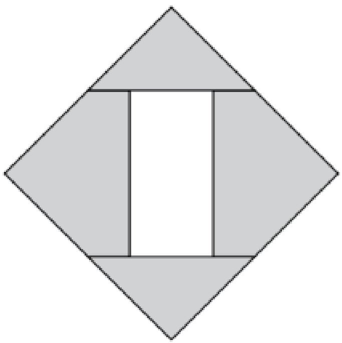


Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo, formando ângulos retos.

a. Qual é o comprimento do segmento $\overline{AB}$?

b. Qual é o perímetro de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

c. Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com buraco retangular, como na figura abaixo. Qual é o perímetro do buraco?

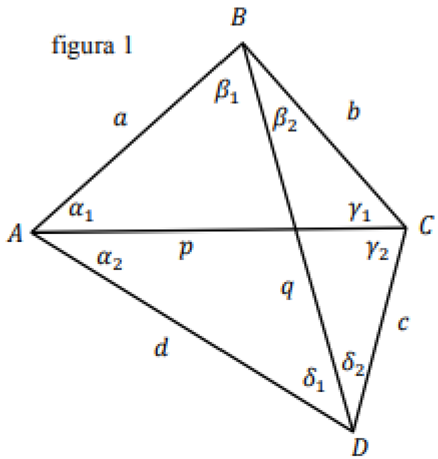


21. ♦ (Torneio das Cidades) $ABCD$ é um paralelogramo. Um ponto M é escolhido sobre o lado AB tal que $M\hat{A}D = A\hat{M}O$, onde O é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. Prove que $MD = MC$.

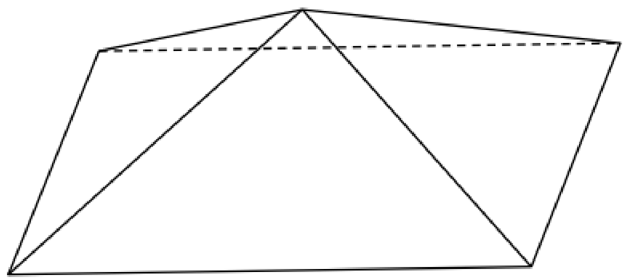
22. ♦ (Torneio das Cidades) Em um quadrado $ABCD$, K é um ponto do lado $\overline{BC}$ e a bissetriz do ângulo $K\hat{A}D$ intersecta o

lado $\overline{CD}$ no ponto M. Prove que o comprimento do segmento $\overline{AK}$ é igual à soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{DM}$ e $\overline{BK}$.

23. ★ (OPM 2015) Um dos teoremas mais importantes sobre quadriláteros é a *Desigualdade de Ptolomeu*: em um quadrilátero convexo cujos lados têm medidas a, b, c e d (nessa ordem) e as diagonais têm medidas p e q, tem-se que $p \cdot q \leq a \cdot c + b \cdot d$.



Nessa questão iremos aprender uma demonstração desse teorema. Considere a figura a seguir em que, por construção: $\triangle ABC$ (figura 1) é semelhante a $\triangle EFG$; $\triangle ABD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle HGF$ e $\triangle CBD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle IEF$. Fazemos, ainda, $EG = p \cdot q$.



a. Determine as medidas de $\overline{FH}$ e $\overline{FI}$.

b. Prove que $IEGH$ é um paralelogramo e conclua a demonstração do teorema. Nesse item você pode desejar utilizar o fato de que $IEGH$ é um paralelogramo se, se somente se, $EI = GH$ e as retas $\overline{EI}$ e $\overline{GH}$ são paralelas.

c. Supondo que $p \cdot q = a \cdot c + b \cdot d$, calcule $A\hat{B}C + C\hat{D}A$, ou seja, a soma dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ do quadrilátero inicial.

Aula 5

Círculo

Nesta aula estudaremos um dos objetos geométricos mais simples, e ao mesmo tempo extremamente versátil: o *círculo*.

Lembre que circunferência e círculo são objetos distintos, o primeiro é um *segmento* e o segundo é a união deste *segmento* com o seu *interior*.

Vamos definir estes conceitos com um pouco mais de rigor matemático.

5.1 Circunferência

Definição 5.1.1. Damos o nome de *circunferência* ao segmento que passa pelos pontos de um plano equidistantes a um ponto dado, chamado *centro*.

Notação 1. É comum representarmos simbolicamente a circunferência que dista r de um centro O por (O, r). Ou ainda, quando não há ambiguidade na escrita, usamos letras gregas maiúsculas como Σ e Γ.

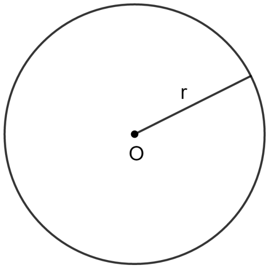


Figura 5.1: (O, r).

5.1.1 Corda, raio, diâmetro e arco

Dada uma circunferência, definimos abaixo alguns dos elementos primitivos a ela relacionados:

Uma *corda* é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência.

Um *raio* é um segmento de reta com uma extremidade no centro e a outra num ponto da circunferência.

Um *diâmetro* é uma corda que passa pelo centro da circunferência.

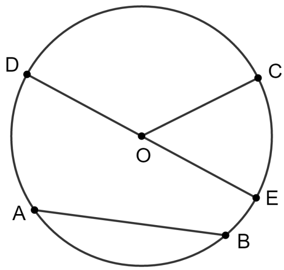


Figura 5.2: Corda, raio e diâmetro.

Na figura 5.2 $\overline{AB}$ é uma corda, $\overline{OC}$ um raio e $\overline{DE}$ um diâmetro.

Um *arco* é uma fração de circunferência limitado por dois pontos. Veja que dados dois pontos em uma circunferência, como na figura 5.3, temos dois arcos: O *arco menor* $\widehat{AB}$, que não contém X e o *arco maior* $\widehat{AB}$ que contém X (também denotado por $\widehat{AXB}$).

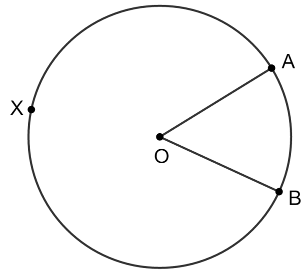


Figura 5.3: Arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{AXB}$.

Se A e B formam um diâmetro, como na figura abaixo, o arco $\widehat{AB}$ compreende metade da circunferência e então chamamos este segmento de *semicircunferência*.

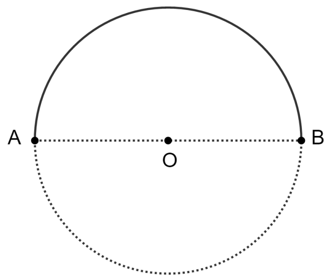


Figura 5.4: Semicircunferência $\widehat{AB}$.

Nota 1. A menos de menção contrária, $\widehat{AB}$ sempre denotará o arco menor.

Exercício de Fixação 5.1. Determine o raio da circunferência de centro O, dados que $AB = 3x - 3$ é um diâmetro e $OA = x - 3$.

5.2 Círculo

Definição 5.2.1. Chamamos *círculo* a união de uma circunferência com o seu interior.

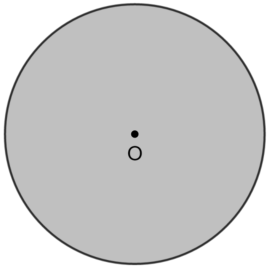


Figura 5.5: Círculo (O, r).

Como fizemos com a circunferência, considerando segmentos internos a ela, podemos fazer com o círculo.

Dividindo um círculo com dois raios, como se estivéssemos cortando um pedaço de uma pizza, obtemos um *setor circular*. Na figura 5.6 DOE é um setor circular.

Considerando uma corda e uma das partes que ela divide obtemos um *segmento circular*. Na figura 5.6 ABC é um segmento circular.

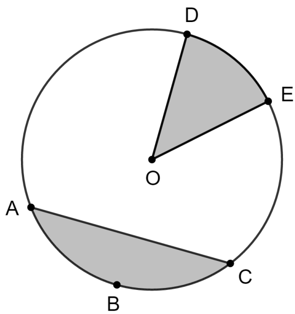


Figura 5.6: Setor circular e segmento circular.

De forma análoga à circunferência, chamamos a metade de um círculo (dividido por um diâmetro) de *semicírculo*.

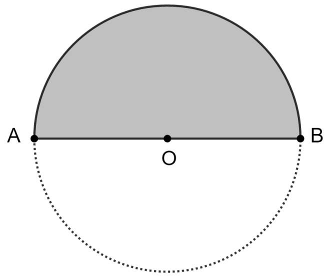


Figura 5.7: Semicírculo.

5.3 Posições relativas

Sejam r uma reta e Γ uma circunferência de cento O e raio r. Então ocorre uma - e apenas uma - das situações abaixo:

a. A reta r intersecta Γ em único ponto P. Neste caso chamamos P ponto de tangência e r reta tangente à Γ no ponto P.

b. A reta r intersecta Γ em dois pontos. E r é chamada reta secante à Γ.

c. Todos os pontos de r são *exteriores* à Γ, isto é, r e Γ não têm pontos em comum.

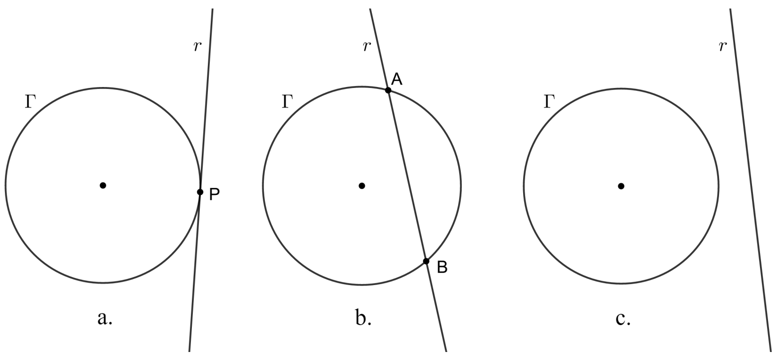


Figura 5.8: Posições relativas reta-circunferência.

Exercício de Aprofundamento 5.1. Mostre que para uma reta ser tangente a uma circunferência é necessário e suficiente que ela seja perpendicular ao raio que une o centro a um ponto de interseção da reta com a circunferência.

Nota 2. O exercício anterior nos garante que, no item a. da figura 5.8 temos $\overline{OP} \perp r$ (O sendo o centro de Γ).

Definição 5.3.1. Duas circunferências distintas são *tangentes* se possuem uma reta tangente comum e com o mesmo ponto de tangência. Duas circunferências se tangenciam externamente (internamente) caso seus centros estejam em lados opostos (no mesmo lado) da tangente em comum.

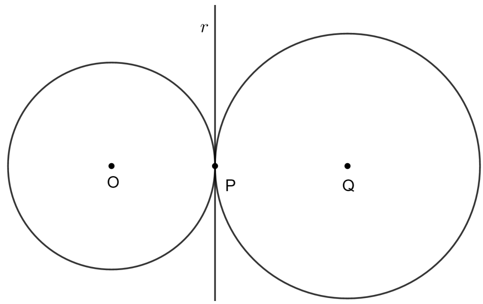


Figura 5.9: Circunferências externamente tangentes.

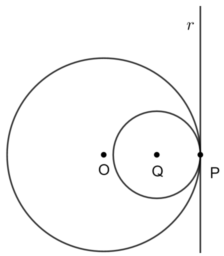
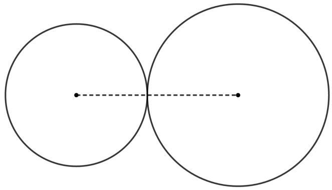
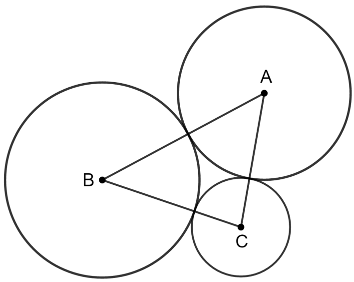


Figura 5.10: Circunferências internamente tangentes.

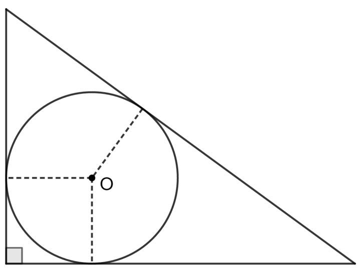
Exercício de Fixação 5.2. As circunferências da figura são tangentes externamente. Se a distância entre os centros é 28 cm e a diferença entre os raios é 8 cm, determine os raios.



Exercício de Fixação 5.3. Na figura, as circunferências são duas a duas tangentes e os centros são os vértices do triângulo ABC. Sendo $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm e $BC = 6$ cm, determine os raios das circunferências.



Exercício de Aprofundamento 5.2. Dizemos que um círculo é *inscrito* em um triângulo, se é o maior círculo interno a este triângulo. Além disso, um círculo inscrito tangencia cada um dos lados do triângulo. Dado um triângulo retângulo de lados a, b e c. Determine o raio do círculo em função dos lados do triângulo.



5.4 Ângulos na circunferência

Como vimos anteriormente, podemos considerar um ângulo como uma fração de circunferência. Por exemplo, na figura 5.11 o ângulo $A\hat{O}B$ e o arco menor $\overset{\frown}{AB}$, por definição, tem a mesma medida.

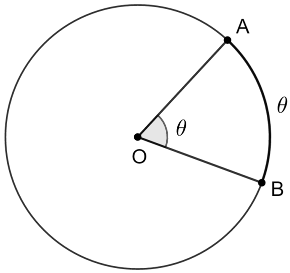


Figura 5.11: Ângulo e arco medindo θ.

Nota 3. Quando o vértice de um ângulo coincide com o centro de uma circunferência chamamos este ângulo de *ângulo central*. Na figura 5.11 $A\hat{O}B$ é um ângulo central.

Exercício de Fixação 5.4. Dado um arco menor $\overset{\frown}{AB}$ quanto vale (em graus) o arco maior $\overset{\frown}{AB}$?

5.4.1 Ângulo Inscrito

Definição 5.4.1. Um ângulo é dito *inscrito* em uma circunferência Γ se seu vértice pertence à Γ e se as semirretas que o formam contêm cordas de Γ.

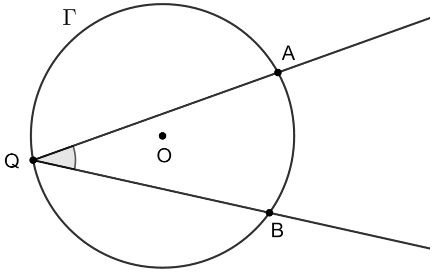


Figura 5.12: Ângulo inscrito em Γ.

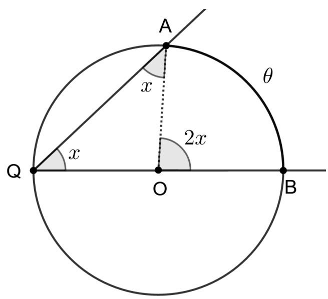
Já sabemos que ângulos centrais e seus arcos correspondentes têm a mesma medida, mas e os ângulos inscritos? Veremos agora um teorema que pode nos auxiliar.

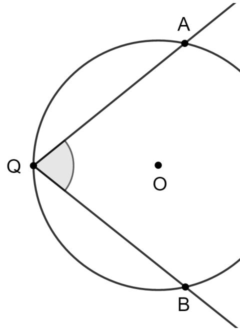
Teorema 5.1. A medida de um ângulo inscrito é a metade de seu arco correspondente.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em três casos, dos quais provaremos um e os demais ficarão como exercício.

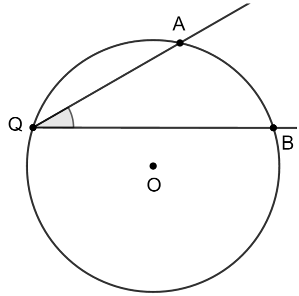
I. $\overline{QB}$ é um diâmetro.

Suponha que o arco $\widehat{AB}$ mede θ. Como $OQ = OA$ o triângulo OAQ é isósceles, logo $O\hat{A}Q = O\hat{Q}A = x$ e pelo teorema do ângulo externo $A\hat{O}B = 2x$. Como $A\hat{O}B$ corresponde a $\widehat{AB}$ temos que $2x = \theta$, donde $x = \frac{\theta}{2}$.





II. O ângulo $A\hat{Q}B$ "contém" o ponto O.

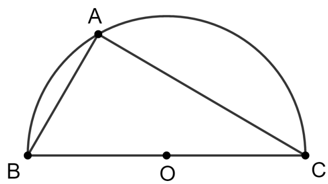


III. O ângulo $A\hat{Q}B$ não "contém" o ponto O.

■

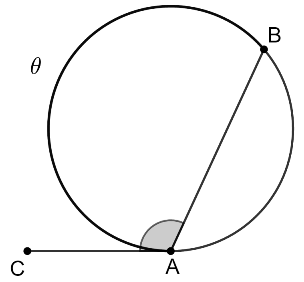
Exercício de Aprofundamento 5.3. Demonstre os casos restantes do teorema 5.1.

Exercício de Aprofundamento 5.4. Mostre que se $\overline{BC}$ é um diâmetro então $B\hat{A}C = 90°$.



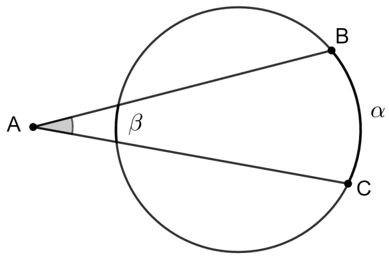
5.4.2 Ângulo Semi-inscrito

Dada uma corda $\overline{AB}$ e um segmento $\overline{AC}$ tangente à circunferência em A, temos que a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a metade do arco $\widehat{AB}$ enxergado por esse ângulo. Na figura, $B\hat{A}C = \frac{\theta}{2}$.

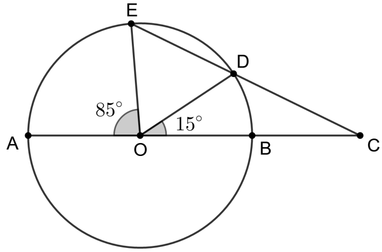


5.4.3 Ângulo Externo

Considere um ponto A externo à circunferência, dois segmentos secantes $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ como na figura e os arcos que eles intersectam α e β. Então a medida do ângulo externo $B\hat{A}C$ é igual a semi diferença positiva entre α e β, isto é $B\hat{A}C = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

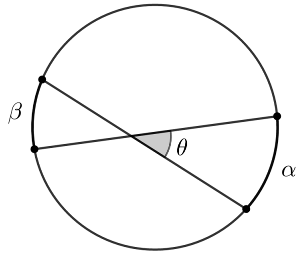


Exercício de Fixação 5.5. Na figura, $\overline{AB}$ é o diâmetro do círculo com centro em O. Se $B\hat{O}D = 15°$ e $E\hat{O}A = 85°$, encontre o valor de $E\hat{C}A$.



5.4.4 Ângulo Interno

O ângulo interno a uma circunferência formado por duas cordas é igual a semi soma dos arcos intersectados, isto é, na figura o ângulo demarcado tem medida $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$.



Exercício de Aprofundamento 5.5. Demonstre as fórmulas apresentadas para os ângulos semi-inscritos, externos e internos.

5.5 Propriedades da Circunferência

Vamos abordar algumas propriedades relacionadas a circunferências e outras serão deixadas como exercícios. Vamos assumir o seguinte postulado: Existem exatamente duas retas tangentes à uma circunferência passando por um ponto exterior.

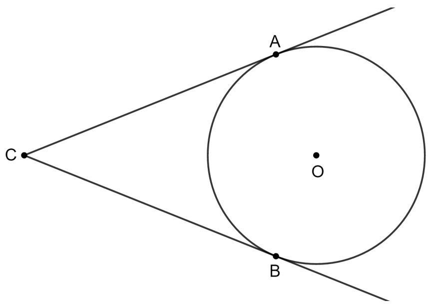
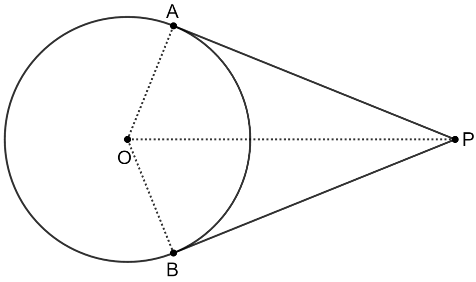


Figura 5.13: Tangentes à uma circunferência.

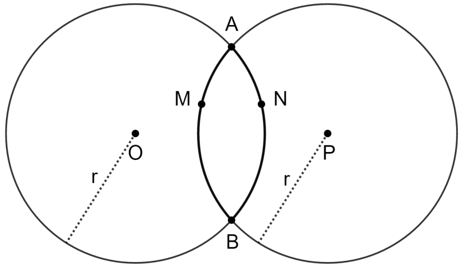
I. (Princípio das tangentes iguais) Os segmentos tangentes passando por um ponto exterior a uma circunferência são congruentes, isto é, na imagem abaixo $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.



Demonstração. Note que os triângulos AOP e BOP são retângulos em A e B, respectivamente. Eles também possuem a mesma hipotenusa $\overline{OP}$ e um cateto congruente $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$. Nessas condições é válido o caso de congruência para triângulos retângulos e $\triangle AOP \equiv \triangle BOP$, o que implica em $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ como queríamos. (Note que isso também mostra que $\overline{OP}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$).

■

II. Duas circunferências congruentes (isto é, de mesmo raio) que se intersectam em dois pontos determinam arcos congruentes. Na imagem abaixo $\widehat{AMB} \equiv \widehat{ANB}$.

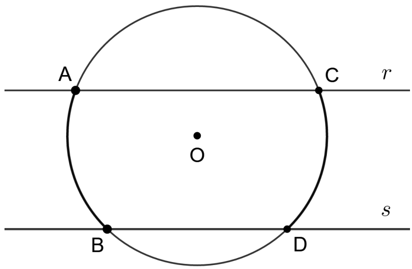


Demonstração. Como as circunferências são congruentes temos que $OA = PA = OB = PB = r$ e então $\triangle AOP \equiv$

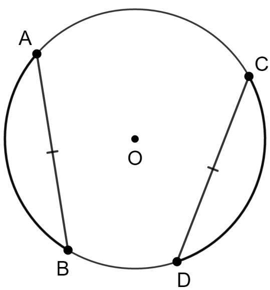
$\triangle BOP$ pelo critério LLL. Agora, estes triângulos são equiláteros, logo $B\hat{O}P \equiv B\hat{P}O$ e $A\hat{O}P \equiv A\hat{P}O$ e pela congruência dos triângulos temos que todos estes ângulos tem a mesma medida, logo $A\hat{O}B \equiv A\hat{P}B$ e então os arcos $\widehat{AMB}$ e $\widehat{ANB}$ são congruentes pois seus ângulos centrais o são.

■

III. Duas retas paralelas, secantes a uma circunferência, determinam arcos congruentes (de medida igual).



IV. Duas cordas de mesma medida determinam, em um mesma circunferência, arcos de mesma medida (e vice-versa).



Exercício de Aprofundamento 5.6. Demonstre as propriedades III e IV. (Dicas: Para III use o teorema do ângulo inscrito e para IV encontre triângulos congruentes).

5.6 Comprimento da Circunferência

A cada circunferência (O, r) podemos associar um número real positivo C, o qual corresponde ao *comprimento da circunferência*, isto é, seu perímetro.

Mas quanto vale C de fato? Os gregos antigos já sabiam como trabalhar com este problema. Veja que é razoável afirmar que C é *proporcional* ao diâmetro de (O, r), isto é, $C = (constante) \cdot 2r$, pois com um aumento do diâmetro obtêm-se uma circunferência "maior" e, por consequência, um maior perímetro.

Denotamos essa constante pela letra grega π. Não sabemos quanto π vale exatamente, por se tratar de um número irracional, mas temos aproximadamente $\pi \approx 3,141592653589793$ (15 casas decimais).

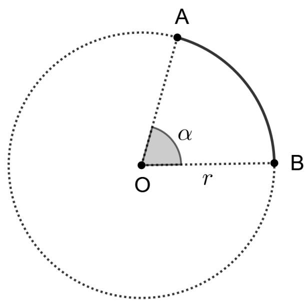
Portanto dada uma circunferência de raio r seu comprimento é dado pela expressão:

$$C = 2\pi r.$$

Note que, como um arco $\widehat{AB}$ é uma fração de circunferência, seu comprimento é proporcional a mesma, logo podemos calculá-lo por

i. Para α em graus, $C_{\widehat{AB}} = \dfrac{\alpha \pi r}{180}$.

ii. Para α em radianos, $C_{\widehat{AB}} = r\alpha$.



Nota 4. Devemos ter cuidado para não confundir os conceitos de *medida* de arco (relacionado ao ângulo central correspondente) e *comprimento* de arco (relacionado à metrificação de um segmento).

5.7 Potência de Ponto

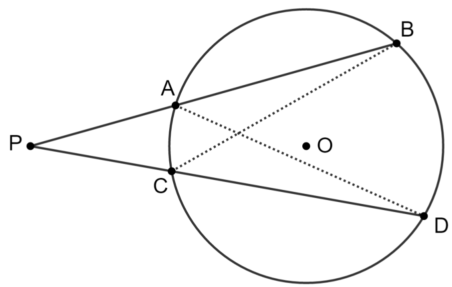
Considere uma circunferência $\Sigma = (O, r)$ e um ponto P. Podemos traçar retas por P que intersectam Σ em pontos A e B, C e D, E e F, ... Denomina-se *potência de ponto com relação a uma circunferência*, a relação:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE \cdot PF = k,$$

onde k é uma constante, chamada *potência do ponto P em relação à Σ*.

Vamos mostrar que esta propriedade é verdadeira. Para isso dividimos em 3 casos:

I. P é externo à circunferência.



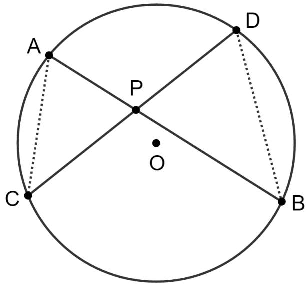
Veja que $A\hat{B}C \equiv A\hat{D}C$, pois ambos possuem $\overset{\frown}{AC}$ como arco correspondente (eles "enxergam" o mesmo arco) e como $A\hat{P}D = C\hat{P}B$ temos que $\triangle PAD \sim \triangle PCB$. Desta semelhança segue,

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

donde

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

II. P é interno à circunferência.



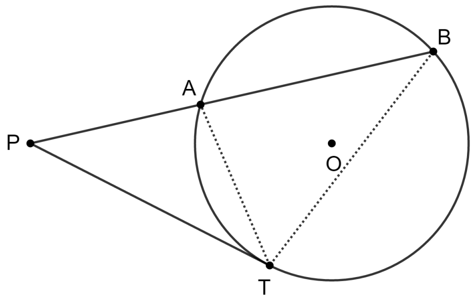
De forma análoga ao item anterior temos que $C\hat{A}B \equiv C\hat{D}B$ (ambos "enxergam" $\widehat{CB}$). Também $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}B$ são opostos pelo vértice, logo congruentes, assim temos que $\triangle APC \sim \triangle DPB$, e vale

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB},$$

logo

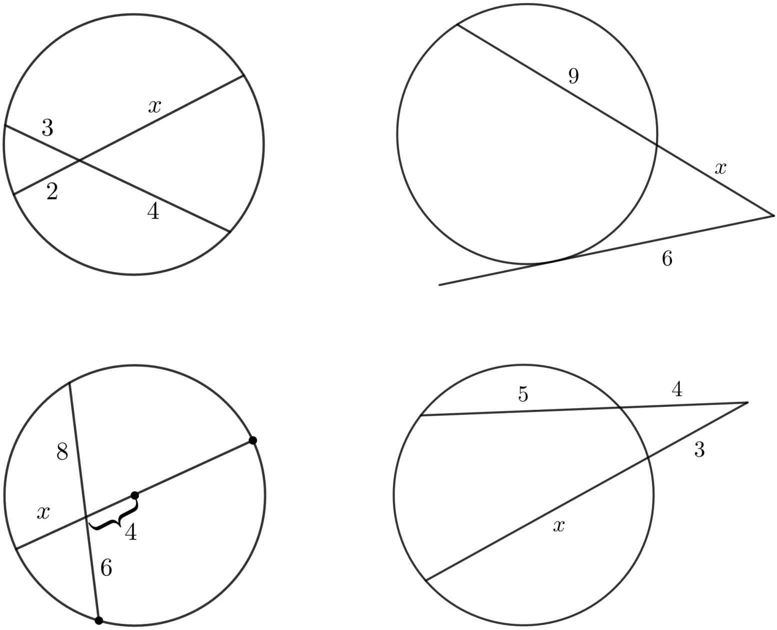
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

III. P é externo e uma das retas é tangente à circunferência em um ponto T. Neste caso teremos $PT^2 = PA \cdot PB$.

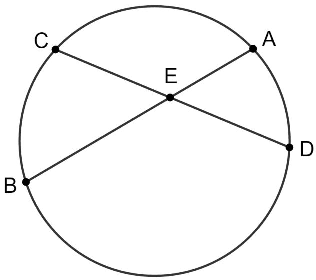


Tente você demonstrar este último caso!

Exercício de Fixação 5.6. Nos casos abaixo determine a incógnita:



Exercício de Fixação 5.7. Na figura, sendo $\frac{ED}{EC} = \frac{2}{3}$, $AE = 6$ e $EB = 16$, calcule o comprimento de CD.



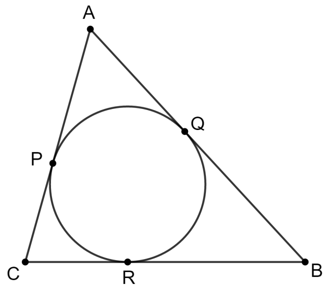
Exercício de Aprofundamento 5.7. $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são duas cordas de medidas iguais, pertencentes a um círculo. Uma corda $\overline{AD}$ intercepta a corda $\overline{BC}$ num ponto P. Prove que os triângulos ABD e APB são semelhantes.

Problemas Propostos

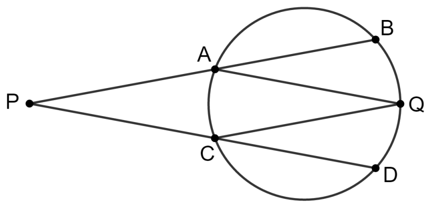
Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

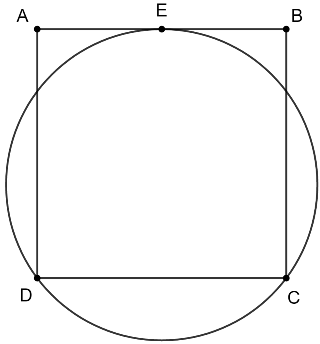
1. ● Na figura, sabendo que $AB = c, BC = a$ e $AC = b$ e que p é o semiperímetro do triângulo ABC, mostre que $AP = p - a$.



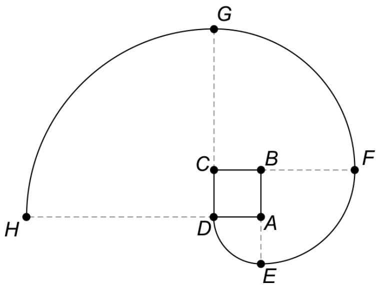
2. ● Os pontos A, B, C e D pertencem à circunferência como na figura e as medidas dos arcos $\widehat{BQ}$ e $\widehat{QD}$ são 42° e 38°, respectivamente. Qual é a medida da soma dos ângulos $A\hat{P}C$ e $A\hat{Q}C$?



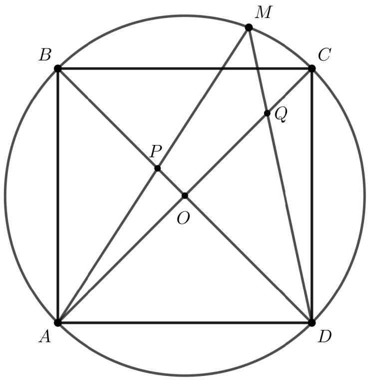
3. ● Na figura abaixo E é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $ABCD$ é um quadrado. Construímos uma circunferência passando por C, D e E. Qual comprimento é maior, o da circunferência ou o perímetro de $ABCD$?



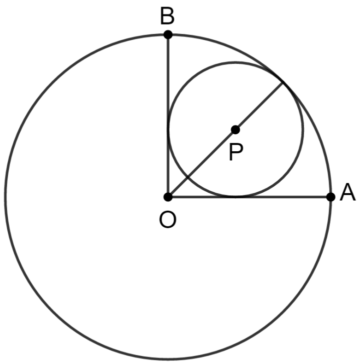
4. ● (OBMEP 2008) A figura mostra um quadrado $ABCD$ de lado 1 cm e arcos de circunferência $\widehat{DE}, \widehat{EF}, \widehat{FG}$ e $\widehat{GH}$ com centros em A, B, C e D, respectivamente. Qual é a soma dos comprimentos desses arcos?



5. ▲ (OBMEP - Adaptada) O quadrado $ABCD$ de lado 1 cm está inscrito em uma circunferência de centro O. O ponto M está sobre o arco $\widehat{BC}$, o segmento $\overline{AM}$ encontra $\overline{BD}$ no ponto P, o segmento $\overline{DM}$ encontra $\overline{AC}$ no ponto Q. Mostre que $A\hat{Q}D = P\hat{A}D$.

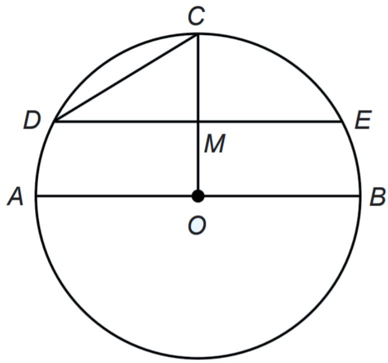


6. ▲ Determine o raio da circunferência menor, inscrita num quadrante da circunferência maior (isto é, $B\hat{O}A = 90°$), sendo $2R$ o diâmetro da circunferência maior.



7. ▲ (OBM 2001 - Adaptada) Os pontos $P_1, P_2, P_3, ...$ estão nesta ordem sobre uma circunferência e são tais que o arco que une cada ponto ao seguinte mede 35°. Qual é o menor valor de $n > 1$ tal que P_n coincide com P_1.

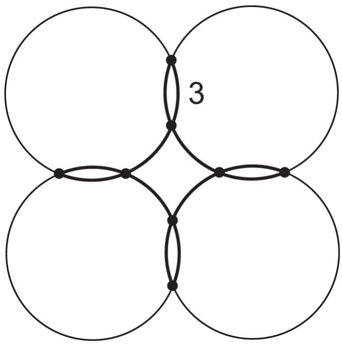
8. ▲ Na figura abaixo, temos uma circunferência na qual:



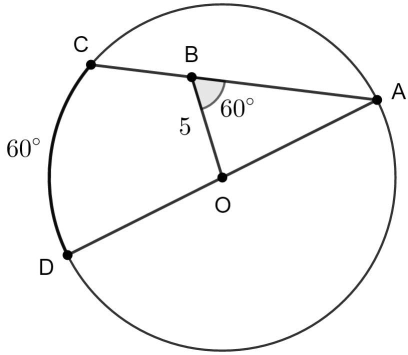
- A corda $\overline{DE}$ é paralela ao diâmetro $\overline{AB}$.
- M é ponto médio de $\overline{OC}$.
- $\overline{OC}$ é perpendicular a $\overline{AB}$.
- $DE = 12$.

Determine a medida de $\overline{DC}$.

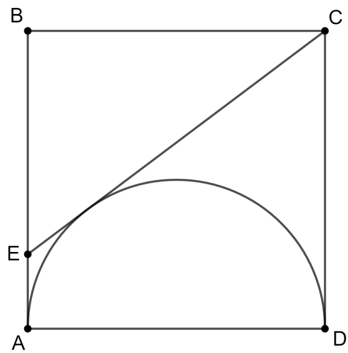
9. ▲ (OBMEP 2014) Quatro circunferências de mesmo raio estão dispostas como na figura, determinando doze pequenos arcos, todos de comprimento 3. Qual é o comprimento de cada uma dessas circunferências?



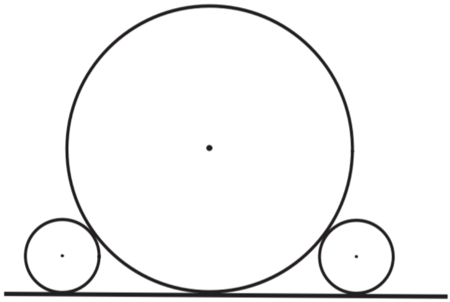
10. ▲ Na circunferência de centro O na figura o ponto B está na corda $\overline{AC}$, com $OB = 5$. Se o arco $\widehat{CD}$ e o ângulo $O\hat{B}A$ são ambos de 60°, determine o comprimento de $\overline{BC}$.



11. ♦ (AMC 2004) Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado de lado 2 cm. Uma semicircunferência com diâmetro AB é construída dentro do quadrado e a tangente à semicircunferência por C intersecta o lado $\overline{AD}$ em E. Qual é o comprimento de $\overline{CE}$?

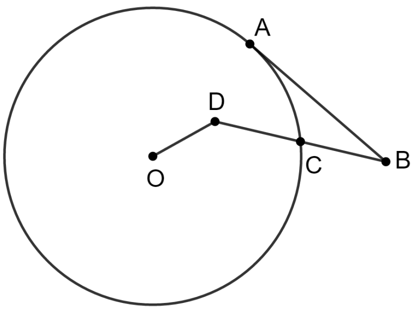


12. ♦ Três goiabas perfeitamente esféricas de centros C_1, C_2 e C_3 de raios 2 cm, 8 cm e 2 cm, respectivamente, estão sobre uma mesa tangenciando-se como sugere a figura.

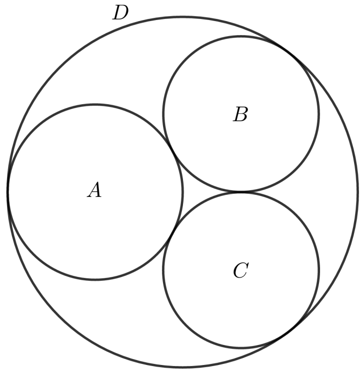


Um bichinho que está no centro da primeira goiaba quer se dirigir para o centro da terceira pelo caminho mais curto. Quantos centímetros percorrerá?

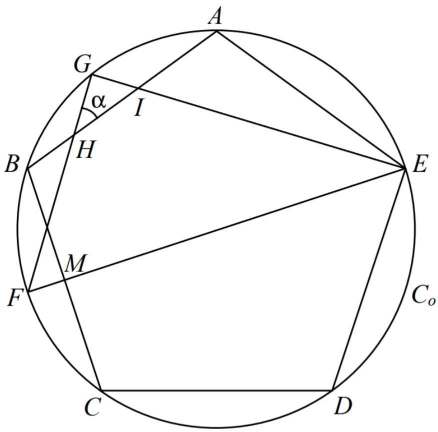
13. ♦ (AHSME 1976) Na figura, $\overline{AB}$ é tangente em A à circunferência com centro O, o ponto D é interior à circunferência e $\overline{DB}$ intersecta a circunferência em C. Se $BC = DC = 3$, $OD = 2$ e $AB = 6$, encontre o raio da circunferência.



14. ♦ (AMC 2004) As circunferências A, B e C são externamente tangentes umas às outras e internamente tangentes à circunferência D. Sabendo que B e C são congruentes, e A tem raio 1 e passa pelo centro de D, encontre o raio de B.



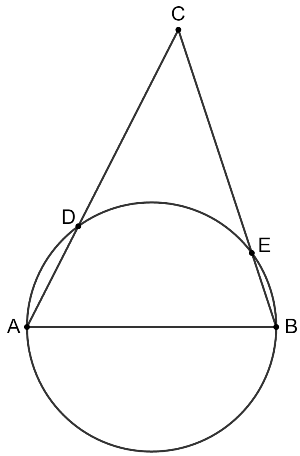
15. ♦ (OBM 2006) Na figura a seguir, o pentágono regular $ABCDE$ e o triângulo EFG estão inscritos na circunferência C_O e M é ponto médio de $\overline{BC}$. Para qual valor de α, em graus, os triângulos EFG e HIG são semelhantes?



16. ♦ (OCM) Duas tangentes $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são traçadas a um círculo de um ponto externo O. Uma corda $\overline{AC}$ é construída paralela a $\overline{OB}$ e uma secante $\overline{OC}$ é desenhada intersectando o círculo em E. Se K é o ponto de interseção de $\overline{OB}$ com o prolongamento de $\overline{AE}$, prove que $OK = KB$.

17. ♦ (OBM 2015) Duas circunferências C_1 e C_2 se intersectam nos pontos A e B. A tangente a C_1 por A corta C_2 novamente no ponto P e a tangente a C_2 por A corta C_1 novamente no ponto Q. Sabendo que $PB = 640$ e $QB = 1000$, determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

18. ♦ (AIME - Adaptada) Na figura, ABC é um triângulo e $AB = 30$ é o diâmetro da circunferência. Se $AD = \frac{AC}{3}$ e $BE = \frac{BC}{4}$, qual é o perímetro do triângulo ABC?

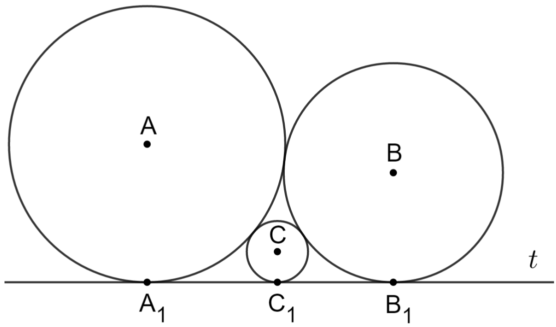


19. ♦ Seja $P_1P_2P_3P_4$ um quadrilátero inscrito em uma circunferência de diâmetro D e X a intersecção de suas diagonais. Mostre que se $\overline{P_1P_3} \perp \overline{P_2P_4}$ então

$$D^2 = XP_1^2 + XP_1^2 + XP_3^2 + XP_4^2.$$

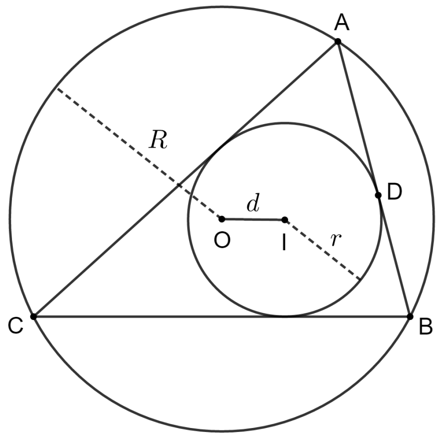
Observação: Um quadrilátero é dito inscrito em uma circunferência se seus vértices pertencem a mesma.

20. ♦ Três circunferências com centros A, B e C são tangentes umas as outras e à reta t, como na figura abaixo. Sejam a, b e c os raios das circunferências de centros A, B e C, respectivamente. Mostre que $\dfrac{1}{\sqrt{c}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.



Dica: Considere projeções de C em AA_1 e BB_1 e use o teorema de pitágoras

21. ★ (Teorema de Euler) Neste problema vamos provar o Teorema de Euler: A distância d entre o circuncentro e o incentro de qualquer triângulo é dada por $d^2 = R^2 - 2Rr$, onde R é o raio da circunferência circunscrita e r é o raio da circunferência inscrita. Na figura, $OI^2 = R^2 - 2Rr$.



Para demonstrar este fato faça as construções (i - iii) e, se preferir, siga os passos (a - c) abaixo:

i. Prolongue $\overline{AI}$, encontrando (O, R) em L e então prolongue $\overline{LO}$ encontrando novamente (O, R) em M.

ii. Prolongue $\overline{BI}$, encontrando (O, R) em T.

iii. Prolongue $\overline{OI}$, encontrando (O, R) nos pontos P e Q.

. . . .

a. Verifique que L é o ponto médio do arco $\widehat{BC}$ e T é o ponto médio do arco $\widehat{AC}$.

b. Analise os triângulos ADI e MBL e conclua $2Rr = AI \cdot IL$.

c. Estude as cordas $\overline{AL}$ e $\overline{PQ}$ que se intersectam em I e conclua a tese.

Aula 6

Trigonometria

Nesta aula veremos algumas das mais importantes relações métricas nos triângulos retângulos: as *razões trigonométricas*, bem como abordagens para triângulos quaisquer.

6.1 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Seja ABC um triângulo retângulo com lados de medida a, b e c como na figura abaixo.

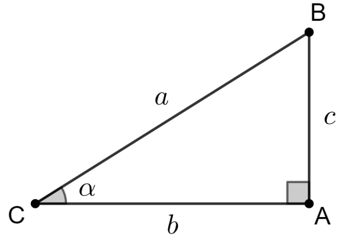


Figura 6.1: Triângulo retângulo ABC.

Denotando $A\hat{C}B = \alpha$, sem perda de generalidade definimos as *razões trigonométricas*:

i. Seno de α : razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo $A\hat{C}B$ e a medida da hipotenusa, a qual abreviamos por $\operatorname{sen}\alpha$.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}.$$

ii. Cosseno de α : razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo $A\hat{C}B$ e a medida da hipotenusa, a qual abreviamos por $\cos\alpha$.

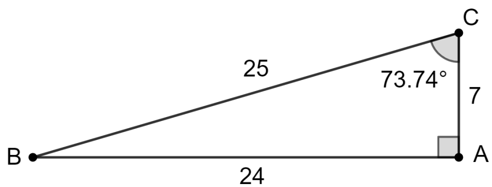
$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}.$$

iii. Tangente de α : razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente ao ângulo $A\hat{C}B$, a qual abreviamos por $\operatorname{tg}\alpha$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{c}{b}.$$

De forma análoga faríamos para o ângulo $A\hat{B}C$. Perceba que só faz sentido considerar razões trigonométricas como definidas acima para ângulos agudos ($0° < \alpha < 90°$), pois de outra forma os conceitos de "cateto oposto" e "cateto adjacente" não fazem sentido. Na seção 6.5 veremos como ampliar estas definições para qualquer ângulo na circunferência.

Exemplo 6.1. No triângulo abaixo vamos encontrar o valor das razões trigonométricas para o ângulo $\hat{C}$.



Como ABC é retângulo as razões trigonométricas estão definidas e assumem os seguintes valores:

$$\text{sen}(73,74°) = \frac{AB}{BC} = \frac{24}{25}.$$
$$\cos(73,74°) = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{25}.$$
$$\text{tg}(73,74°) = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{7}.$$

Um fato importante é que as razões trigonométricas, por mais que definidas a partir de medidas de segmentos, dependem "apenas" do ângulo em questão. Uma forma de se pensar isto é a partir de triângulos semelhantes. Veja a figura abaixo:

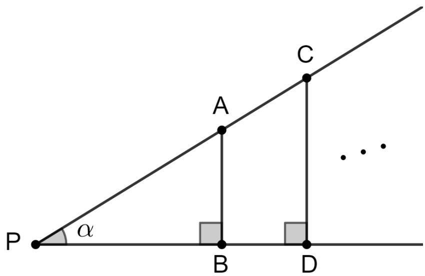


Figura 6.2: Triângulos semelhantes.

Por exemplo para o seno: No triângulo PAB temos

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{AB}{AP}.$$

e para o triângulo PCD temos

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{CD}{CP}.$$

E de fato ocorre $\frac{AB}{AP} = \frac{CD}{CP}$ pelas semelhanças dos triângulos.

Desta forma uma vez que sabemos o valor X de uma **razão** trigonométrica para um ângulo α - por exemplo, $\cos\alpha = X$ - sempre que esta razão, agora para um ângulo β, atinge o mesmo valor devemos ter $\beta = \alpha$ - no exemplo, $\cos\beta = X \Rightarrow \beta = \alpha$.

Exercício de Fixação 6.1. Mostre que, para todo ângulo agudo α, temos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}.$$

Nota 1. Sempre que $\alpha + \beta = 90°$ temos $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ (considere um triângulo retângulo com estes ângulos e deduza as relações para se convencer!).

6.1.1 Ângulos Notáveis

Os ângulos de $30°, 45°$ e $60°$ são usualmente chamados de notáveis. Vamos descobrir as razões trigonométricas para estes ângulos.

Considere um triângulo isósceles e reto:

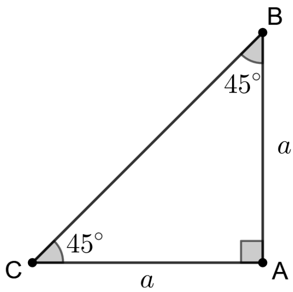


Figura 6.3: Triângulo isósceles reto ABC.

Sabemos que, pelo teorema de Pitágoras, $BC = a\sqrt{2}$. Também todo triângulo nessas condições possui ângulos: $\hat{B} = \hat{C} = 45°$. Assim, temos

$$\operatorname{sen}\hat{B} = \operatorname{sen}45° = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos\hat{B} = \cos 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \operatorname{tg}45° = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1.$$

Para os ângulos de $30°$ e $60°$ consideramos um triângulo equilátero como abaixo

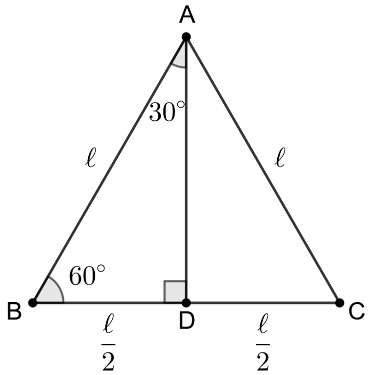


Figura 6.4: Triângulo equilátero ABC.

O segmento $\overline{AD}$ representa a altura do triângulo equilátero ABC, desta forma é certo que $AD = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Logo, aplicando as razões trigonométricas para o triângulo ABD temos,

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{1}{2}.$$

Para agrupar os resultados anteriores considere a tabela abaixo.

α	30°	45°	60°
$\operatorname{sen}\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

6.2 Fórmulas da adição e subtração

Eventualmente é necessário calcular razões trigonométricas para ângulos não notáveis. Para isso existem algumas fórmulas dadas em termo de elementos conhecidos, que podem nos auxiliar.

Dados dois ângulos agudos α e β tais que $0° < \alpha, \beta, \alpha-\beta, \alpha+\beta < 90°$, são válidas as fórmulas de adição:

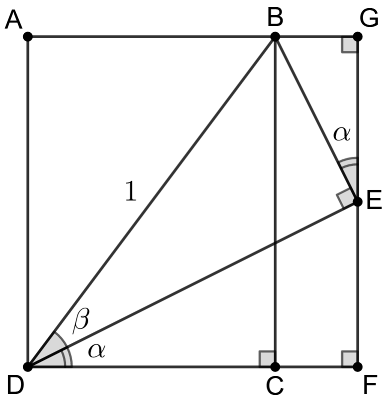
$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

e de subtração:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{cases}$$

Vamos demonstrar o primeiro caso (o segundo segue de maneira análoga).

Demonstração. Considere a configuração abaixo, onde arranjamos um retângulo $ABCD$ de diagonal unitária e quatro triângulos retângulos BCD, BDE, DEF e BEG.



(Justifique a igualdade dos ângulos $E\hat{D}F$ e $B\hat{E}G$). Sistematicamente temos,

- No $\triangle BCD$: $\text{sen}(\alpha+\beta) = \dfrac{BC}{1} = BC = AD$ e $\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{DC}{1} = DC = AB$.

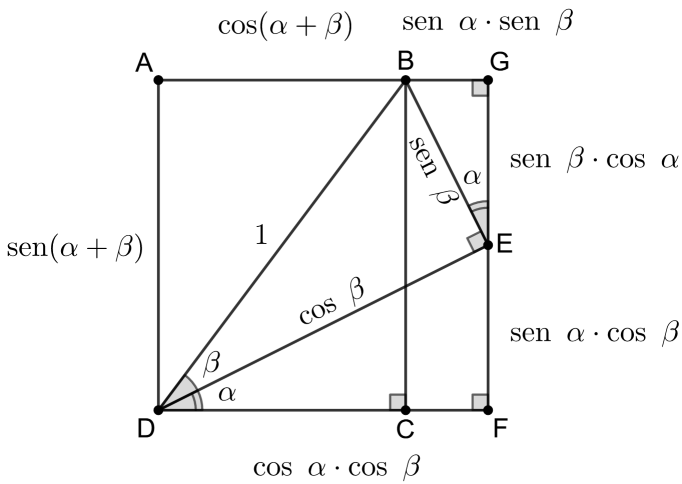
- No $\triangle BDE$: $\text{sen}\,\beta = \dfrac{BE}{1} \Rightarrow BE = \text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta = \dfrac{DE}{1} \Rightarrow DE = \cos\beta$.

Usando as relações anteriores vamos analisar os triângulos DEF e BEG:

- Em DEF, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{EF}{DE} = \dfrac{EF}{\cos\beta} \Rightarrow EF = \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\beta$ e $\cos\alpha = \dfrac{DF}{DE} = \dfrac{DF}{\cos\beta} \Rightarrow DF = \cos\alpha\cdot\cos\beta$.

- Em BEG, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{BG}{BE} = \dfrac{BG}{\text{sen}\,\beta} \Rightarrow BG = \text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta$ e $\cos\alpha = \dfrac{EG}{BE} = \dfrac{EG}{\text{sen}\,\beta} \Rightarrow EG = \text{sen}\,\beta\cdot\cos\alpha$.

Agora já temos todas as informações necessárias para completar a prova, vamos reunir todos os resultados na figura original:



Como $AD = GF$ temos,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= GF\\ &= GE + EF\\ &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha.\end{aligned}$$

Também $AB = DC$, logo

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= DC\\ &= DF - CF\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.\end{aligned}$$

■

Exercício de Fixação 6.2. Encontre as razões trigonométricas para os ângulos de 15° e 75°.

Exercício de Aprofundamento 6.1. Demonstre as fórmulas para a tangente soma e da diferença de dois ângulos agudos:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

e

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$

Exercício de Aprofundamento 6.2. Encontre expressões para o seno e cosseno de arcos duplos e triplos, isto é: $\cos 2\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta$, $\cos 3\theta$ e $\operatorname{sen} 3\theta$.

Para as próximas seções (6.3 e 6.4) vamos usar as definições abaixo (que serão justificadas na seção 6.5). Se $90° < \alpha < 180°$ definimos:

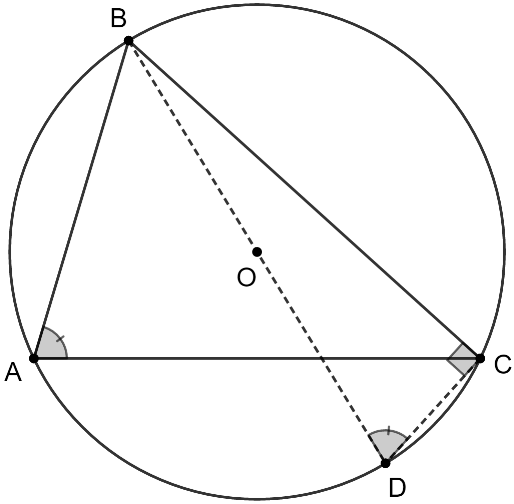
$$\operatorname{sen}\alpha := \operatorname{sen}(180° - \alpha) \text{ e } \cos\alpha := -\cos(180° - \alpha).$$

6.3 Lei dos senos

Teorema 6.1. Seja ABC um triângulo com lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Se R é o raio da circunferência circunscrita a ABC, então

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

Demonstração. Na figura abaixo consideramos o triângulo ABC e a circunferência de centro O e raio R onde o triângulo está inscrito. Também traçamos o diâmetro $\overline{BD}$ e a corda $\overline{CD}$.



Perceba que os ângulos inscritos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ enxergam o arco $\widehat{BC}$, logo possuem a mesma medida ($\hat{A} = \hat{D}$). Também notamos que o triângulo BCD é reto em C, pois $\overline{BD}$ é um diâmetro.

Desta forma temos,

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen}\hat{D} = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}}.$$

De forma análoga obtemos $\dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$, logo segue que

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

■

6.4 Lei dos cossenos

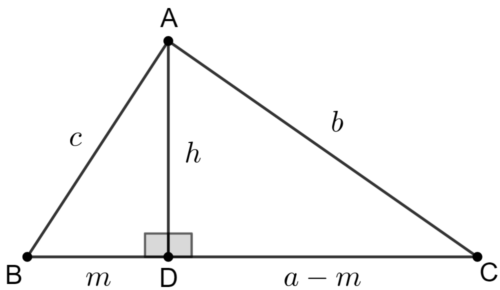
Teorema 6.2. Seja ABC um triângulo com lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$. Então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}.$$

Observação 6.4.1. Perceba que se um dos ângulos é reto, por exemplo $\hat{A}$, o cosseno não está definido (como uma razão trigonométrica). Mas não há problema! pois nesse caso é válido o teorema de Pitágoras e $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração. Consideremos o caso onde o triângulo ABC é acutângulo (possui todos os ângulos agudos). O caso dos triângulos obtusângulos é análogo.

Do vértice A baixamos uma perpendicular, que encontra o lado $\overline{BC}$ no ponto D e divide a medida do segmento em m e $a - m$.



Nessas condições aplicamos o teorema de Pitágoras em ABD e ACD, obtendo

$$c^2 = m^2 + h^2. \tag{1}$$

e

$$b^2 = (a-m)^2 + h^2$$
$$b^2 = a^2 - 2am + m^2 + h^2. \qquad (2)$$

Subtraindo (1) de (2) temos,

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2am \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2am.$$

Por fim note que $\cos \hat{B} = \frac{m}{c} \Rightarrow m = c \cos \hat{B}$. Substituindo esta expressão de m na equação assim obtemos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}.$$

De forma inteiramente análoga obtemos as demais relações

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

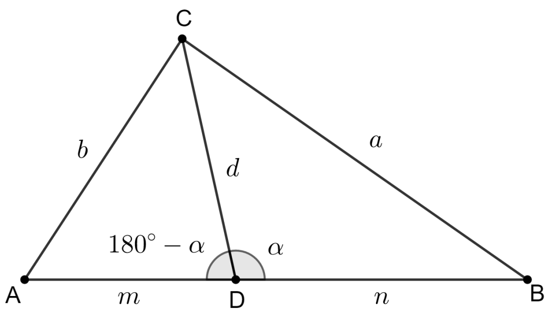
■

Teorema 6.3. (Stewart) Dados um triângulo ABC e um ponto D do lado $\overline{AB}$, vale a relação

$$a^2 n + b^2 m - d^2 c = cmn.$$

sendo a, b e c as medidas dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, d a medida da ceviana $\overline{CD}$ e m e n as medidas dos segmentos determinados pela ceviana $\overline{CD}$ no lado $\overline{AB}$.

Demonstração. O Teorema de Stewart é um corolário da lei dos cossenos. Na figura abaixo representamos os dados do enunciado:



Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos ACD e BCD obtemos as relações:

$$\begin{aligned} b^2 &= m^2 + d^2 - 2md\cos(180^\circ - \alpha) \\ b^2 &= m^2 + d^2 + 2md\cos\alpha \\ \frac{b^2}{m} &= m + \frac{d^2}{m} - 2d\cos\alpha \end{aligned} \tag{1}$$

e

$$\begin{aligned} a^2 &= n^2 + d^2 - 2nd\cos\alpha \\ \frac{a^2}{n} &= n + \frac{d^2}{n} - 2d\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

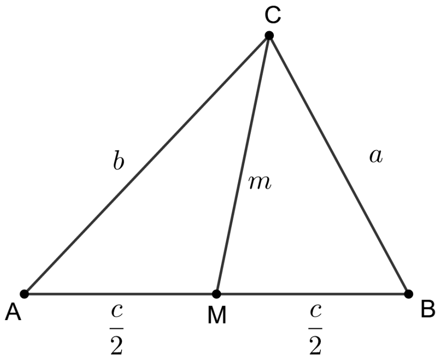
Somando (1) e (2) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{b^2}{m} + \frac{a^2}{n} &= m + n + \frac{d^2}{m} + \frac{d^2}{n} + 2d\cos\alpha - 2d\cos\alpha \\ \frac{b^2}{m} + \frac{a^2}{n} &= c + \frac{d^2}{m} + \frac{d^2}{n} \\ a^2n + b^2m &= cmn + d^2(m+n) \\ a^2n + b^2m &= cmn + d^2c \\ a^2n + b^2m - d^2c &= cmn. \end{aligned}$$

■

Exercício de Aprofundamento 6.3. A partir do teorema de Stewart, demonstre o seguinte resultado que relaciona a medida de uma mediana com os lados de um triângulo:

Teorema de Apolônio. Em todo triângulo a soma dos quadrados das medidas de dois lados é igual ao dobro do quadrado da medida da mediana relativa ao terceiro lado mais a metade do quadrado da medida deste terceiro lado.



Na figura,

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2}.$$

6.5 Círculo Trigonométrico

Podemos estender o conceito de razões trigonométricas, válidas sobre ângulos agudos em triângulos retângulos, para um ângulo qualquer na circunferência. Veremos que, nesta situação, é necessário o uso de mais ferramentas matemáticas como a estrutura do plano cartesiano.

Considere duas *retas orientadas** perpendiculares (eixos), cuja interseção é o ponto $O = (0, 0)$. Também consideramos um círculo unitário (de raio 1) centrado em O e pontos $P = (x, y)$ (variável), $A = (1, 0), B = (0, 1), C = (-1, 0)$ e $D = (0, -1)$ sobre a circunferência associada.

*Se trata de um segmento com sentido fixo, a qual podemos atribuir direção positiva e negativa. Costumamos representar a direção positiva por uma flecha.

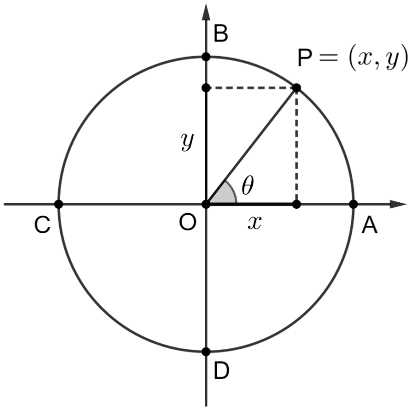


Figura 6.5: Círculo trigonométrico.

Perceba que podemos considerar o ângulo central $A\hat{O}P$ (que denotaremos por θ) para toda posição de P. Então, podemos definir as chamadas *relações trigonométricas*:

i. Seno de θ : Ordenada (coordenada vertical) do ponto P.

ii. Cosseno de θ : Abscissa (coordenada horizontal) do ponto P.

iii. Tangente de θ : Razão entre seno e o cosseno do ângulo θ, definida quando o segundo é não nulo.

Na figura 6.5 temos,

$$\cos\theta = x, \ \operatorname{sen}\theta = y \ \text{ e } \ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Nota 2. Os números x e y podem ser positivos, negativos ou nulos.

Observação 6.5.1. As relações trigonométricas, definidas para ângulos na circunferência, podem ser consideradas entre $0°$ e $360°$. Por uma questão de convenção, os ângulos são medidos no sentido anti-horário, sempre iniciando no ponto $(1, 0)$.

Por exemplo quando o ponto P coincide com A temos $A\hat{O}P = 0°$. Neste caso observamos que

$$\cos 0^\circ = 1, \ \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \ \text{ e } \ \operatorname{tg} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0.$$

Ou ainda, se $P = B$ temos $A\hat{O}P = 90^\circ$ e então

$$\cos 90^\circ = 0, \ \operatorname{sen} 90^\circ = 1 \ \text{ e } \ \operatorname{tg} 90^\circ \text{ não é definida (n.d.).}$$

Agora que definimos as relações trigonométricas para todo ângulo na circunferência, podemos completar a tabela de ângulos notáveis como abaixo:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.	0	n.d.

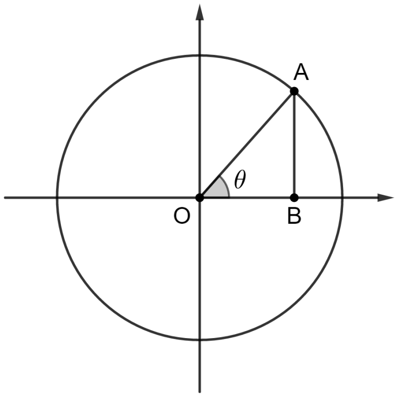
6.5.1 Relação Fundamental

Para todo ângulo θ na circunferência, temos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1.$$

Notação 1. $\operatorname{sen}^2\alpha$ (respectivamente $\cos^2\alpha$) se refere ao número $(\operatorname{sen}\alpha)^2$ (respectivamente $(\cos\alpha)^2$).

Para justificar este fato considere a figura abaixo, onde é ressaltado o triângulo retângulo AOB.



Aplicando o teorema de Pitágoras em AOB temos,

$$\begin{aligned} OB^2 + AB^2 &= OA^2 \\ (\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 &= 1^2 \\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta &= 1. \end{aligned}$$

O que garante a relação para $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$. Para ângulos maiores que 90° faz-se um raciocínio análogo, onde é o usado o fato que, ao "elevar ao quadrado", o sinal do seno e do cosseno não importam.

Exercício de Fixação 6.3. Dado um triângulo retângulo qualquer, com ângulos agudos α e β, prove que

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta = 1.$$

6.5.2 Reduções ao primeiro quadrante

Podemos dividir os ângulos na circunferência em 4 partes, chamadas quadrantes. Denotamo-os ordenadamente por: **primeiro** (0° até 90°), **segundo** (90° até 180°), **terceiro** (180° até 270°) e **quarto** (270° até 360°).

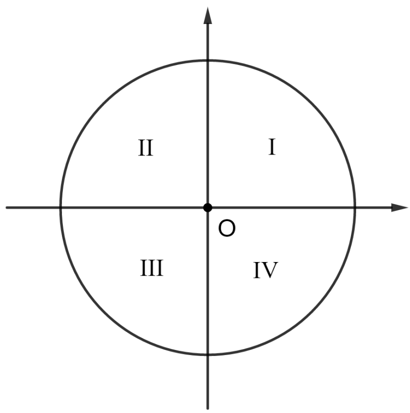


Figura 6.6: Quadrantes do círculo trigonométrico.

Veremos que, ao se tratar das relações trigonométricas, todos os ângulos na circunferência podem ser reduzidos ao primeiro quadrante.

6.5.3 Ângulos no 2º quadrante

Os ângulos da figura medem $P\hat{O}B = \theta$ e $Q\hat{O}B = 180° - \theta$. Observamos que os pontos B e C são simétricos, isto é, $B = -C$.

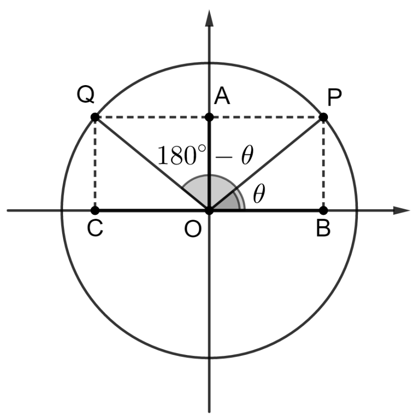


Figura 6.7: Ângulo no segundo quadrante.

Nessas condições temos que

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}\theta \text{ e } \cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta.$$

6.5.4 Ângulos no 3º quadrante

No terceiro quadrante temos mais simetrias: $A = -C$ e $B = -D$, bem como $Q\hat{O}B = 180^\circ + \theta$.

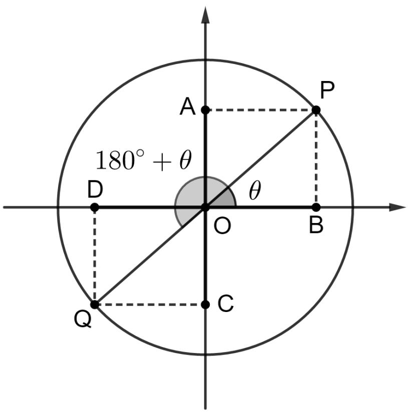


Figura 6.8: Ângulo no terceiro quadrante.

Desta forma concluímos que

$$\operatorname{sen}(180^\circ + \theta) = -\operatorname{sen}\theta \text{ e } \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta.$$

6.5.5 Ângulos no 4º quadrante

Por fim no quarto quadrante temos simetrias verticais, que indicam $A = -C$ e $Q\hat{O}B = 360^\circ - \theta$.

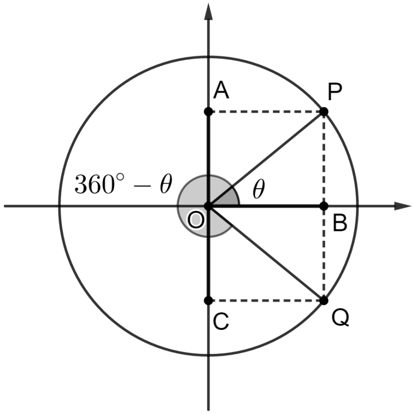


Figura 6.9: Ângulo no quarto quadrante.

Assim,

$$\operatorname{sen}(360^\circ - \theta) = -\operatorname{sen}\theta \text{ e } \cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta.$$

Nota 3. Todos os resultados da aula podem ser naturalmente adaptados com a notação de radianos ao invés de graus.

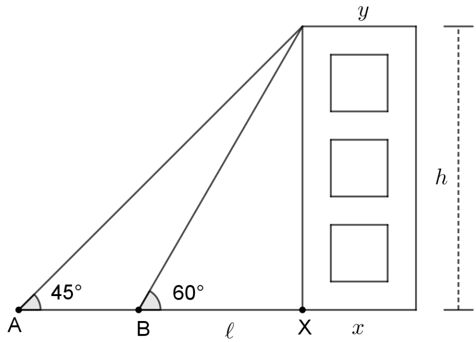
Problemas Propostos

Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Em um triângulo ABC de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, mostre que
$$[ABC] = \frac{bc \cdot \operatorname{sen}\hat{A}}{2}.$$

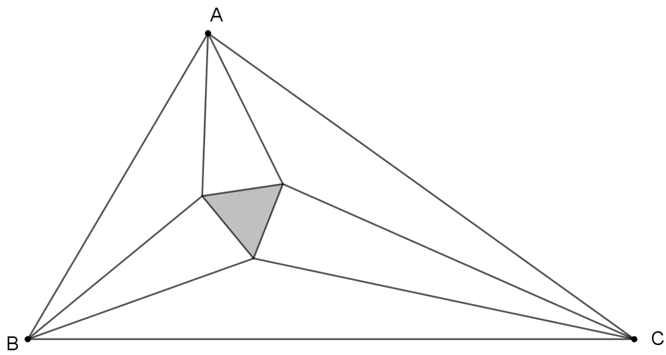
2. ● Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?



3. ● (ITA - SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol L e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto B?

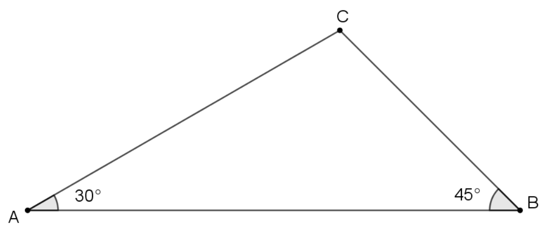
4. ● Dado um triângulo de lados 5 cm, 7 cm e 8 cm, determine o valor do cosseno e do seno do menor ângulo interno desse triângulo.

5. ▲ (OBM 2012 - Adaptada) O *teorema de Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo ABC em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley* de ABC, como o que está destacado na figura a seguir:



Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

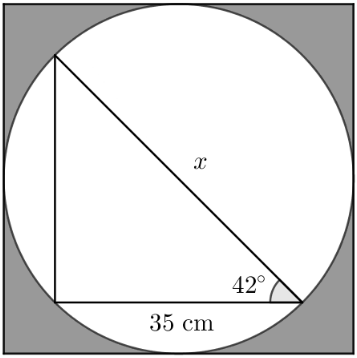
6. ▲ No triângulo a seguir temos que $AC = 4$ e $BC = 2\sqrt{2}$. Qual o valor de AB ?



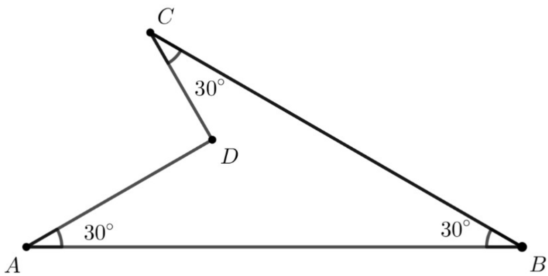
7. ▲ Seja ABC um triângulo de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$. Mostre que,

$$\frac{\operatorname{sen}\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{a+b}{c}.$$

8. ▲ Dadas as medidas na imagem a seguir, encontre o valor da área do quadrado que não está compreendida no círculo. Dê a resposta com duas casas decimais de precisão.



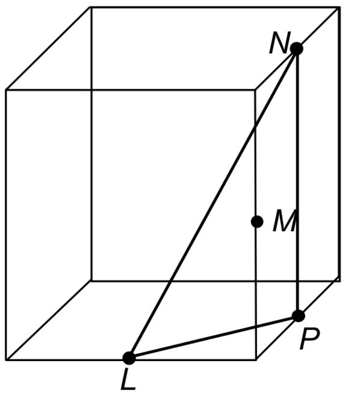
9. ▲ No quadrilátero $ABCD$, temos: $D\hat{A}B = A\hat{B}C = B\hat{C}D = 30°$, $AB = 4$ cm, $BC = 2\sqrt{3}$ cm.



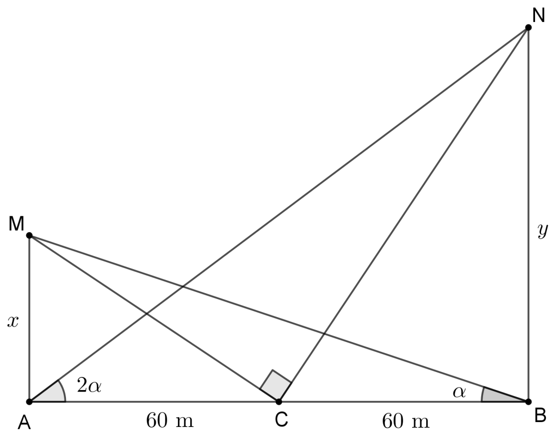
(a) Determine o valor do ângulo $D\hat{C}A$.

(b) Determine o comprimento CD.

10. ▲ (OBM 2005) Os pontos L, M e N são pontos médios de arestas do cubo, como mostra a figura. Quanto mede o ângulo $L\hat{M}N$?



11. ♦ (LINS-66) Tendo em vista as relações descritas na figura abaixo calcule as distâncias x e y.



12. ♦ Considere um polígono regular de n lados inscrito na circunferência de raio R. Prove que sua área A_n é dada por:

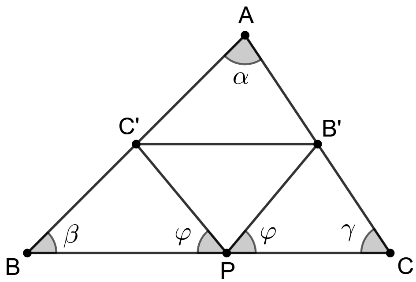
$$A_n = \frac{nR^2 \operatorname{sen}\left(\frac{360^\circ}{n}\right)}{2}.$$

Observação: Se necessário, use a identidade:

$$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x).$$

13. ♦ (Mayhem 373 - 2009) As medidas dos lados de um triângulo são três inteiros positivos consecutivos e o maior ângulo do triângulo é o dobro do menor. Determine as medidas dos lados do triângulo.

14. ♦ Do ponto médio dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC traçam-se duas retas que se cortam num ponto P do terceiro lado $\overline{BC}$ e que formam com este lado ângulos iguais cujo valor é φ.

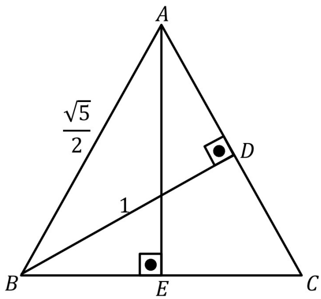


Prove que,

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{2\operatorname{sen}\beta\cdot\operatorname{sen}\gamma}.$$

15. ♦ No triângulo ABC temos $B\hat{A}C = 45^\circ$ e $A\hat{C}B = 30^\circ$. Seja M o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Mostre que $A\hat{M}B = 45^\circ$ e que $BC \cdot AC = 2AM \cdot AB$.

16. ♦ (OPM 2019) Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles com $AB = AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ e a altura BD relativa a AC é igual a 1.



   (a) Calcule AD.

   (b) Calcule as tangentes de $A\hat{B}D, C\hat{B}D$ e $D\hat{C}B$.

   (c) Quando sabemos a tangente x de um ângulo α, podemos descrevê-lo usando o *arco tangente*: se α é tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg} \alpha = x$, escrevemos $\alpha = \operatorname{arctg} x$. Sendo $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ a *razão áurea*, mostre que

$$\operatorname{arctg} \varphi - \operatorname{arctg} \frac{1}{\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

   Observação: Você pode querer usar o fato de que $\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

17. ♦ (RPM 86) Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas das distâncias do vértice do ângulo reto aos pontos de trissecção da hipotenusa é igual a 5/9 do quadrado da medida da hipotenusa.

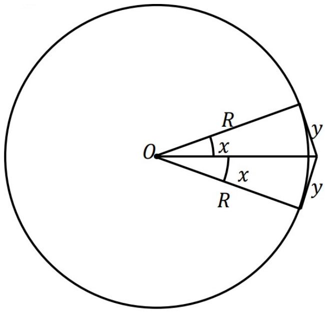
18. ♦ Temos, para um A, as seguintes relações

$$\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}^2(A) = 1 \quad \text{e}$$

$$a \cos^{12}(A) + b \cos^8(A) + c \cos^6(A) + d \cos^{10}(A) - 1 = 0.$$

   Nessas condições, quanto vale $a + \frac{c}{b} + d$.

19. ♦ (OPM 2017) Vamos supor nesse problema que a linha do Equador é uma circunferência C. Imagine que iremos envolver a linha do Equador com uma corda cuja medida é 2 metros maior do que a medida de C. Em um determinado ponto iremos puxar essa corda o máximo que pudermos, como mostra a figura a seguir. Qual será a altura h que atingiremos? Essa é a pergunta que desejamos responder nessa questão.



(a) Determine a medida de y, indicado na figura, em função de R e x em que R está em metros e x em radianos.

(b) Mostre que $\operatorname{tg} x - x = \dfrac{1}{R}$.

(c) Verifique que $h = \dfrac{R(1-\cos x)}{\cos x}$.

(d) É claro que x será bastante pequeno. Assim, podemos adotar as aproximações $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ e $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$. Adotando $R = 6,4 \cdot 10^6$ m, determine h em metros.

Observação: A altura h se trata da distância entre as "pontas" da corda e a circunferência.

20. ♦ (CMO 1993 - Adaptada) Em um triângulo ABC as medianas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares. Denotando $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, mostre que $\cot\hat{B} + \cot\hat{C} \geq \frac{2}{3}$.

21. ★ (Clubes OBMEP) Determine o menor inteiro positivo n tal que

$$\frac{1}{\operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 46^\circ} + \frac{1}{\operatorname{sen} 47^\circ \operatorname{sen} 48^\circ} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{sen} 133^\circ \operatorname{sen} 134^\circ} = \frac{1}{\operatorname{sen} n^\circ}.$$

Observação: Você pode querer usar o fato de que $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$.

22. ★ (ONEM 2004 – Adaptado) Sejam x, y e z ângulos na circunferência, com $0 < x, y, z < \pi$ tais que

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0.$$
$$\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$
$$\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0.$$

Determine **todos** os valores numéricos possíveis da soma

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z.$$

Observação: Você pode querer usar o fato de que, dados a, b, c números reais se $a + b + c = 0$ então $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

23. ★ Determine o valor da soma

$$\operatorname{sen}^2(1^\circ) + \operatorname{sen}^2(2^\circ) + \operatorname{sen}^2(3^\circ) + \cdots + \operatorname{sen}^2(89^\circ)$$

Aula 7

Área

Nesta aula estudaremos o conceito de área de regiões planas. Veremos uma forma concreta de se pensar áreas, bem como as expressões clássicas para o cálculo da área de algumas figuras.

7.1 Definição

Existem várias abordagens ao se definir o conceito de área, aqui nos atentaremos para uma definição que comporte algumas propriedades essenciais, que esperemos serem satisfeitas.

Dizemos que uma porção de um plano α é uma *região limitada* se o seu contorno é um segmento contínuo e fechado. Por exemplo, as figuras 7.1 e 7.2 abaixo representam regiões limitadas, já um semiplano, representado pela figura 7.3 é claramente não limitado.

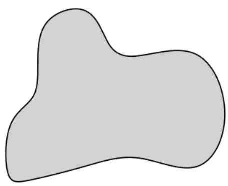


Figura 7.1: Região curvilínea.

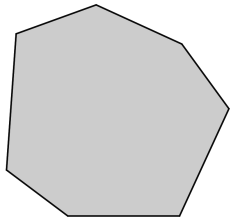


Figura 7.2: Região poligonal.

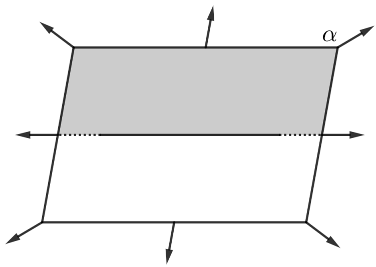


Figura 7.3: Semiplano delimitado por uma reta.

Desta forma ao se falar de área sempre estaremos nos referindo a regiões limitadas.

Definição 7.1.1. A *área* de uma região plana limitada R é um *número real positivo* $A(R)^*$ satisfazendo as seguintes condições:

1. Duas regiões congruentes possuem a mesma área. Em símbolos: $R \equiv R' \Rightarrow A(R) = A(R')$.

*também denotado por $[R]$

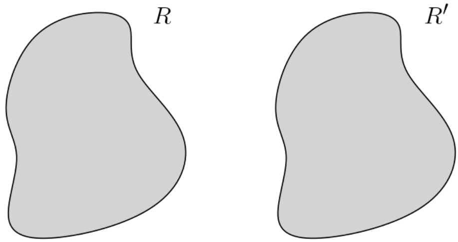


Figura 7.4: Regiões congruentes R e R'.

2. A área de uma região é igual a soma das áreas de todas suas regiões parciais. Na figura abaixo, $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) + A(R_5)$.

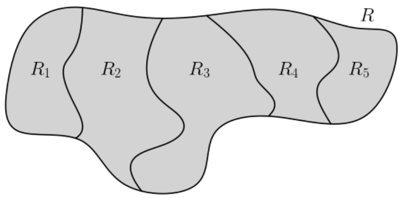


Figura 7.5: Região R e suas regiões parciais R_i.

3. A área de uma região quadrada equivale ao quadrado da medida de seu lado. Na figura abaixo, $A(ABCD) = a^2$.

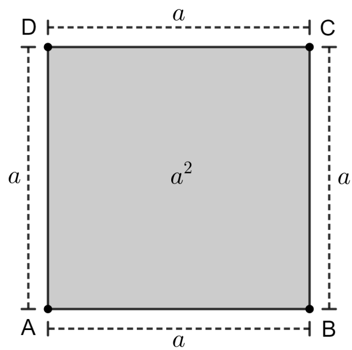


Figura 7.6: Região quadrada $ABCD$.

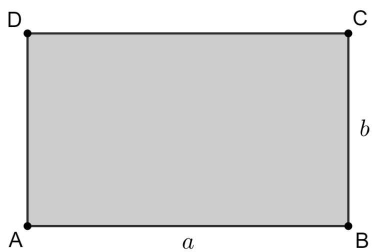
Veja que, como uma região plana é determinada por comprimento e largura, exigimos que a área desta região esteja relacionada com estas dimensões. Mais especificamente, ao falar de área sempre usamos uma *unidade de medida.* Pelo item 3 na definição acima é razoável considerar a unidade de área como u^2 onde u simboliza a unidade de comprimento da região, por exemplo cm^2 (centímetros quadrados) ou m^2 (metros quadrados), logo um quadrado de lado 1 u tem como área o número 1 u^2.

Nota 1. A condição 2 nos garante que dadas duas regiões R e R' tais que $R \subset R'$ (Região R "dentro" de R') temos que $A(R) < A(R')$.

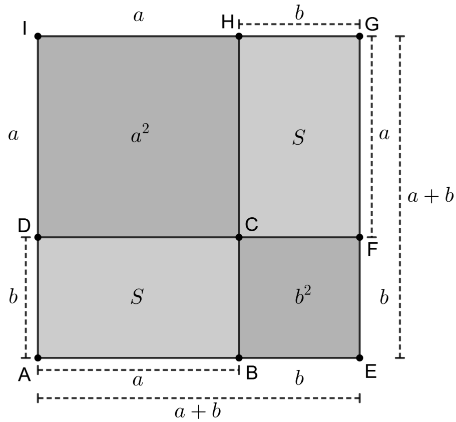
Agora que temos uma definição mais precisa do conceito de área podemos descobrir como calcular de fato este número para algumas regiões conhecidas.

7.2 Retângulo

O retângulo servirá como base para outros quadriláteros e figuras poligonais. Mostraremos que a sua área é dado pelo produto de dois lados não paralelos, isto é, na figura denotamos $AB = a$ e $BC = b$, logo $A(ABCD) = a \cdot b$.



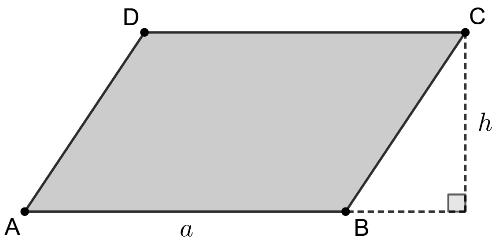
Prova: Considere a figura abaixo, onde foram prolongados os lados do retângulo original $ABCD$, formando o quadrado $AEGI$.



Denote a área de $ABCD$ por S. Veja que os retângulos $ABCD$ e $CFGH$ são congruentes, logo pelo item 1 da definição 7.1.1 possuem a mesma área. Agora, por definição, $A(AEGI) = (a+b)^2 = a^2 + 2(a \cdot b) + b^2$. Por outro lado, $A(AEGI) = a^2 + 2S + b^2$, desta forma $2S = 2(a \cdot b)$ e concluímos que $A(ABCD) = S = a \cdot b$.

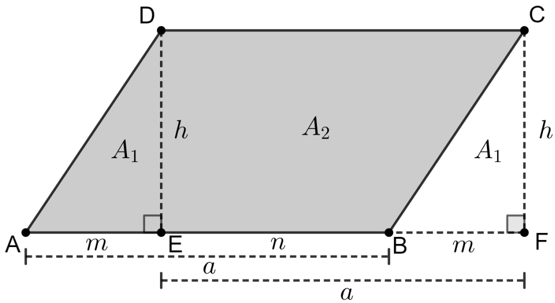
7.3 Paralelogramo

Consideremos o paralelogramo $ABCD$.



Para calcular a área do paralelogramo escolhemos um lado e a altura relativa a esse lado, então a área será dada pelo produto dessas medidas. Na figura acima, denotamos $AB = a$ e h a altura relativa, desse modo $A(ABCD) = a \cdot h$.

Prova: Começamos considerando os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{CF}$ perpendiculares ao lado $\overline{AB}$ (ambos medem h). Além disso como $AD = BC$, $DE = CF$ e $A\hat{D}E = B\hat{C}F$, por serem ângulos correspondentes, segue pelo critério LAL que os triângulos ADE e BCF são congruentes.



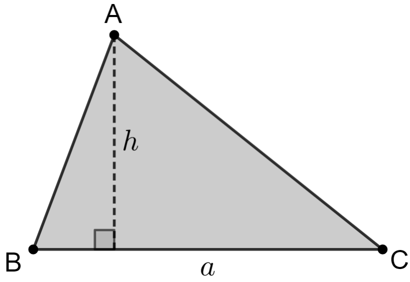
Deste modo, $AE = BF = m$ e então $EF = m+n = a$. Também temos que as áreas dos triângulos ADE e BCF são iguais, no desenho denotadas por A_1. Denotamos a área do quadrilátero $BCDE$ por A_2.

Agora observe que a área do paralelogramo vale A_1+A_2, ou seja, é a mesma área do retângulo $CDEF$ na imagem. Como já vimos anteriormente, a área do retângulo é dada por $a \cdot h$, logo

$$A(ABCD) = a \cdot h.$$

7.4 Triângulo

Vamos deixar para você provar a clássica expressão para o cálculo da área de um triângulo: "base vezes altura sobre dois". Mais especificamente, dado um triângulo ABC como na figura abaixo, com $BC = a$ e a altura relativa a este lado h, temos que $A(ABC) = \frac{a \cdot h}{2}$.

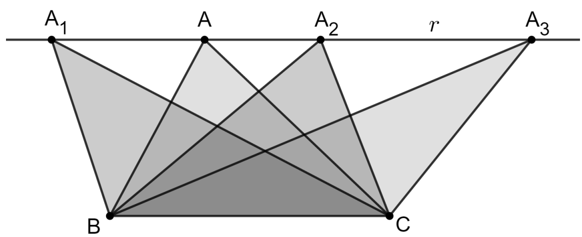


Para verificar esta expressão tente "duplicar" o triângulo ABC e usar os resultados anteriores.

Exercício de Fixação 7.1. Um caso particular de área é quando o triângulo é equilátero. Prove que, dado um triângulo equilátero ABC de lado ℓ, temos

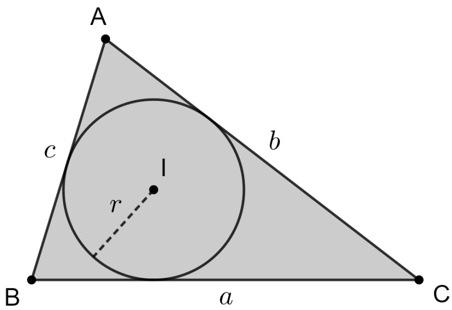
$$A(ABC) = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}.$$

Exercício de Aprofundamento 7.1. Na figura, a reta r é paralela a $\overline{BC}$. Se a área do triângulo ABC é X, qual a área dos demais triângulos A_1BC, A_2BC e A_3BC?



7.4.1 Incírculo

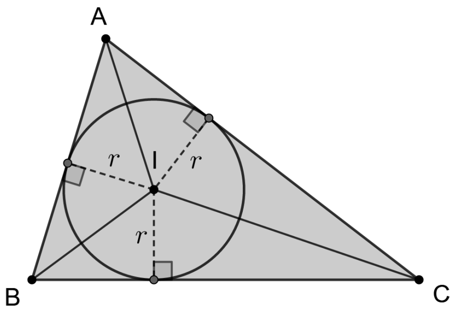
Dado um triângulo ABC de lados a, b e c consideremos o seu incírculo, de centro I e raio r, como na figura.



Podemos calcular a área do triângulo ABC pela expressão

$$A(ABC) = r \cdot p.$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.
Prova: Consideremos três triângulos dentro de ABC: $\triangle ABI, \triangle BCI$ e $\triangle CAI$.

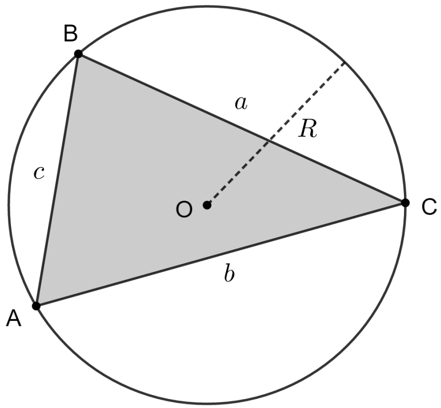


Note que as alturas relativas aos lados do triângulo original são todas iguais a r, logo

$$\begin{aligned}
A(ABC) &= A(ABI) + A(BCI) + A(CAI) \\
&= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} \\
&= r \cdot \frac{a+b+c}{2} \\
&= r \cdot p.
\end{aligned}$$

7.4.2 Circuncírculo

Sempre podemos traçar um círculo (O, R) que passa pelos vértices de um triângulo ABC. Este círculo é chamado de circuncírculo e o ponto O é o ponto de encontro das mediatrizes.



Nessas condições é possível calcular a área de ABC pela expressão:

$$A(ABC) = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

Tente demonstrar esta relação!

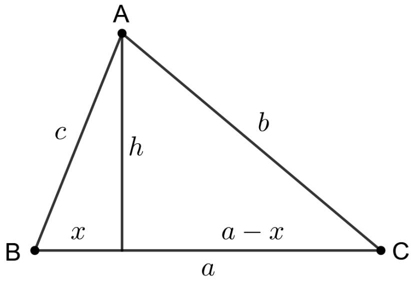
7.4.3 Fórmula de Heron

Outra forma de calcular a área de um triângulo ABC é pela fórmula de Heron,

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

onde a, b e c são os lados do $\triangle ABC$ e $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.

Exercício de Aprofundamento 7.2. Neste exercício aprenderemos duas demonstrações para a fórmula de Heron, a primeira usando somente o teorema de Pitágoras e a segunda trigonometria.



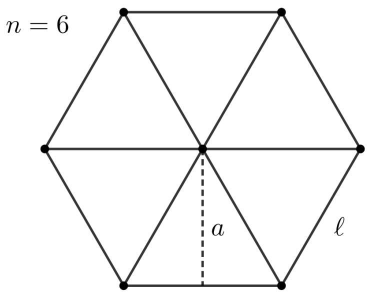
1. a. Usando Pitágoras encontre uma expressão para h em função de a, b e c.

   b. Sabendo que a área do triângulo ABC é dada por $\frac{a \cdot h}{2}$, substitua nessa expressão o h dado no item anterior e a manipule para chegar em $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro.

Exercício de Aprofundamento 7.3. Prove que a área de um *polígono regular* de n lados com medida ℓ é

$$A = p \cdot a\ ,$$

onde $p = \frac{n \cdot \ell}{2}$ é o semiperímetro e a é a medida do **apótema** do polígono.
Observação: Apótema é um segmento que liga o centro do polígono ao ponto médio de um dos lados. Na imagem abaixo temos como exemplo um hexágono regular.



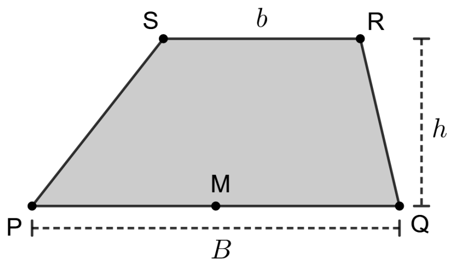
7.5 Trapézio

Agora vamos provar que a área A de um trapézio é dada pela expressão:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2},$$

onde B é a base maior, b a base menor e h a altura.

Para verificar este fato considere o trapézio $PQRS$ abaixo, com $PQ = B$, $RS = b$, h a altura e M o ponto médio de PQ.



1. Calcule as áreas dos triângulos PMS, MQR e RSM.

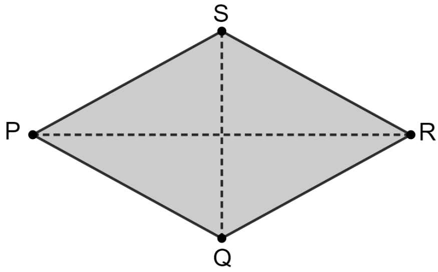
2. Some as áreas do item anterior e conclua a expressão desejada.

7.6 Losango

Para o losango usaremos a mesma abordagem, concluindo que a área deste quadrilátero é dada por:

$$A = \frac{D\cdot d}{2},$$

onde D e d são as medidas das diagonais, maior e menor, respectivamente.



1. Calcule as áreas dos triângulos PQR e RSP.

2. Some as áreas do item anterior e conclua a expressão desejada.

7.7 Círculo

Mesmo não se tratando de um elemento poligonal, o círculo pode ter sua área descrita - em certo sentido - em termos de polígonos.

Considere um círculo (O, r), onde inscrevemos polígonos regulares como nas figuras abaixo.

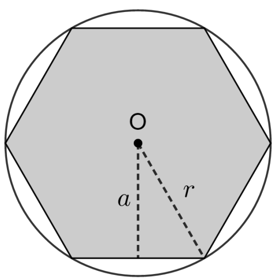


Figura 7.7: Hexágono inscrito em (O, r).

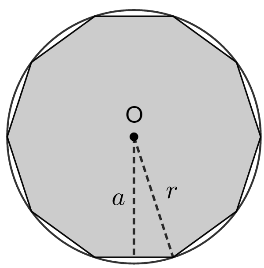


Figura 7.8: Decágono inscrito em (O, r).

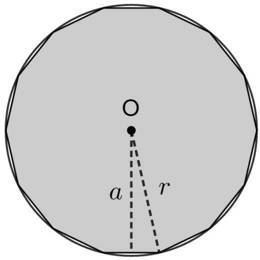


Figura 7.9: Tetradecágono inscrito em (O, r).

Note que, conforme aumentam o número de lados dos polígonos inscritos se cobre cada vez mais o círculo, ou seja, nos aproximamos da sua área total. Também percebe-se que a medida do apótema dos polígonos se aproxima do raio r, bem como a perímetro do polígono se aproxima ao da circunferência.

Lembrando que, pelo exercício 7.3, a área de um polígono de n lados é dada por $A = p \cdot a$ (sendo p o semiperímetro e a o apótema) consideramos um *caso limite*, onde o apótema é muito próximo do raio e o perímetro do polígono é muito próximo ao da circunferência, então escrevemos:

$$a = r \quad \text{e} \quad p = \pi r.$$

E portanto deduzimos que a área do círculo de raio r é dada por:

$$A = a \cdot p = \pi r^2$$

7.7.1 Setor Circular

Da mesma forma que o comprimento de um arco é proporcional ao comprimento da circunferência, temos que a área de um setor circular é proporcional a área do círculo, logo obtemos a seguinte expressão para a área do setor AOB:

$$A = \frac{C_{\widehat{AB}} \cdot r}{2},$$

ou ainda,

$$A = \frac{\alpha \pi r^2}{360}.$$

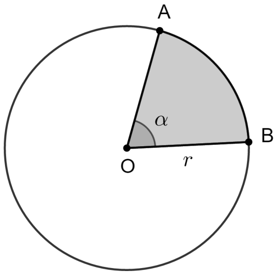
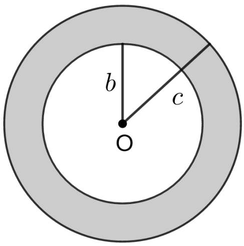


Figura 7.10: Setor circular AOB.

Exercício de Fixação 7.2. Um anel é a região compreendida por dois círculos concêntricos (de mesmo centro). Os círculos concêntricos da figura abaixo têm raios com comprimentos b e c, com $c > b$. Então, qual é a área desse anel? Você consegue expressar essa área em função de um só comprimento?

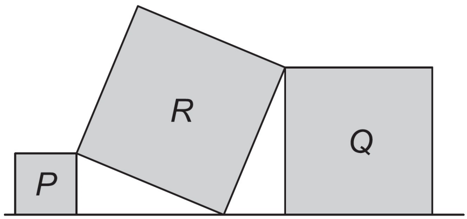


Problemas Propostos

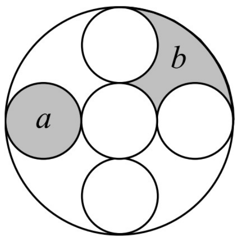
Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

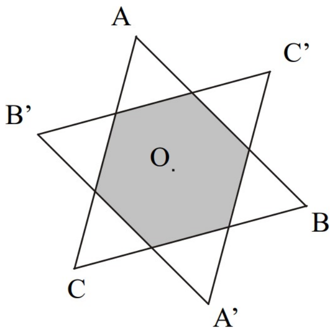
1. ● (OBMEP 2016) Na figura, as áreas dos quadrados P e R são iguais a 24 cm^2 e 168 cm^2, respectivamente. Qual é a área do quadrado Q?



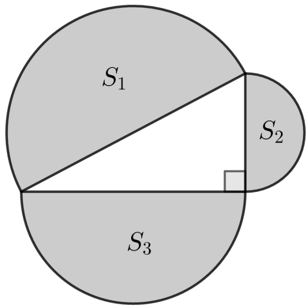
2. (OBM 2005) Na figura, todas as circunferências menores têm o mesmo raio r e os centros das circunferências que tocam a circunferência maior são vértices de um quadrado. Sejam a e b as áreas cinzas indicadas na figura. Encontre a razão $\frac{a}{b}$.



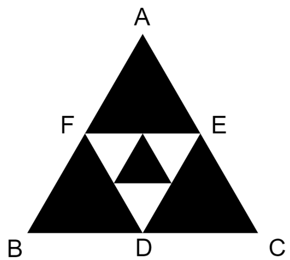
3. (OBM 2000 - Adaptada) Na figura temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são equiláteros e a região destacada é um hexágono regular. Qual é a razão entre a área da região destacada e a área do triângulo ABC?



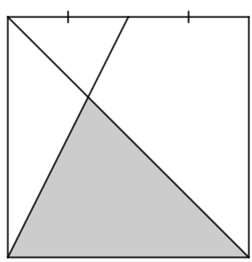
4. ● Sobre os lados de um triângulo retângulo, tomados como diâmetros, são traçados semicírculos S_1, S_2 e S_3. Qual é a relação entre $[S_1]$, $[S_2]$ e $[S_3]$?



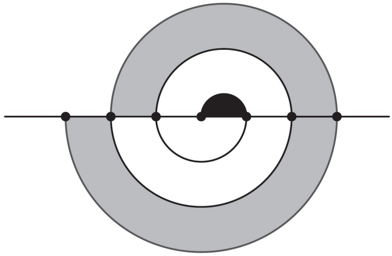
5. ● Os pontos D E e F são pontos médios dos lados do triângulo equilátero ABC. A região sombreada central é formada conectando os pontos médios dos lados do triângulo DEF. Qual fração da área do triângulo ABC está sombreada?



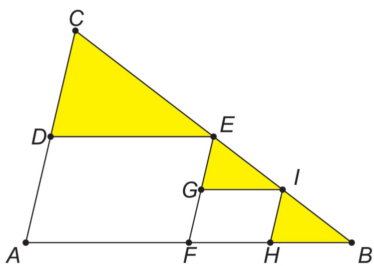
6. ▲ Qual é a fração do quadrado abaixo está pintada?



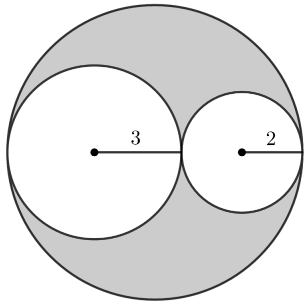
7. ▲ (OBMEP 2010) Na figura, os pontos destacados sobre a reta estão igualmente espaçados. Os arcos que ligam esses pontos são semicircunferências e a região preta tem área igual a 1. Qual é a área da região cinza?



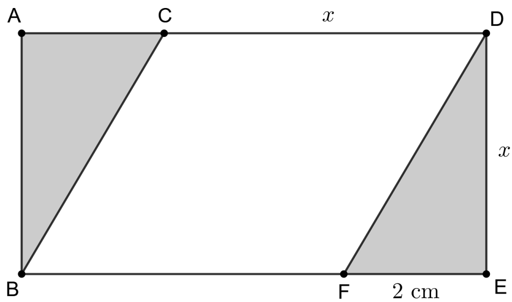
8. ▲ (OBMEP 2017) Na figura abaixo, D, E e F são pontos médios dos lados do triângulo ABC, e G, H e I são pontos médios dos lados do triângulo FBE. A área do triângulo ABC é 48 cm^2. Qual é a área da região destacada em amarelo?



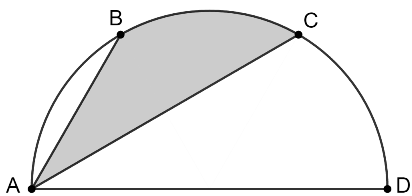
9. ▲ Dois círculos de raios 2 e 3 são tangentes externos e estão circunscritos a um terceiro círculo, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que os centros desses três círculos são colineares, determine a razão entre a soma das áreas dos círculos menores e a região em cinza.



10. ▲ (MME - adaptada) Na figura abaixo, a soma das áreas dos triângulos ABC e FDE é igual a área do paralelogramo $BCDF$. Sabendo que $CD = DE = x$ e $FE = 2$ cm, encontre o valor de x.

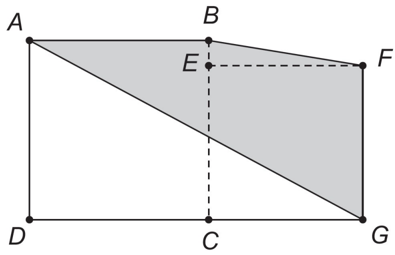


11. ▲ A figura abaixo exibe um semicírculo de raio 10 cm. Os pontos B e C dividem o arco $\widehat{AD}$ em três partes iguais. Determine a área do “triângulo curvilíneo” ABC.

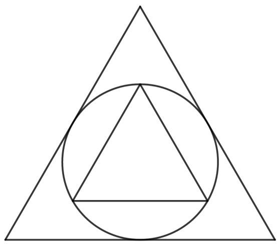


12. ▲ (OBMEP 2014) Na figura, $ABCD$ e $EFGC$ são quadrados

de áreas R e S, respectivamente. Qual é a área da região cinza?

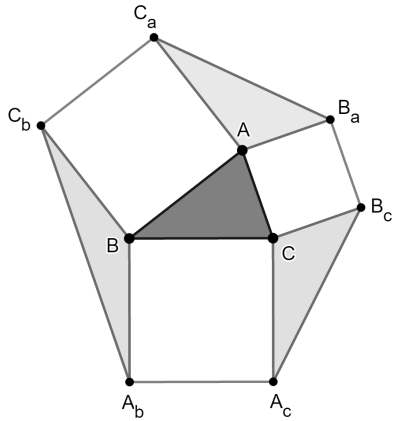


13. ▲ O diagrama abaixo mostra dois triângulos equiláteros e um círculo, o qual está inscrito no maior triângulo e circunscrito no menor triângulo.

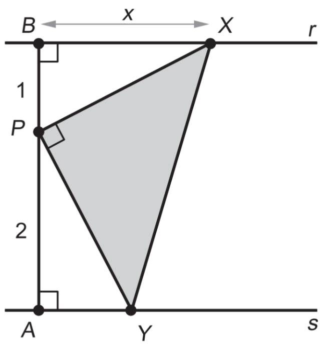


Calcule a razão entre as áreas dos dois triângulos.

14. ♦ Dado um triângulo ABC considere os quadrados formados por seus lados. Unindo os vértices como na figura abaixo obtemos três novos triângulos: $\triangle AB_aC_a$, $\triangle BC_bA_b$ e $\triangle CA_cB_c$, chamados *flancos* do $\triangle ABC$. Mostre que o $\triangle ABC$ e seus flancos possuem a mesma área.



15. ♦ (OBMEP 2012 - Adaptada) Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. O segmento AB é perpendicular a essas retas e o ponto P, nesse segmento, é tal que $AP = 2$ e $BP = 1$. O ponto X pertence à reta r e a medida do segmento BX é indicada por x. O ponto Y pertence à reta s e o triângulo XPY é retângulo em P.

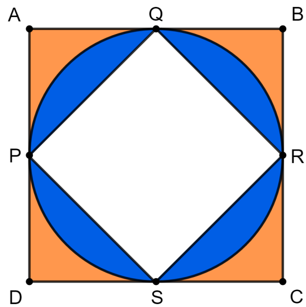


a. Calcule a área do triângulo XPY em função de x.

b. Para quais valores de x a área do triângulo XPY é igual a $\frac{5}{2}$?

c. Determine o valor de x para o qual a área do triângulo XPY é mínima e calcule o valor dessa área.

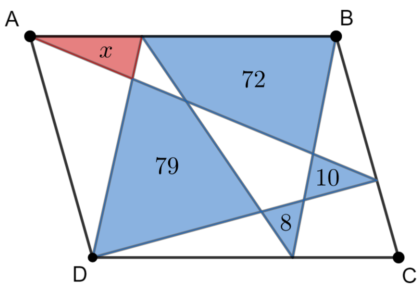
16. ♦ Na figura temos um tapete formado por três camadas sobrepostas de tecido, onde $ABCD$ e $PQRS$ são quadrados em laranja e branco, respectivamente, e na camada intermediária, em azul, há um círculo inscrito em $ABCD$ e circunscrito a $PQRS$.



a. Qual área visível é maior, azul ou laranja?

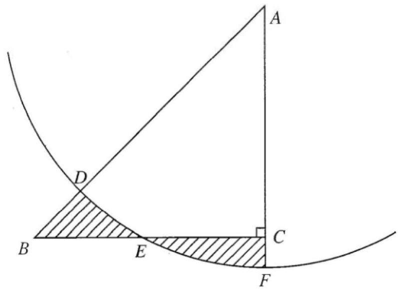
b. Recortamos da primeira camada (em branco) um círculo de raio y, de forma que a área azul resultante seja duas vezes maior que a área laranja. Qual é a razão entre o raio do círculo azul e y?

17. ♦ $ABCD$ é um paralelogramo. As áreas das regiões em azul são 72, 10, 8 e 79. Calcule a área x em vermelho.

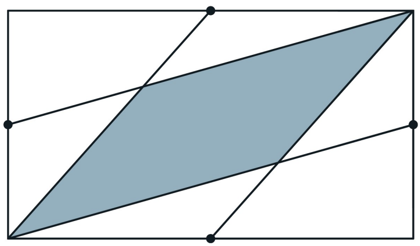


18. ♦ (OPRM 2017) Abaixo temos um triângulo retângulo ABC com $AC = BC = 1$ e DEF é um arco de círculo com centro

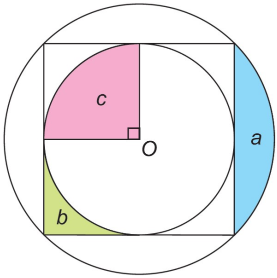
em A. Suponha que as áreas sombreadas BDE e CEF tem mesma medida e $AD = \frac{x}{\sqrt{\pi}}$. Qual é o valor de x?



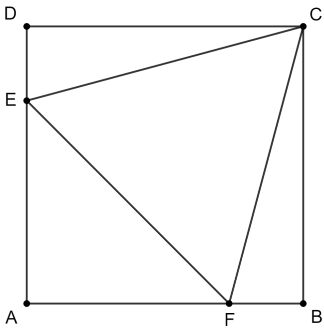
19. ♦ (OBMEP 2011) A figura mostra um retângulo de área 42 cm^2 com os pontos médios dos lados em destaque. Qual é a área, em cm^2, da região cinza?



20. ♦ (OBMEP 2018) A figura mostra três regiões, a, b e c, determinadas por um quadrado de centro O, e suas circunferências inscrita e circunscrita. Encontre uma expressão para c em função de a e b.

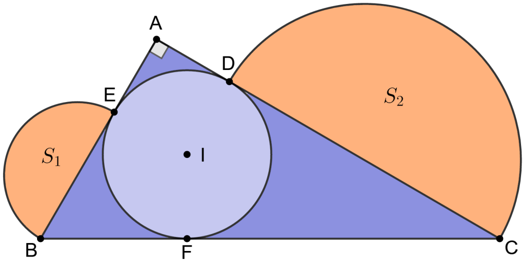


21. ♦ (OPRM 2016) Na figura abaixo $ABCD$ é um quadrado e CEF é um triângulo equilátero. Considerando que a área do triângulo equilátero CEF é igual a $\sqrt{3}$ metros quadrados, determine a área do quadrado.

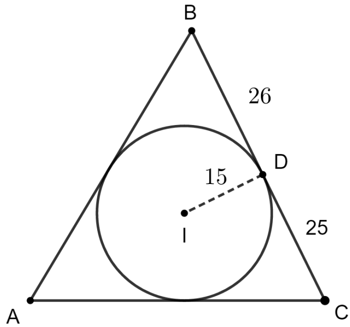


22. ♦ Seja ABC um triângulo retângulo, com incentro I. Suponha que o incírculo tangencia os lados $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ nos pontos D, E e F, respectivamente. Considere semicírculos sobre os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{CD}$, com áreas S_1 e S_2, respectivamente. Se a área do triângulo ABC é S, mostre que

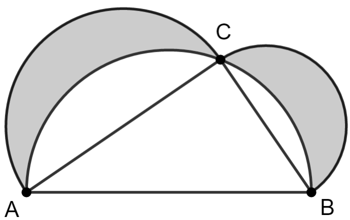
$$S = \frac{8}{\pi}\sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$



23. ♦ Na figura o círculo $(I, 15)$ é inscrito ao triângulo ABC, tangenciando o lado $\overline{BC}$ em D. Se $BD = 26$ e $CD = 25$, encontre a área do triângulo ABC.



24. ♦ (Luas de Hipócrates) Na figura abaixo temos um triângulo retângulo ABC e três semicírculos, cujos diâmetros são lados de ABC. Mostre que a soma das áreas das luas (regiões pintadas) equivale a área do triângulo ABC.

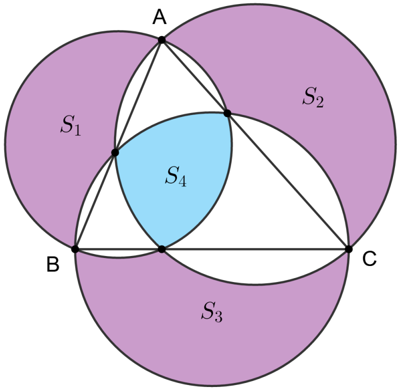


25. ★ (CMO 1969) Seja ABC um triângulo equilátero e P um ponto arbitrário no seu interior. São traçadas perpendiculares $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ e $\overline{PF}$ aos três lados do triângulo. Mostre que, independente da posição do ponto P,

$$\frac{PD + PE + PF}{AB + BC + CA} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

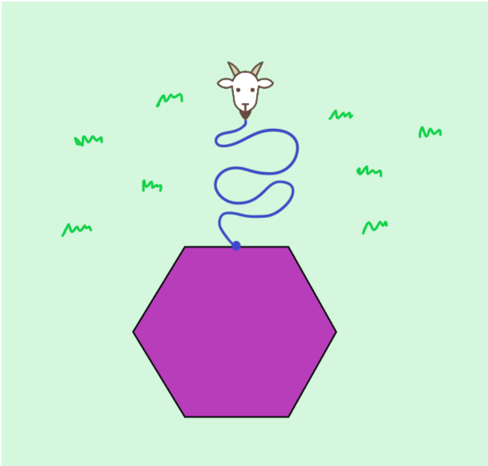
26. ★ Seja ABC um triângulo de área S e considere círculos sobre seus lados, como na figura abaixo. Também são delimitadas as regiões curvilíneas de interseção externa (em rosa), com áreas S_1, S_2 e S_3 e de interseção interna (em azul), com área S_4. Mostre que, nessas condições

$$2S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4.$$

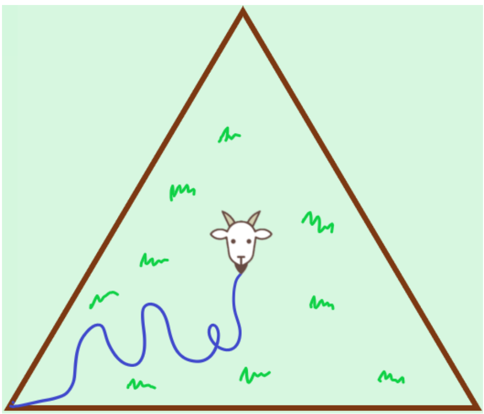


27. ★ A cabra Joaquina pasta alegremente no terreno da fazenda de Seu Manoel. Como Joaquina é muito comilona, é necessário prendê-la com uma coleira, limitando o espaço da pastagem.

   (a) Uma ponta da coleira de Joaquina é presa bem no meio da parede de um silo hexagonal, cujo lado mede 1 metro. Se a coleira possui 1,5 m, qual é a área disponível para a pastagem? Caso o ponto de ancoragem fosse a quina de uma parede, a área de pastagem seria maior? Por que?



(b) Em um segundo momento Joaquina é colocada em um cercado em formato de triângulo equilátero. Qual deve ser o tamanho da coleira para que Joaquina possa pastar metade da área do cercado?



Aula 8

Sólidos

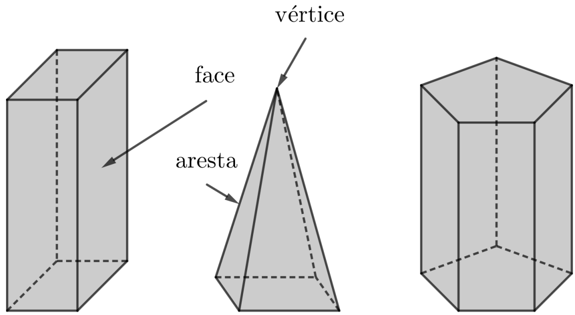
Nesta aula estudaremos algumas características dos principais sólidos geométricos, em especial área e volume. Note que, diferente das últimas aulas, discutiremos objetos em três dimensões, deste modo a abordagem será mais simples da usual.

8.1 O que são Poliedros?

Vamos denotar por *região poligonal* a região interna (e o contorno) de um polígono. Um *poliedro* é a reunião finita de regiões poligonais, as quais denotaremos por *faces*.

Chamaremos a interseção de duas faces de *aresta* do poliedro e a interseção de duas (ou mais) arestas um *vértice* do poliedro.

A imagem a seguir ilustra alguns poliedros:



8.1.1 Poliedros convexos e não convexos

Um poliedro é dito convexo se qualquer reta não paralela a nenhuma das faces intersecta suas faces em, no máximo, dois pontos.

Veja alguns exemplos de poliedros convexos e não convexos:

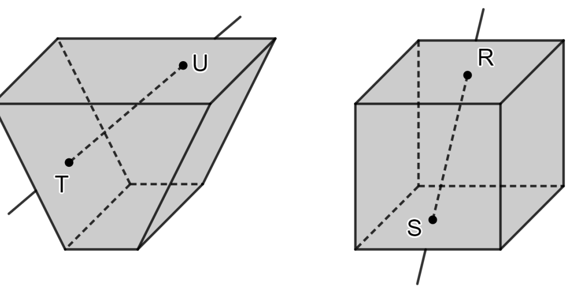


Figura 8.1: Poliedros convexos.

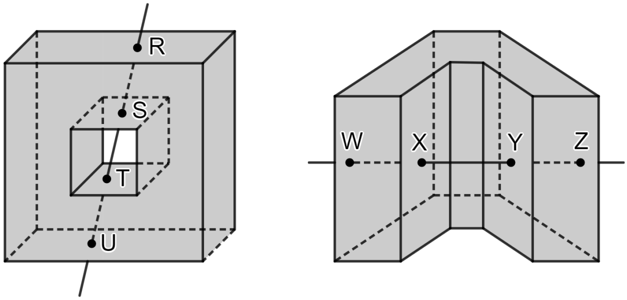


Figura 8.2: Poliedros não convexos.

8.1.2 Poliedros regulares

Dizemos que um poliedro convexo é regular quando suas faces são regiões poligonais regulares e congruentes. Além disso, todos os vértices são formados pelo mesmo número de arestas.

Veja abaixo exemplos de poliedros regulares.

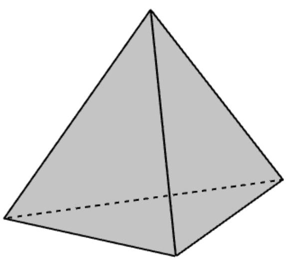


Figura 8.3: Tetraedro.

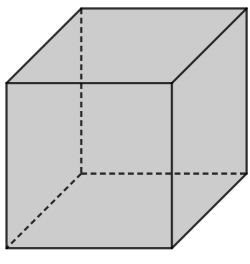


Figura 8.4: Cubo.

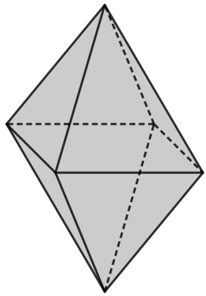


Figura 8.5: Octaedro.

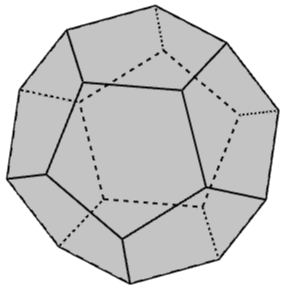


Figura 8.6: Dodecaedro.

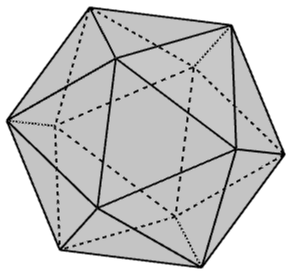


Figura 8.7: Icosaedro.

Nota 1. A palavra *poliedro* é advinda do grego, e tem como origem a junção dos termos *poli* (várias) e *edros* (faces). Desta forma é comum denotarmos os poliedros pelo número de faces, por exemplo o *tetraedro* possui quatro faces e *hexaedro* (cubo) possui seis.

Exercício de Fixação 8.1. Quantas faces possuem os poliedros regulares?

Pode-se mostrar que existem somente cinco poliedros regulares convexos, como mostrado nas figuras acima: tetraedro, hexaedro (cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Agora alguns poliedros que não são regulares:

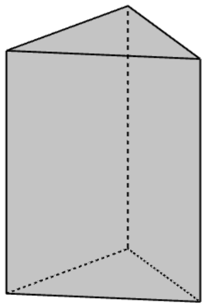


Figura 8.8: Poliedro não regular de cinco faces.

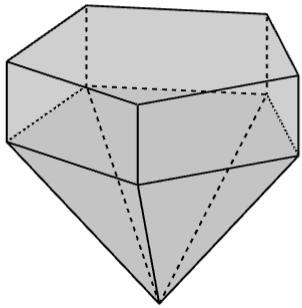


Figura 8.9: Poliedro não regular de onze faces.

8.2 Prismas

Denotaremos por prisma um poliedro formado por duas regiões poligonais congruentes e paralelas (estas delimitam a parte superior e inferior) e lateralmente por paralelogramos. Chamaremos de *base* do prisma as regiões inferior e superior. Veja a seguir um exemplo de prisma e seus elementos.

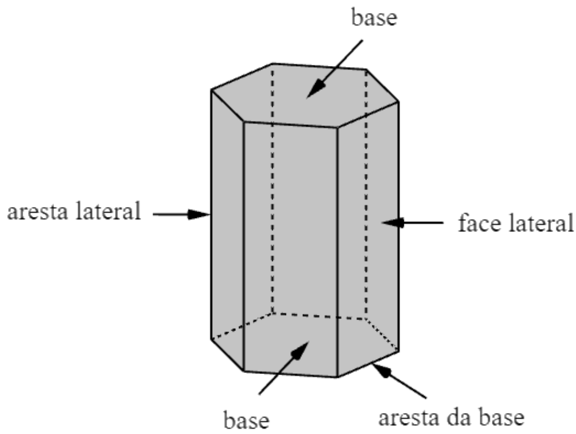


Figura 8.10: Prisma de base hexagonal.

Um prisma é dito *reto* se as arestas laterais são perpendiculares às bases, caso contrário o classificamos como *oblíquo*.

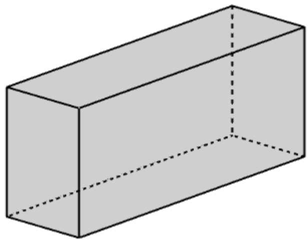


Figura 8.11: Prisma reto de base retangular.

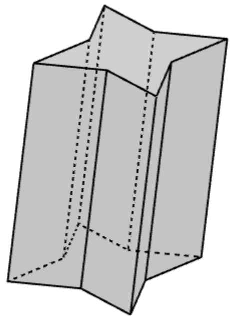


Figura 8.12: Prisma oblíquo.

Nota 2. Prismas de base retangular, como na figura 8.11, são comumente chamados de paralelepípedos.

Exercício de Aprofundamento 8.1. Encontre a medida d da diagonal de um paralelepípedo em função da medida das arestas a, b e c.

8.3 Pirâmides

As pirâmides são sólidos bem presentes na história da humanidade. Há registros de construções antigas com estas formas em várias partes do mundo, desde o Egito antigo até o continente americano!

Agora vamos estudar uma definição matemática para estes sólidos. Em um plano qualquer consideramos uma *região poligonal* $\mathcal{P}$ e fora deste plano um ponto V (chamado vértice). O sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no ponto V e a outra num ponto do polígono $\mathcal{P}$ denomina-se *pirâmide*.

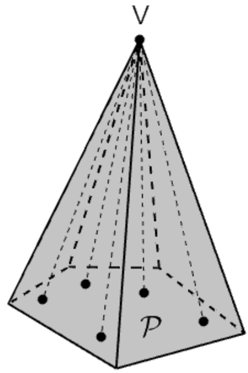


Figura 8.13: Pirâmide de base $\mathcal{P}$.

Destacamos os seus principais elementos na figura abaixo.

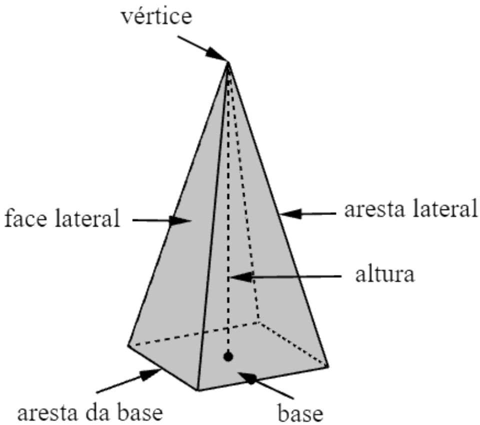


Figura 8.14: Pirâmide e seus elementos.

Um caso mais comum de pirâmides é quando o polígono da base é regular, neste caso a projeção ortogonal * do vértice sobre a base coincide com o centro da base e então nos referimos ao sólido por pirâmide regular. Definimos dois segmentos de medida constante

*Se trata do segmento de reta perpendicular a um plano, cujas extremidades são um ponto do espaço (neste caso o vértice) e um ponto do plano em questão.

para cada face, o apótema de pirâmide (segmento que une o vértice ao ponto médio da aresta da base) e o apótema da base (segmento que une o centro da base ao ponto médio da aresta da base):

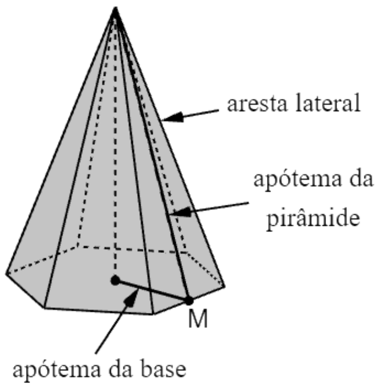


Figura 8.15: Pirâmide de base hexagonal e apótemas.

8.4 Corpos redondos

Até agora consideramos sólidos formados por regiões poligonais, entretanto podemos formar outros objetos a partir do círculo. A esses sólidos dá-se o nome de corpos redondos. Veja alguns dos principais sólidos redondos.

8.4.1 Cilindro

A construção de um cilindro é muito parecida com a dos prismas, a diferença é que as bases são círculos. Na figura abaixo destacamos os elementos principais deste sólido.

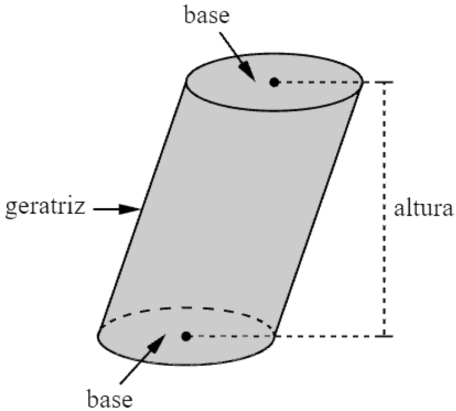


Figura 8.16: Cilindro e seus elementos.

Se um cilindro possuir geratrizes perpendiculares à base, o denotamos por *cilindro reto*.

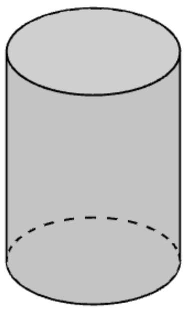


Figura 8.17: Cilindro reto.

Perceba que neste caso a geratriz coincide com a altura.

8.4.2 Cone

De forma análoga ao caso das pirâmides, o cone é formado por um círculo (base) e um ponto fora do plano da base (vértice). Com esses elementos definimos o cone como a reunião de todos os segmentos de reta que têm uma extremidade no vértice e a outra num ponto do círculo.

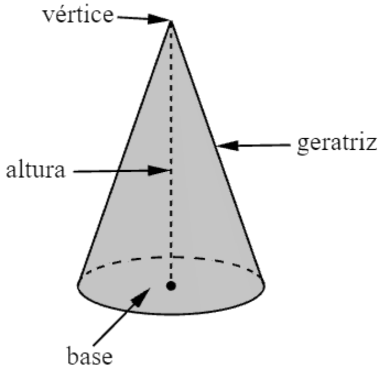


Figura 8.18: Cone e seus elementos.

8.4.3 Esfera

Dados um ponto O e um número real positivo R, damos o nome de *esfera* ao conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor ou igual a R.

O entorno da esfera, isto é, o conjunto de pontos cuja distância a O é igual a R, é chamado *superfície esférica* ou *casca esférica*.

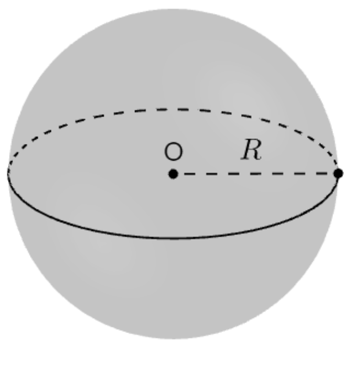


Figura 8.19: Esfera (O, R).

A interseção de um plano que corta a esfera é sempre um círculo (desenhe para se convencer!). Quando o plano contém o centro da esfera chamamos o círculo da interseção de *círculo máximo*, e então podemos considerar apenas uma metade da esfera, a *semiesfera*.

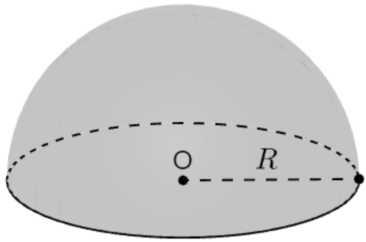


Figura 8.20: Semiesfera (O, R).

Exercício de Aprofundamento 8.2. Um cubo de aresta m está inscrito em uma semiesfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semiesfera e os demais vértices pertencem à superfície da semiesfera. Expresse m em função de R.

8.5 Área da superfície e volume

8.5.1 Área da superfície

A todos os sólidos podemos associar um valor numérico (a área) para o quanto de espaço a sua *camada exterior* ocupa. Perceba que, como ocorre com objetos planos, nem sempre é fácil mensurar áreas. Veremos que um artifício útil nesta tarefa são as planificações.

Uma *planificação* é uma representação bidimensional da superfície de um sólido. Podemos pensar que se o sólido fosse de papel, bastaria recortar em uma folha a sua planificação e então colando as respectivas "pontas" retornaríamos ao sólido original. Veja abaixo o exemplo de **uma** planificação do cubo (a planificação de um sólido não é necessariamente única!).

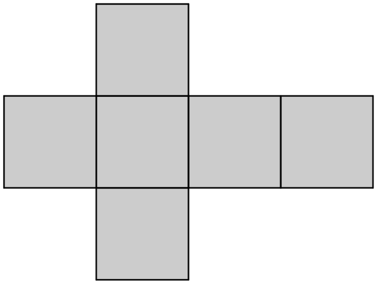


Figura 8.21: Planificação do cubo.

Será que todos os sólidos possuem planificações? Sabemos que uma planificação deve preservar as medidas, o que é um indício de que alguns sólidos não podem ser planificados sem deformação.

Para refletir: A esfera pode ser planificada? No link do vídeo a seguir o canal *Numberphile* faz uma discussão sobre projeções da esfera, confira: `https://www.youtube.com/watch?v=D3tdW9l1690`.

8.5.2 Volume: uma ideia intuitiva

Quando temos um sólido em três dimensões, uma pergunta que surge é: quanto de espaço que esse sólido ocupa? Iremos responder essa pergunta com o conceito de volume.

A ideia de volume é muito parecida com a de área; lembre-se que para falar de área era necessário ter uma unidade e a partir dessa unidade pode-se calcular um número que dirá o quão espaçoso é um determinado objeto. Como estamos trabalhando em três dimensões nossa unidade será um cubo. Ou seja, dizer quanto é o volume de um sólido será o mesmo que dizer quantos cubos cabem nesse sólido.

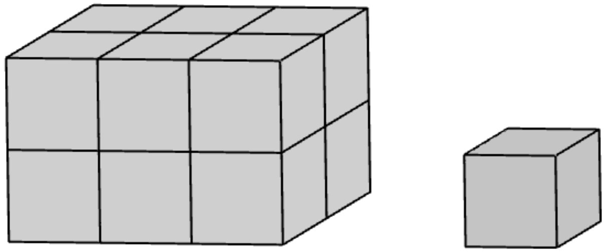


Figura 8.22: Figura formada a partir de um cubo referêncial.

O cubo que será utilizado tem aresta de medida uma unidade de comprimento e o denotaremos cubo unitário. Se um cubo possuir medida de aresta diferente de 1, digamos a, diremos que esse cubo possui volume

$$V(a, a, a) = a^3.$$

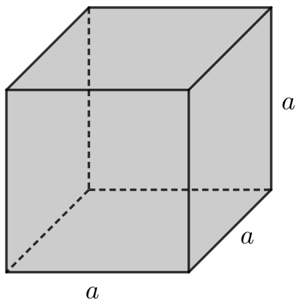


Figura 8.23: Cubo de aresta a.

O volume satisfaz as propriedades:

1. Sólidos congruentes possuem mesmo volume.

2. Se um dado sólido S é reunião de outros sólidos (os quais não possuem pontos interiores em comum) então o volume de S é igual a soma dos volumes desses sólidos.

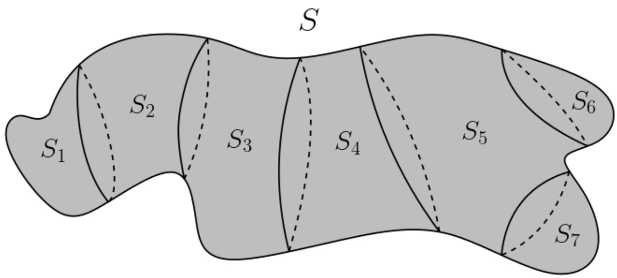


Figura 8.24: Sólido S como reunião dos sólidos S_i,

8.5.3 Área da superfície e volume dos principais sólidos

Prisma

Para qualquer prisma, poderemos fazer as seguintes considerações:

- A *superfície lateral* é o conjunto das faces laterais;
- A *área lateral*, denotada A_ℓ é a área da superfície lateral, ou seja, a soma das áreas das faces;
- A *área das bases*, denotada A_b, é a soma das áreas das bases;
- A superfície total é o conjunto de todas as faces;
- A *área total* é a área da superfície total, denotada A_t.

Por exemplo, considere o prisma de base pentagonal abaixo:

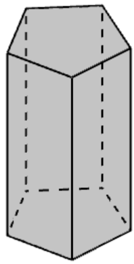


Figura 8.25: Prisma de base pentagonal.

Uma das possíveis planificações para esse sólido é a seguinte,

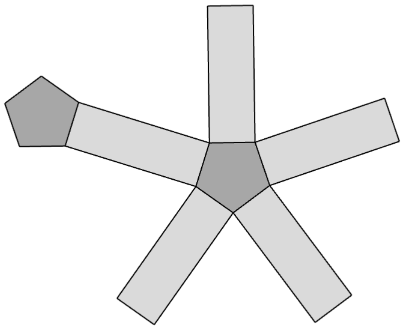


Figura 8.26: Planificação do prisma pentagonal.

onde as regiões mais escuras representam as bases e as mais claras as faces laterais. Desta forma temos que a área lateral A_ℓ é a soma dos retângulos claros, a área das bases A_b é a soma dos pentágonos mais escuros e a área total A_t representa a soma das áreas de todos estes polígonos.

Exercício de Fixação 8.2. Faça um esboço de um prisma cuja base é um triângulo equilátero de lado 3 cm e cuja altura é 10 cm. Calcule a área e o volume deste prisma.

Exercício de Fixação 8.3. Encontre a área da superfície e o volume de um paralelepípedo de medidas a, b e c.

Para calcular o volume de um prisma qualquer, basta considerar a área da base (A_b) e a altura (h), desta forma o volume é dado pela seguinte expressão:

$$V = A_b \cdot h.$$

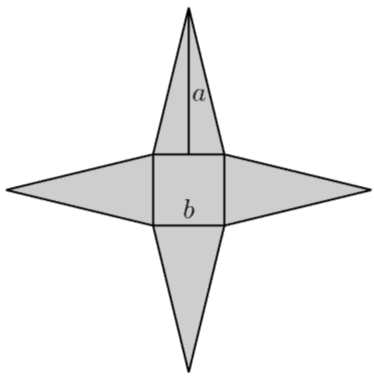
Pirâmide regular

De modo parecido com os prismas, podemos destacar os seguintes elementos relacionados à áreas:

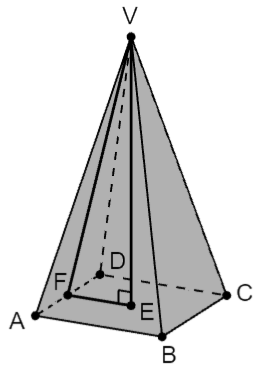
- A *superfície lateral* é o conjunto das faces laterais (neste caso triangulares);
- A *área lateral* (A_ℓ) é a área da superfície lateral;
- A *área da base* (A_b) é a área formada pela base da pirâmide;
- A *superfície total* é o conjunto das faces laterais e da base;
- A *área total* (A_t) é a área da superfície total.

Considere uma pirâmide de base quadrada cuja aresta da base mede b e com altura h. Vamos encontrar a área total deste sólido.

A planificação abaixo pode nos auxiliar:



Perceba que ainda não sabemos o valor do apótema da pirâmide, cuja medida está representada por a na figura acima. Para encontrar esta medida voltemos à pirâmide original:



Observamos que $VF = a$, $EF = \frac{AB}{2} = \frac{b}{2}$ e $VE = h$, bem como o triângulo VEF é retângulo em E. Assim, aplicando Pitágoras neste triângulo temos,

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Agora basta agrupar as áreas, pois $A_b = b^2$ e $A_\ell = 4 \cdot \left(\frac{b \cdot a}{2}\right) = 2 \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$, logo $A_t = b^2 + 2 \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$.

Não é o foco dessa aula, mas pode-se provar que pirâmides que têm mesma área da base e mesma altura possuem volumes iguais, o qual pode ser calculado usando a fórmula

$$V = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3}.$$

Exercício de Fixação 8.4. Encontre a área da superfície e o volume de um tetraedro em função da medida da aresta a.

Cilindro

Calcular a área de um cilindro não é uma tarefa difícil. Como se pode observar na planificação abaixo, temos a área da superfície lateral (A_ℓ) e a área das bases (A_b), onde

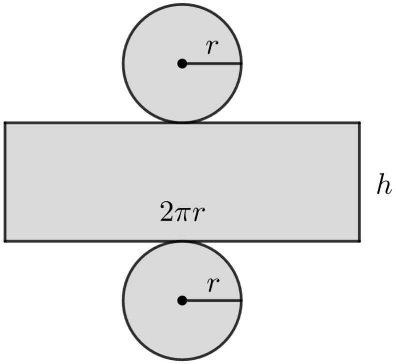


Figura 8.27: Planificação do cilindro de raio r e altura h.

$$A_\ell = 2\pi r h.$$
$$A_b = 2\pi r^2.$$
$$A_t = A_l + A_b = 2\pi r(h + r).$$

A_t denota a área total ou área da superfície total.

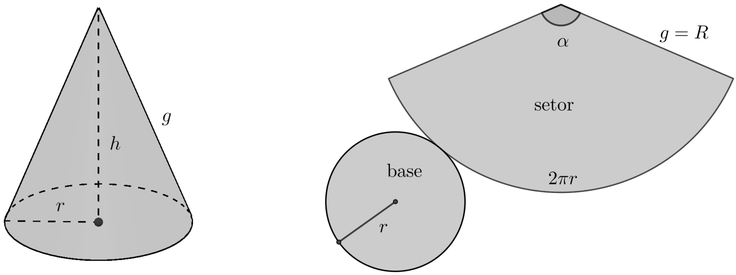
O volume do cilindro tem uma expressão semelhante à outros sólidos:

$$V = \text{área da base} \cdot \text{altura} = \pi r^2 h.$$

Exercício de Fixação 8.5. Faça um esboço de um cilindro de raio 2 cm e altura 15 cm. Calcule a área e o volume deste sólido.

Cone

Iremos nos preocupar somente com o cone reto. Denotemos por r o raio do cone, h a altura e $g = R$ a geratriz (e também o raio do setor circular ao planificar o cone).



Denotando $\ell = 2\pi r$ o comprimento do arco e lembrando que

$$\ell = \alpha_{rad} \cdot R.$$

Temos que a área do setor será dada por

$$A_\ell = R^2 \frac{\alpha_{rad}}{2}.$$

(lembre-se da aula de círculos).

Substituindo $\alpha_{rad} = \frac{\ell}{R}$:

$$A_\ell = \frac{R^2 \ell}{2R} = \frac{R\ell}{2} = \frac{R(2\pi r)}{2} = \pi r g.$$

A área da base não tem segredo! É a conhecida área do círculo, ou seja, $A_b = \pi r^2$. Logo, a área total é dada por:

$$A_t = A_b + A_\ell = \pi r^2 + \pi r g = \pi r(g + r).$$

O volume do cone é dado pela expressão

$$V = \frac{\text{área da base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

Note que, se temos um cone e um cilindro de mesma altura e mesma área da base, o volume do cilindro é três vezes o volume de um cone.

Exercício de Fixação 8.6. Em uma sorveteria são vendidas duas casquinhas (em formato de cone), a primeira possui um diâmetro de 6 cm e altura de 10 cm, e a outra um diâmetro de 8 cm e altura de 6 cm. Supondo que ambas as casquinhas são enchidas por completo, alguma das duas cabe mais sorvete?

Esfera

Relembrando dos círculos máximos, temos que a área da esfera é dada por quatro vezes a área de um desses círculos, ou seja,

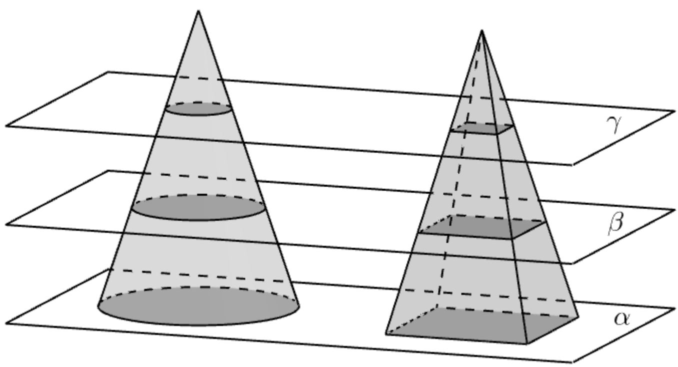
$$A = 4\pi R^2.$$

onde R é o raio do círculo máximo, que coincide com o raio da esfera.

Já o volume da esfera é dado pela expressão

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exercício de Aprofundamento 8.3. O *Princípio de Cavalieri* diz que dois sólidos limitados por dois planos paralelos (ou de mesma altura, quando fizer sentido) possuem mesmo volume se qualquer plano, paralelo aos dois “limitantes”, intersecta ambos os sólidos em regiões com mesma área.



Utilizando esse princípio, compare um prisma qualquer com um paralelepípedo com mesma área da base e conclua a fórmula de volume para o prisma, ou seja,

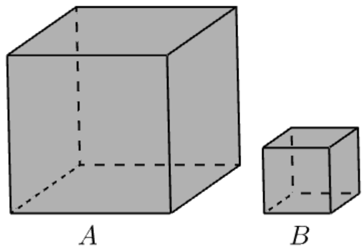
$$V = \text{área da base} \cdot \text{altura}.$$

Observe que a maioria das fórmulas de volume derivam desse princípio.

8.5.4 Semelhança e Volume

Lembre que, quando duas figuras planas são semelhantes (na razão k) suas áreas são proporcionais (na razão k^2). Vejamos que algo parecido ocorre com volumes.

Para fixar as ideias considere dois cubos A e B, de arestas a e $k{\cdot}a$, respectivamente. Aqui $k < 1$ representa a razão de semelhança entre as arestas (justifique que quaisquer dois cubos são semelhantes!).



Calculando os volumes temos,

$$V_A = a^3 \quad \text{e} \quad V_B = (k \cdot a)^3 = k^3 \cdot a^3.$$

Assim,

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{k^3 \cdot a^3}{a^3} = k^3.$$

Logo a razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

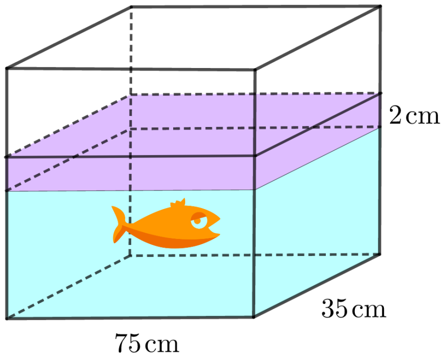
Como a unidade de volume é dada em função do cubo unitário, podemos estender este conceito para quaisquer dois sólidos semelhantes, de forma que a razão entre duas medidas lineares correspondentes (como arestas ou altura) ao cubo é igual a razão entre os volumes.

Problemas Propostos

Os problemas estão classificados por nível de dificuldade:

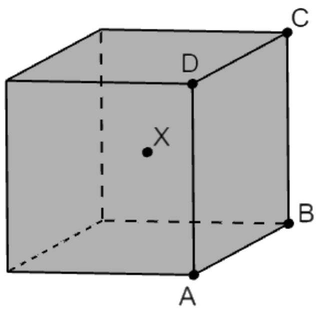
●	▲	♦	★
Fácil	Médio	Difícil	Desafio

1. ● Um peixe está submerso em um tanque retangular que tem 75 cm de comprimento e largura de 35 cm. Se o nível da água subiu em 2 cm quando o peixe for colocado no aquário, qual o volume do peixe?



2. ● Você gosta de pipoca e foi para uma loja. Chegando na loja você descobre que as pipocas são vendidas ambas na mesma embalagem, mas de dois modos diferentes. Ambos modos usam um papel retangular de dimensões 8.5 cm $\times$ 11 cm. O primeiro consiste em um cilindro curto, ou seja, com altura 8.5 cm e o segundo com altura 11 cm. Algum deles cabe mais pipoca?

3. ● Na figura X é o centro do cubo.



Se o volume do cubo é 1, qual é o volume da pirâmide de base

$ABCD$ e vértice X?

4. ● (UEMS) Um certo tipo de óleo de soja é vendido em duas latas cilíndricas distintas. A lata A de raio r está cheia de óleo até a altura h, a lata B tem raio $\frac{r}{2}$ e está cheia até a altura $2h$. A lata A é vendida por R\$ $3,00$ e a lata B por R\$ $1,40$. Podemos afirmar que:

   (a) a lata A é mais vantajosa para o consumidor.

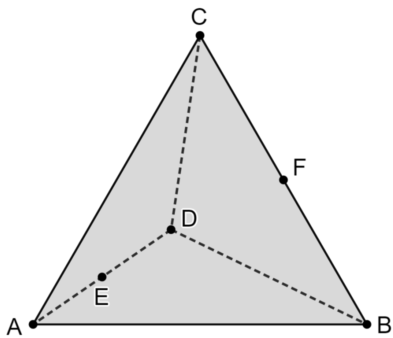
   (b) não existe vantagem na compra de uma ou outra lata.

   (c) ambas as latas apresentam o mesmo volume.

   (d) a lata B apresenta o dobro do volume da lata A.

   (e) a lata B é mais vantajosa para o consumidor.

5. ▲ Na figura abaixo, $ABCD$ é um tetraedro regular de aresta a. Sejam E e F os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, respectivamente. Qual é o valor de EF?



6. ▲ Em um recipiente cilíndrico de 20 cm de diâmetro e 15 cm de altura são colocadas X bolinhas de gude. Sabendo que as bolinhas estão inteiramente contidas no recipiente, adiciona-se 3,4 litros de água, atingindo a tampa do recipiente (sem derramar!). Se as bolinhas tem aproximadamente 1 cm de raio, estime a quantidade X de bolinhas de gude.

7. ▲ (ENEM 2001) Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

   I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.

   II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.

   III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

   Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito. A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização. Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

   (a) 30 %.

   (b) 22 %.

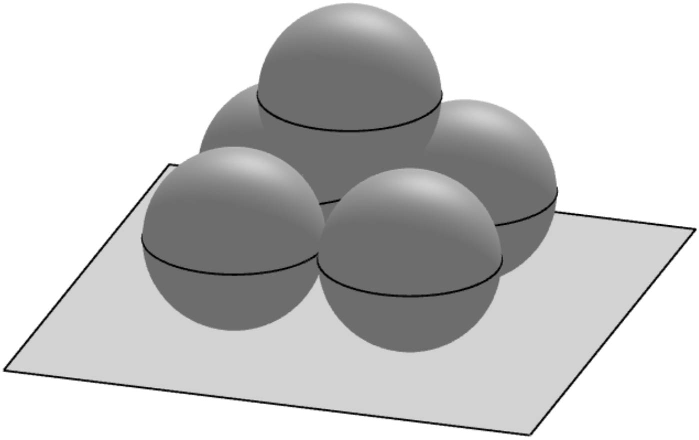
   (c) 15 %.

   (d) 12 %.

   (e) 5 %.

8. ▲ Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de água e suco de laranja. Para que isso seja possível, Qual deve ser a altura x atingida pelo primeiro líquido?

9. ▲ Quatro esferas de 3 cm de raio são colocadas, tangentes duas a duas, sobre uma mesa, de maneira que seus centros formem um quadrado. Uma quinta esfera, idêntica às primeiras, é colocada sobre as quatro primeiras. Qual a distância do centro da quinta esfera à superfície da mesa?



10. ♦ Uma pirâmide triangular tem para base um triângulo de lados 13, 14 e 15; as outras arestas medem $\frac{425}{8}$. Calcule o volume.

11. ♦ (OBM 2008) O brinquedo favorito de Cícero é um cone reto de vidro com 5 cm de altura. Cícero encheu o cone com areia até a altura de 3 cm, como mostrado na figura 1. Em seguida, Cícero fechou a base do cone e virou-o de cabeça para baixo, como indicado na figura 2. A que altura da base do cone, em cm, ficou a marca de areia?

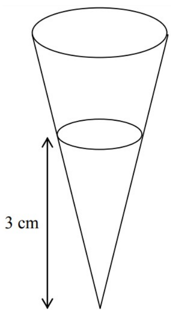


Figura 1

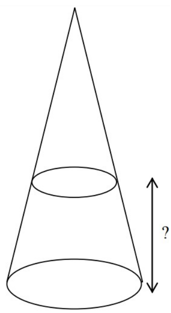
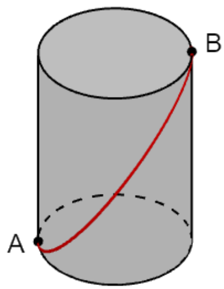


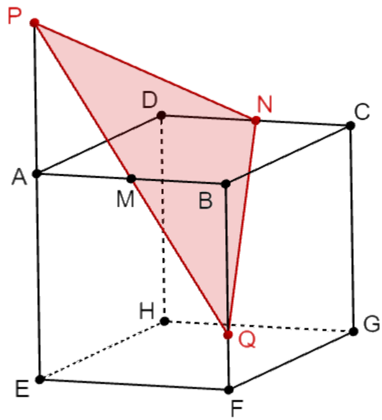
Figura 2

12. ♦ No cilindro reto abaixo, A e B são pontos da secção meridiana (isto é, uma secção que passa pelo centro das bases e é paralela à altura). Um barbante é esticado pela superfície do cilindro, ligando A a B. Se o raio da base do cilindro mede 8 cm e sua altura, 20 cm, encontre o comprimento do barbante.



13. ♦ Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra hexagonal, têm bases inscritas numa mesma circunferência de raio R e volumes iguais. Determine a relação entre as alturas das duas pirâmides.

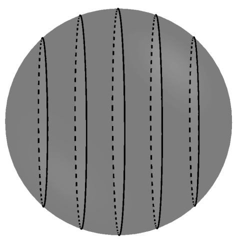
14. ♦ Considere um cubo $ABCDEFGH$ de lado 1 cm, como na figura. M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Para cada ponto P da reta $\overleftrightarrow{AE}$, seja Q o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{BF}$.



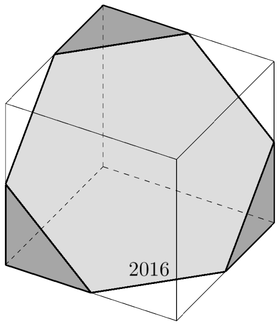
(a) Prove que o triângulo PQN é isósceles.

(b) A que distância do ponto A deve estar o ponto P para que o triângulo PQN seja retângulo?

15. ♦ Dada uma esfera de raio 1, qual a quantia mínima de "fatias" (interseção da esfera com planos) que podemos considerar para que a área total resultante ("esfera + fatias") seja maior que 50?



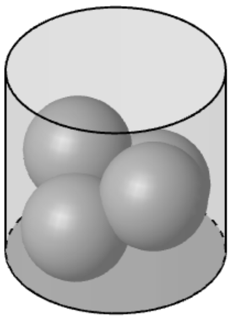
16. ♦ A imagem mostra um cubo cortado no meio. Encontre a área da superfície total deste sólido.



17. ♦ Num copo de 10 cm de diâmetro e 10 cm de altura foram colocadas quatro esferas de 5 cm de diâmetro, como na figura abaixo. A quantidade de água necessária para cobrir o copo até a altura das esferas é dada por:

$$\frac{a\pi(b + c\sqrt{b})}{d}.$$

em cm^3, onde a e d são inteiros positivos e coprimos, b é um inteiro não quadrado e c também é inteiro. Encontre $a + b + c + d$.



Observação: O copo é um cilindro reto e as esferas de cima estão num ângulo de 90° em relação às de baixo.

18. ★ Seja uma esfera de raio R cortada por um feixe de N planos que tem uma reta em comum (essa reta não passa pela esfera).

Esse feixe determina $N+1$ sólidos na esfera formados entre os cortes dos planos. Seja S a área da superfície total desses sólidos, isto é, a área contida nos planos e na esfera (não se esqueça que cada plano pode determinar uma face superior e inferior!). Nessas condições, prove que

$$\frac{S}{2\pi R^2} - 2 \leq N.$$

Observação: Um feixe de planos é um conjunto de planos que contêm a mesma reta. Na imagem a seguir ilustramos um exemplo da questão com $N = 2$ e um exemplo de feixe.

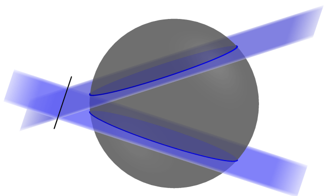


Figura 8.28: Sólidos delimitados por planos e esfera.

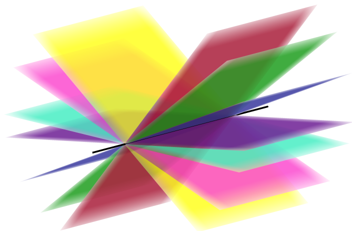


Figura 8.29: Feixe de planos.

Referências Bibliográficas

Geometria

Aula 1

1. Elementos Básicos de Geometria Plana. Portal OBMEP do Saber. Professor Marcos Paulo. Disponível em: `https://portaldosaber.obmep.org.br`. Último acesso em: 29 de dez. de 2019.

2. DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Geometria Plana.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual, 1993.

3. DORICHENKO, S. *Círculo Matemático, Problemas Semana-a-Semana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

4. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

5. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. *The Art of Problem Solving.* Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick, 2006.

Aula 2

1. Elementos Básicos de Geometria Plana. Portal OBMEP do Saber. Professor Marcos Paulo. Disponível em: `https://portaldosaber.obmep.org.br`. Último acesso em: 12 de dez. de 2019.

2. DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Geometria Plana.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual,1993.

3. DORICHENKO, S. *Círculo Matemático, Problemas Semana-a-Semana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

4. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

5. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. *The Art of Problem Solving.* Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick,2006.

Aula 3

1. Elementos Básicos de Geometria Plana. Portal OBMEP do Saber. Professor Marcos Paulo. Disponível em: `https://portaldosaber.obmep.org.br`. Último acesso em: 29 de jan. de 2020.

2. DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Geometria Plana.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual,1993.

3. DORICHENKO, S. *Círculo Matemático, Problemas Semana-a-Semana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

4. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

5. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. *The Art of Problem Solving.* Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick,2006.

Aula 4

1. Elementos Básicos de Geometria Plana. Portal OBMEP do Saber. Professor Marcos Paulo. Disponível em: `https://portaldosaber.obmep.org.br`. Último acesso em: 29 de jan. de 2020.

2. DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Geometria Plana.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual,1993.

3. DORICHENKO, S. *Círculo Matemático, Problemas Semana-a-Semana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

4. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

5. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. *The Art of Problem Solving.* Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick,2006.

Aula 5

1. DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Geometria Plana**. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual, 1993.

2. AFINED. **Geometría**: Una Visión a La Planimetría. 1. ed. Lima: Lumbreras, 2005.

3. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. **The Art of Problem Solving**. Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick, 2006.

4. COSTA, D. M. B; TEIXEIRA J. L; SIQUEIRA P. H; SOUZA L. V. **Elementos de Geometria**. 3. ed. Curitiba: 2012. Disponível em: `http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf`. Último acesso em: 20 de abr. de 2020.

Aula 6

1. DANTE, Luis Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. 3. ed. São Paulo: ática, 2016. 392 p. v. 2.
2. IEZZI, Gelson et al. **Fundamentos da Matemática Elementar**: Trigonometria. 2. ed. São Paulo: Atual, 1978.
3. Relações métricas no triângulo. POTI IMPA. Professor Cícero Thiago. Disponível em: https://poti.impa.br/uploads/material_teorico/dj006unq9pckg.pdf. Último acesso em: 17 de ago. de 2020.

Aula 7

1. DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Geometria Plana**. Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual, 1993.
2. AFINED. **Geometría**: Una Visión a La Planimetría. 1. ed. Lima: Lumbreras, 2005.
3. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. **The Art of Problem Solving**. Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick, 2006.
4. COSTA, D. M. B; TEIXEIRA J. L; SIQUEIRA P. H; SOUZA L. V. **Elementos de Geometria**. 3. ed. Curitiba: 2012. Disponível em: http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/elementos.pdf. Último acesso em: 20 de abr. de 2020.

Aula 8

1. DANTE, Luis Roberto. **Matemática**: Contexto & Aplicações. 3. ed. São Paulo: ática, 2016. 392 p. v. 2.

2. GIOVANNI, José Ruy et al. **Matemática Fundamental**: Uma nova abordagem. São Paulo: FTD, 2002. 712 p. v. único.

3. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Geometria espacial - Posição e métrica. 5. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 10.