Geometria

POTI/TOPMAT - UFPR

Nível 2

3ª edição

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Coordenadores:	Fernanda de Oliveira de Jesus Leonardo Knelsen Mahmut Telles Cansiz
Site:	http://poti.ufpr.br/
E-mail:	poti@ufpr.br
Capa:	Luciana Laroca
Impressão:	Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de pro-

duzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinco e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024
Departamento de Matemática - UFPR
Janeiro de 2024

Sumário

Apresentação **3**

Introdução **9**

1 Introdução **11**

1.1 Noções Primitivas 11
1.1.1 Ponto 11
1.1.2 Abertura entre Pontos 12
1.1.3 Segmento 13
1.1.4 Reta 14
1.1.5 Plano ou Superfície 15
1.2 Retas Paralelas e Retas Concorrentes 16
1.3 Colinearidade 17
1.3.1 Pontos colineares 17
1.3.2 Segmentos (de reta) colineares 18
1.4 Congruência de Segmentos 18
1.5 Adição de Segmentos 19
1.6 Ponto Médio de um Segmento 20
1.7 Perpendicularidade 20
1.8 Projeção de um Ponto sobre uma Reta 20
1.9 Medição de Segmentos 20
1.9.1 Distância Geométrica 21
1.10 Coordenadas Cartesianas 21
1.10.1 Distância entre Pontos no Plano Cartesiano . 23
1.11 Razão entre Segmentos 24

1.11.1 Divisão Harmônica 24
1.11.2 Teorema de Tales 24
1.12 Construção da Circunferência 25

2 Ângulos **31**
2.1 Ângulos Consecutivos, Adjacentes e Opostos pelo Vértice 32
2.1.1 Ângulos Consecutivos 32
2.1.2 Ângulos Adjacentes 33
2.1.3 Ângulos Opostos pelo Vértice 33
2.2 Congruência de Ângulos 34
2.3 Adição de Ângulos 34
2.4 Bissetriz de um Ângulo 35
2.5 Medição de Ângulos 36
2.5.1 Graus 37
2.5.2 Radianos 38
2.6 Ângulos Agudo, Reto, Obtuso, Raso, Convexo e Côncavo 39
2.7 Ângulos Complementares e Suplementares 39
2.8 Retas Paralelas cortadas por uma Transversal. . . . 39
2.8.1 Ângulos Correspondentes 40
2.8.2 Ângulos Alternos Internos 40
2.8.3 Ângulos Alternos Externos 40

3 Triângulos **51**
3.1 Elementos do Triângulo 52
3.1.1 Ângulos Internos e Externos 52
3.2 Classificação dos Triângulos 52
3.2.1 Quanto aos Lados 52
3.2.2 Quanto aos Ângulos 53
3.3 Congruência de Triângulos 54
3.3.1 Casos de Congruência 55
3.4 Mediana de um Triângulo 56
3.5 Bissetriz Interna de um Triângulo 57
3.6 Altura de um Triângulo 58
3.7 Desigualdade Triangular 59

3.8 Semelhança de Triângulos 60
3.9 Teorema de Tales de Mileto nos Triângulos 62
3.10 Triângulo Retângulo 63
3.10.1 Semelhanças no Triângulo Retângulo 63
3.10.2 Teorema de Pitágoras 64

4 Quadriláteros Notáveis 77
4.1 Elementos do Quadrilátero 78
4.2 Trapézio 78
4.2.1 Trapézio Isósceles 79
4.3 Paralelogramo 79
4.4 Bases Médias 82
4.4.1 Base Média do Triângulo 82
4.4.2 Base Média do Trapézio 83

5 Círculos 95
5.1 Circunferência 95
5.1.1 Raio, Diâmetro e Corda 96
5.2 Círculo 97
5.3 Secante e Tangente 98
5.4 Quadriláteros Circunscritíveis 99
5.5 Ângulos na Circunferência 100
5.5.1 Ângulo Central 100
5.5.2 Ângulo Inscrito 101
5.6 Comprimento da Circunferência 102
5.7 Potência de Ponto 103

6 Áreas I 115
6.1 Área do Paralelogramo 116
6.2 Área do Triângulo 117
6.2.1 Razão entre Áreas de dois Triângulos Semelhantes 118
6.2.2 Prova Geométrica do Teorema de Pitágoras . 119
6.3 Área do Trapézio 120
6.4 Losango 121
6.5 Áreas de Polígonos Regulares 121

7 Áreas II **135**
7.1 Área do Círculo 135

8 Pontos Notáveis do Triângulo **151**
8.1 Cevianas 151
8.1.1 Mediana 152
8.1.2 Bissetriz Interna do Triângulo 152
8.1.3 Altura do Triângulo 153
8.2 Mediatriz do Triângulo 154
8.3 Pontos Notáveis do Triângulo 154
8.3.1 Baricentro 154
8.3.2 Incentro 155
8.3.3 Ortocentro 156
8.3.4 Circuncentro 157

Referências Bibliográficas **165**

Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas

olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo "eu já sei, já estudei isso". Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

Equipe POTI/TOPMAT
Nível 2
2024

Aula 1

Introdução

Nesta aula, apresentaremos algumas noções básicas de geometria, a fim de que o aluno adquira recursos capazes de o levar a desenvolver - por si só - conceitos mais gerais sobre estruturas em um plano geométrico.

1.1 Noções Primitivas

1.1.1 Ponto

Costumamos entender o *ponto* como uma mancha arredondada sobre o papel, mas poucos sabem que esse é apenas um jeito de lhe dar cara, face. Um ponto, na verdade, é aquilo de que nada é parte, ou seja, é aquilo que não possui forma alguma, nem nenhuma qualidade, como comprimento, altura ou profundidade, embora estruture (e assim dê forma a) todas as figuras geométricas. A rigor, então, não somos capazes de desenhá-lo, apenas descrevê-lo.

Mas, se o ponto não é nada de imagem, como é possível que ele forme todas as figuras que conhecemos? Isso ainda permanece um mistério, mas, analisando a questão, algo podemos pensar: é só porque não tem uma forma específica que ele é capaz de formar (isto é, modelar, configurar). Quando olhamos a figura de um triângulo, por exemplo, nela há ponto, no entanto, ele não é visto, e assim o

triângulo pode aparecer. Com todo o resto acontece o mesmo: o ponto permite que tudo apareça através dele, como uma janela que, aberta, nos dá a ver.

A partir disso, podemos perceber que não é possível confundi-lo com o que modernamente conhecemos como átomo ou coisa semelhante, pois o ponto não faz "parte" da figura, ele não é elemento dela, mas somente aquilo que possibilita o seu surgimento, pontuando, limitando, definindo. Pois ponto, a rigor, é pura definição, limitação. Pontuar é delimitar, é formar.

Mesmo sabendo disso, muitas vezes temos de lidar com situações em que o ponto precisa "aparecer". Nestes casos, deixando de lado a *filosofia do ponto*, iremos traçá-lo ao modo clássico, como uma bolinha preta, e/ou nomeá-lo com uma letra maiúscula, como na figura abaixo:

Figura 1.1: Ponto A.

Exercício de Fixação 1.1. Há como dizer quantos pontos há na letra "a" impressa neste papel? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 1.1. É possível colocar dois pontos um ao lado do outro sem que haja separação entre eles? Se sim, que figura geométrica teríamos?

Exercício de Aprofundamento 1.2. Explique por que podemos dizer que em duas figuras diferentes (independente do tamanho) encontramos sempre a mesma quantidade de pontos.

1.1.2 Abertura entre Pontos

Abertura entre Pontos é a separação entre dois ou mais pontos, a partir de onde surge a ideia de *distância*.

Normalmente, a abertura entre uma coisa e outra é medida em linha reta, mas esse é apenas um modo de medir. A rigor, a abertura

entre dois pontos não pode ser mensurada, pois podemos traçar infinitos caminhos (com tamanhos igualmente infinitos) entre eles.

Figura 1.2: Abertura entre A e B.

Nota 1. Para não nos confundirmos, costumamos dar nomes distintos para elementos entre os quais há alguma abertura. Por isso, no exemplo acima, nomeamos de forma diferente os pontos em destaque: A e B.

1.1.3 Segmento

Um *segmento* é um caminho possível que conecta dois pontos separados. Representamo-lo com uma linha.

Entre um ponto e outro há infinitos caminhos, isto é, infinitos segmentos.

Figura 1.3: Segmento entre os pontos A e B.

Segmento de Reta

Podemos dizer que um *segmento de reta* é o menor caminho entre dois pontos separados. Nesse sentido, ele não é simplesmente uma linha sem curvas, mas, mais propriamente, a menor distância entre o que está afastado.

Notação 1. Um segmento de reta com extremidades A e B pode ser escrito da seguinte maneira: $\overline{AB}$. Diz-se "segmento de reta AB" ou, simplesmente, "segmento AB", já que não trabalharemos com outros tipos de segmentos.

Figura 1.4: Segmento de Reta $\overline{AB}$.

Exercício de Aprofundamento 1.3. Quantos pontos são atravessados (ultrapassados) por um segmento de reta que tem o comprimento de um ponto? Justifique a sua resposta.

Exercício de Aprofundamento 1.4. Se colocássemos infinitos segmentos (independente do tamanho de cada um deles) um ao lado do outro, teríamos um segmento de tamanho infinito, certo? Tomemos agora o segmento $\overline{AB}$, com 1 cm. Podemos dividi-lo quantas vezes quisermos, de modo que, realizando-o infinitas vezes, teremos infinitos fragmentos dele. Mas, colocando todos esses fragmentos lado a lado, não teremos um segmento de tamanho infinito. Como podemos conciliar este resultado com o que foi dito no início da questão?

1.1.4 Reta

Uma reta é o menor caminho entre dois pontos que "moram" no infinito, isto é, que estão onde não conseguimos ver.

Aqui vale um comentário: como a geometria lida com o visível, o infinito (entendido como aquilo que não tem definição) tem de ser pensado exatamente a partir da ideia de não-visão, isto é, ele "está"sempre fora de onde conseguimos ver.

Sendo assim, não podendo ter à frente os pontos no infinito, costumamos pegar outros dois pontos (visíveis) atravessados pela reta para representá-la.

Notação 2. Dada uma reta que passa pelos pontos A e B, podemos escrevê-la da seguinte forma: $\overleftrightarrow{AB}$. Diz-se "reta AB". É comum também representarmos as retas com as letras minúsculas do alfabeto. Se dissermos, por exemplo, que a reta r passa por A e B, então $r = \overleftrightarrow{AB}$.

Figura 1.5: Reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Nota 2. Observe que tanto na notação $\overleftrightarrow{AB}$ quanto na figura as extremidades da reta são representadas com flechas. Isso indica que ela se estende para o infinito, isto é, suas extremidades não podem ser vistas e, portanto, seu tamanho é incomensurável (não pode ser medido).

Exercício de Aprofundamento 1.5. Dados dois pontos quaisquer, quantas retas passam por eles? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 1.6. Os primeiros matemáticos diziam que uma reta é apenas comprimento, e não tem nada de altura. Você consegue explicar o motivo pelo qual eles diziam isso?

Semirreta

Semirreta é o caminho mais curto entre um ponto que conseguimos ver e outro que mora no infinito.

Notação 3. Seja A o ponto que conseguimos ver e B um ponto qualquer atravessado pela semirreta, podemos escrevê-la assim: $\overrightarrow{AB}$. Diz-se "semirreta AB".

Nota 3. O ponto A é chamado de "origem da semirreta".

Figura 1.6: Semirreta $\overrightarrow{AB}$.

1.1.5 Plano ou Superfície

Podemos dizer que há infinitos pontos e, assim, infinitos caminhos que os conectam. A união desses caminhos é o que podemos chamar de "plano" ou "superfície".

Há apenas duas qualidades no plano: comprimento e altura.

Notação 4. Costumamos escrever o plano com uma letra grega minúscula, como α, β, γ etc.

Nota 4. Nosso curso tratará dos conhecimentos relativos à geometria plana, e não espacial, então dificilmente falaremos de mais de um plano. Assim, não o precisando nomear, reservaremos as letras gregas também para outros elementos geométricos.

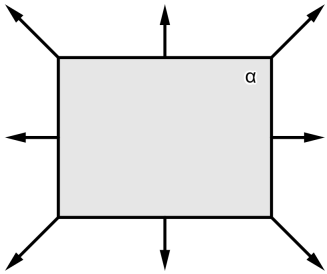


Figura 1.7: Plano α.

1.2 Retas Paralelas e Retas Concorrentes

Duas retas distintas são *paralelas* se, e somente se, não atravessam nenhum ponto em comum.

Por outro lado, duas retas são *concorrentes* se, e somente se, atravessam um único ponto em comum.

Notação 5. Costumamos representar o paralelismo entre retas da seguinte forma: dadas r e s paralelas, escrevemos $r /\!/ s$.

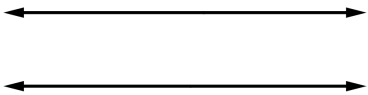


Figura 1.8: Retas Paralelas.

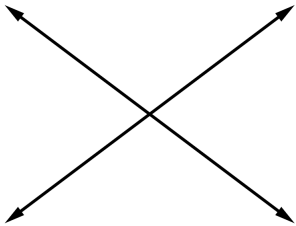


Figura 1.9: Retas Concorrentes.

Nota 5. Se duas retas concorrentes, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, atravessam o ponto P, dizemos que elas *se intersectam* (se cruzam) em P, isto é, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = P$. De outra forma, se $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são paralelas, então $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \emptyset$. ($\cap$ = símbolo para intersecção)

Nota 6. Se as retas r e s atravessam mais de um ponto em comum, necessariamente elas são iguais. Neste caso, dizemos que r e s são *coincidentes*, e escrevemos $r = s$.

1.3 Colinearidade

1.3.1 Pontos colineares

Dois ou mais pontos são *colineares* se uma mesma reta os atravessa.

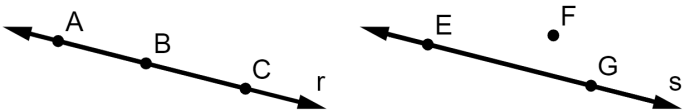


Figura 1.10: Os pontos A, B e C são colineares. Já os pontos E, F e G não são colineares.

Nota 7. Se o ponto A é atravessado pela reta r, podemos escrever $A \in r$ (diz-se "A pertence à r". Desse modo, se A, B e C são colineares à reta r, então $A, B, C \in r$.

Exercício de Fixação 1.2. Dois pontos são sempre colineares? Por quê?

Exercício de Fixação 1.3. Os vértices (as pontas) de um triângulo são sempre não colineares? Por quê?

Exercício de Fixação 1.4. Sejam T e U pontos distintos, ambos atravessados pelas retas r e s. Podemos concluir que $r = s$? Justifique.

1.3.2 Segmentos (de reta) colineares

Dois ou mais segmentos são *colineares* se todos os pontos atravessados por eles também são atravessados por uma mesma reta.

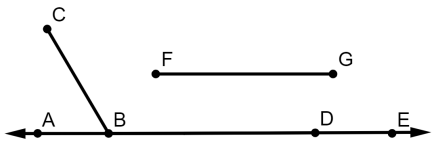


Figura 1.11: Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são colineares. Já os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ ou $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ não são colineares.

Exercício de Fixação 1.5. Na figura acima, que outros segmentos são colineares e que outros não são colineares? Anote todos!

1.4 Congruência de Segmentos

Nota 8. Em geometria, costumamos dizer que duas figuras são congruentes quando elas possuem a mesma forma e o mesmo tamanho.

Uma relação entre segmentos é dita "congruência" (símbolo: $\equiv$) se as seguintes propriedades são satisfeitas:

i. *Reflexividade.* Todo segmento é congruente a si mesmo: $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (diz-se: $\overline{AB}$ é congruente a $\overline{AB}$).

ii. *Simetria.* Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$.

iii. *Transitividade.* Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$.

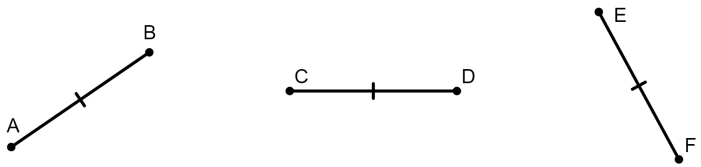


Figura 1.12: Congruência de segmentos.

Nota 9. Na figura acima, há um pequeno traço no meio de cada segmento, isso quer dizer que eles são congruentes. Ou seja, segmentos com a mesma quantidade de traços são sempre congruentes. Mas, atenção, esse caso vale apenas para segmentos da mesma figura!

Exercício de Fixação 1.6. Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ são congruentes. Por quê?

1.5 Adição de Segmentos

A partir da ideia de congruência, podemos "somar" segmentos. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ dois segmentos quaisquer, $\overrightarrow{EG}$ uma semirreta com origem em E e $F \in \overrightarrow{EG}$. Se $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{FG}$, então dizemos que $\overline{EG} = \overline{AB} + \overline{CD}$.

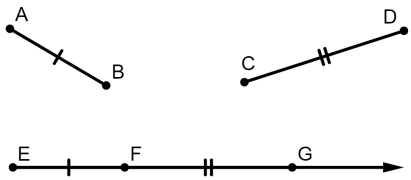


Figura 1.13: Adição de Segmentos.

Nota 10. Se o segmento $\overline{CD}$ é igual a soma de n segmentos congruentes ao segmento $\overline{AB}$, dizemos que $\overline{CD} = n\overline{AB}$.

1.6 Ponto Médio de um Segmento

O ponto M é um *ponto médio* de $\overline{AB}$ se, e somente se, M estiver "dentro" de $\overline{AB}$ e $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

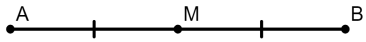


Figura 1.14: M é ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$.

1.7 Perpendicularidade

Dadas duas retas, r e s, tal que $A, B \in r$, com $A \neq B$ e $M \in s$ ponto médio de $\overline{AB}$. Seja também $C \in s$, $C \neq M$. Se $\overline{AC} \equiv \overline{CB}$, então r e s são perpendiculares (ou, simbolicamente, $r \perp s$).

1.8 Projeção de um Ponto sobre uma Reta

Damos o nome de "projeção ortogonal de P sobre r" à intersecção entre a reta r e sua perpendicular que passa pelo ponto P.

Notação 6. Costumamos chamar a projeção de P sobre r de "Ponto P' ".

1.9 Medição de Segmentos

A medida de um segmento é o que chamamos de "comprimento".

Há muitas unidades de medida para o cálculo do comprimento, a escolha de uma delas depende do contexto no qual estamos. Podemos usar centímetros, metros, quilômetros etc. Há casos, inclusive, em que não teremos unidade específica, ficando estabelecido apenas um valor x qualquer para a medida. Por exemplo, $\overline{AB} = 5$.

Assim, tomando $\overline{PQ} = 6$ e $\overline{RS} = 7$, temos que $\overline{PQ} + \overline{RS} = 6 + 7 = 13$.

1.9.1 Distância Geométrica

Dados dois pontos, A e B, dizemos que a *distância geométrica* (ou apenas *distância*) entre eles é igual ao segmento de reta $\overline{AB}$.

Notação 7. Escrevemos a distância entre A e B do seguinte modo: $d_{A,B}$.

1.10 Coordenadas Cartesianas

Em meados do século XVII, o matemático René Descartes criou um método capaz de mapear figuras geométricas utilizando eixos perpendiculares com escalas: o eixo das abscissas (comumente chamado de "eixo x") e o eixo das ordenadas ("eixo y"). A primeira normalmente está na horizontal, enquanto que a segunda, vertical. A esse mapa, damos o nome de "plano cartesiano".

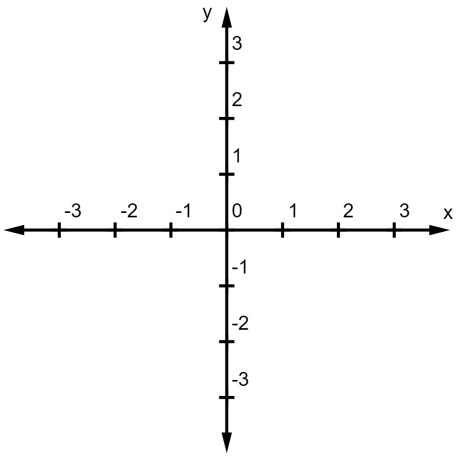


Figura 1.15: Plano Cartesiano.

A ideia é a de que, com um sistema de orientação em que o centro (chamado também de "origem") é a intersecção entre os eixos x e y, consigamos escrever algebricamente figuras geométricas. Cada eixo funciona como uma régua medidora na qual o ponto zero é a

origem e as semirretas formadas a partir dele, as orientações, que são divididas em duas classes: positivas e negativas. As semirretas que avançam para a direita e para cima representam os números reais positivos; e as outras duas, os números reais negativos.

Desse modo, podemos mapear pontos, retas ou qualquer outra figura utilizando apenas números, equações... Mas, para que vejamos isso, devemos antes aprender a nos localizar no plano cartesiano.

Façamos assim: pensemos os eixos como coordenadas que nos dizem para onde devemos olhar, ou seja, quanto devemos ir para os lados e/ou para cima ou para baixo a partir da origem. Se quisermos andar para os lados, temos de olhar para o eixo x; para cima e para baixo, olhamos para o eixo y.

Notação 8. Para simplificar, usamos a seguinte notação: (x, y). Do lado esquerdo, escrevemos quanto devemos andar no eixo x; do lado direito, quanto devemos andar em y.

Assim, se escrevermos $(2, 3)$, sabemos que devemos andar duas unidades para a direita e três para cima, como na figura abaixo. O lugar onde paramos é justamente o *ponto* $(2, 3)$.

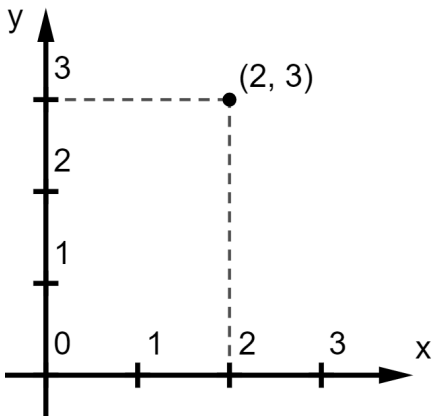


Figura 1.16: Representação gráfica do ponto de coordenadas $(2, 3)$.

Podemos também escrever retas, como, por exemplo, a reta (x, x). Isto é, o mesmo tanto que andarmos em x, teremos de andar

em y.

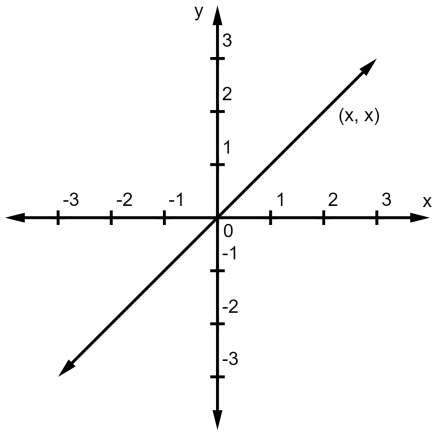


Figura 1.17: Representação gráfica do conjunto de todos os pontos da forma (x, x), $x \in \mathbb{R}$: uma reta.

Exercício de Aprofundamento 1.7. Em coordenadas cartesianas, como poderíamos escrever uma reta que passa pela origem e é perpendicular à (x, x)?

Exercício de Fixação 1.7. Desenhe o plano cartesiano e marque os pontos $(1, 2)$, $(-2, 3)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$ e $(2, -2)$.

Exercício de Fixação 1.8. Desenhe o plano cartesiano e trace a reta que atravessa os pontos $(2, 2)$ e $(-2, 3)$.

Exercício 1.1. Se $A = (1, 1)$, $B = (1, 3)$, $C = (3, 3)$ e $D = (3, 1)$, que figura geométrica os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ formam?

Exercício 1.2. Usando do exercício acima, calcule $d_{A,B}$, $d_{B,C}$, $d_{C,D}$, $d_{D,A}$ e $d_{(0,3),B}$.

1.10.1 Distância entre Pontos no Plano Cartesiano

Para calcular a *distância geométrica* entre dois pontos quaisquer no Plano Cartesiano, temos a seguinte fórmula: sejam $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ dois pontos no plano, temos que $d_{A,B} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Exercício de Fixação 1.9. Calcule a distância entre os pontos $(1, 4)$, $(-2, 11)$ e $(3, -7)$.

1.11 Razão entre Segmentos

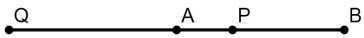
Razão é sempre a divisão entre dois números ou elementos. Assim, se quisermos estabelecer a razão entre segmentos, estaremos pensando em seus comprimentos. Se $\overline{AB} = 2$ e $\overline{CD} = 3$, então a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ será $\frac{2}{3}$.

Notação 9. Escrevemos a razão entre dois segmentos do mesmo modo que a razão entre números. Sejam $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, então a razão entre eles será $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Nota 11. Dizemos que quatro segmentos de reta são *proporcionais* quando a razão entre os comprimentos de dois deles forem iguais à razão entre os comprimentos dos dois restantes.

1.11.1 Divisão Harmônica

Dizemos que os pontos P e Q dividem harmonicamente o segmento $\overline{AB}$, quando $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$.



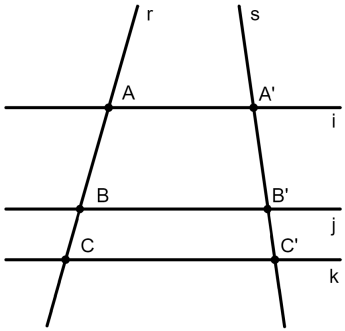
Como $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k = \frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}$, então os pontos P e Q dividem $\overline{AB}$ na mesma razão. Estes pontos, portanto, são denominados "conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão k"

1.11.2 Teorema de Tales

Um *teorema* matemático é uma afirmação que pode ser demonstrada (provada) a partir de alguns argumentos lógicos, usando como base princípios que orientam o que está sendo estudado.

O *Teorema de Tales* afirma que retas paralelas cortadas ou intersectadas por retas transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes.

Observe a figura abaixo, onde $i//j//k$, e r e s são retas transversais.



Daí, temos o seguinte: $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

Exercício de Aprofundamento 1.8. Com base no que fora dito anteriormente, mostre que $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$.

1.12 Construção da Circunferência

Agora, mostraremos o processo de construção de uma circunferência, para que mais tarde possamos verificar as suas propriedades.

Tome o segmento $\overline{CA}$, com C fixado, tal que $d_{CA} = r$. Em seguida, gire A em torno de C. O contorno formado por A é a circunferência de raio r e centro em C.

Notação 10. Para a circunferência de raio r e centro em C damos o nome de (C, r).

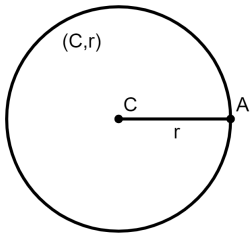
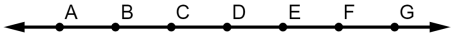


Figura 1.18: Circunferência (C, r).

Nota 12. Chamamos "círculo" a união entre a parte interna da circunferência (C, r) e a própria circunferência (C, r).

Problemas Propostos

1. ● Abaixo estão alguns pontos distintos atravessados por uma mesma reta. Quantas semirretas possuem origem em algum desses pontos e não atravessa o ponto C?



2. ● Seja $\overline{AB} = 40cm$, determine o comprimento de $\overline{AC}$ nos seguintes casos:

   a) Quando $\overline{CB} = 16cm$.
   b) Quando $\overline{AC} - \overline{CB} = 2cm$.
   c) Se $\overline{AC} = 4x$ e $\overline{CB} = 2x + 4$

3. ● Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Se $\overline{AM} = 4x - 10$ e $\overline{MB} = x + 14$, qual o valor de x?

4. ● Os pontos A, B e P são distintos e são atravessados por uma mesma reta, com A situado à esquerda de B. Se $\overline{PA} > \overline{AB}$ e $\overline{PB} < \overline{AB}$, o que podemos dizer sobre a ordem dos três pontos na reta?

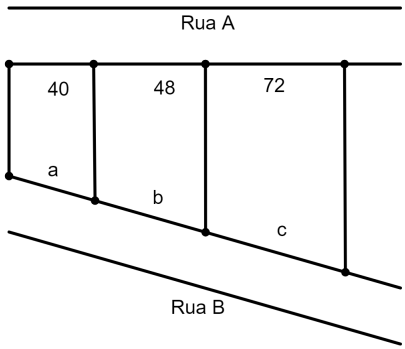
5. ● Sejam A, B, C e D pontos consecutivos atravessados por uma mesma reta. Se $\overline{AD} = 2\overline{BC}$ e $\overline{AB} + \overline{CD} = 20$, determine o valor de $\overline{AD}$.

6. ● (Portal do Saber - OBMEP) Em uma reta se encontram os quatro pontos consecutivos A, B, C e D, com $\overline{AB} = \overline{AC} - 3$, $\overline{AB} + \overline{CD} = 4$ e que satisfazem a seguinte relação: $3\overline{AB} -$

$\overline{BD} - 2\overline{CD} = 3$. Determine as medidas dos comprimentos de $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$.

7. ● (Portal do Saber - OBMEP) Os pontos A, B, C e D estão sobre uma mesma reta e são consecutivos. Sabendo que $\overline{BC} = \overline{CD}$ e que $\overline{AC}.\overline{BC} = 40$, determine o valor de $\overline{AD}^2 - \overline{AB}^2$.

8. ● O proprietário de uma área quer dividi-la em três lotes, conforme a figura abaixo. Determine os valores de a, b e c, em metros, sabendo-se que as laterais dos terrenos são paralelas e que $a + b + c = 240$ metros.

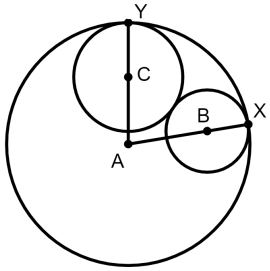


9. ● (Fuvest - SP) A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra de um bastão vertical de 1 m de altura mede $0,6$ m. Qual a altura do poste? (esse exercício lembra muito a história de como Tales de Mileto mediu a altura de algumas pirâmides do Egito, séculos antes de Cristo. Pesquise!)

10. ● (Portal do Saber OBMEP) Sejam M e N os pontos médios, respectivamente, dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, contidos numa mesma reta, de modo que $\overline{AB} = \overline{BC}$, com $A \neq C$. É sempre verdade que $\overline{MN}$ é congruente a $\overline{AB}$? Justifique.

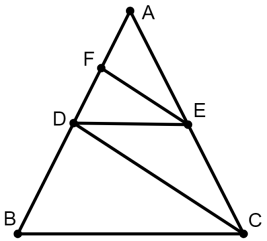
11. ● (MAθ 1987) Na figura abaixo, a circunferência de centro em B está tangenciando a circunferência de centro em A (isto

é, ambas as circunferências atravessam apenas um ponto em comum) e a circunferência de centro em C; a circunferência de centro em C está tangenciando a circunferência de centro em A e a circunferência de centro em B. Se $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 5$ e $\overline{BC} = 9$. Qual o comprimento de $\overline{AX}$?



12. ● Prove que em uma divisão harmônica com $k > 1$, temos que $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AP}} + \frac{1}{\overline{AQ}}$. Em seguida, prove que, com $k < 1$, temos $\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AP}} - \frac{1}{\overline{AQ}}$.

13. ● Na figura, $\overline{DE} // \overline{BC}$ e $\overline{CD} // \overline{EF}$. Prove que $\overline{AD}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AF}$.

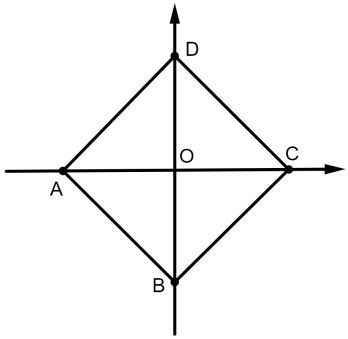


14. ● Sendo O o ponto médio de $\overline{AB}$ em uma divisão harmônica, prove que: $\overline{OA}^2 = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}$.

15. ● (UFRGS) Se um ponto P do eixo das abscissas é equidistante (está à mesma distância) dos pontos $A = (1, 4)$ e $B = (-6, 3)$, a abscissa de P vale quanto?

16. ● Sejam M e N conjugados harmônicos na razão $k > 1$ do segmento $\overline{AB} = 1$. Qual é a distância entre os divisores harmônicos de $\overline{AB}$?

17. ● Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado 7 cm. Obtenha as coordenadas dos quatro vértices (quatro cantos) do quadrado.



18. ● Determine x para que o ponto $P = (x, 2x + 3)$ seja equidistante dos pontos $A = (1, 2)$ e $B = (-2, 3)$.

19. ● Seja ABC um triângulo equilátero (isto é, com todos os lados iguais) de vértices $A = (2, 0)$, $B = (8, 0)$ e $C = (5, 3\sqrt{3})$. Seja (C, r) a circunferência de raio r, que atravessa os pontos A, B e C. Calcule o valor de r e descubra as coordenadas do ponto C, centro de (C, r).

20. ● O *Teorema da Base Média* diz o seguinte: "o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo qualquer é paralelo ao terceiro lado e sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado".

    Seja o triângulo ABC, cujas coordenadas são dadas por $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, e sejam M e N os pontos médios respectivos aos lados AB e AC.

    Mostre, usando a ideia de distância geométrica no plano cartesiano, que $MN = \frac{BC}{2}$.

21. ● Usando o *Teorema de Tales*, prove o *Teorema de Menelaus*, que diz o seguinte:

    Se uma reta r intersecta os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ ou as prolongações num triângulo ABC nos pontos N, L e M, respectivamente, então $\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = 1$.

Aula 2

Ângulos

A palavra "ângulo", na antiguidade, significava dobra, canto, esquina, isto é, o encontro entre dois caminhos ou entre qualquer outra coisa, como duas paredes, dois pedaços de madeira etc. Por esse motivo, a matemática se apropriou desse nome, e assim podemos dizer que ângulo é o que é formado a partir do encontro entre duas retas.

Retas paralelas, por exemplo, quando não colineares, não possuem nenhum ângulo, elas não se encontram, não formam esquinas, cantos. Retas concorrentes, por outro lado, formam ângulos.

Assim, tomando dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (como na figura abaixo), que se intersectam no ponto O, podemos dar o nome de $D\hat{O}B$ ao ângulo referente a $\overline{OD}$ e $\overline{OB}$. Note, assim, que estamos representando o traçado que passa pelos pontos D, O e B e a dobra ($\hat{}$) formada em O.

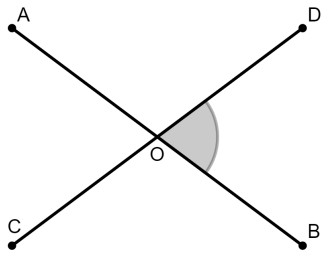


Figura 2.1: Ângulo $D\hat{O}B$.

Nota 1. O ponto O é o "*vértice*" do ângulo, enquanto que os segmentos $\overline{DO}$ e $\overline{OB}$ são os seus "*lados*".

Exercício de Fixação 2.1. Na figura acima, há apenas o ângulo $D\hat{O}B$? Se não, quais os demais ângulos da figura?

Bom, agora que conseguimos entender como se formam os ângulos, vamos conhecer suas classificações e propriedades.

2.1 Ângulos Consecutivos, Adjacentes e Opostos pelo Vértice

2.1.1 Ângulos Consecutivos

Podemos nomear ângulos de acordo com a sua relação com outros ângulos. Assim, no caso de dois ângulos compartilharem de um mesmo lado, chamamo-los "ângulos consecutivos".

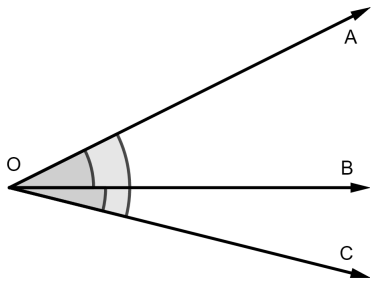


Figura 2.2: Ângulos Consecutivos.

Exercício de Fixação 2.2. Na figura, podemos ver os ângulos $A\hat{O}B$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$, quais deles são consecutivos uns com os outros? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 2.1. Se pudermos somar dois ângulos, qual o resultado da soma $A\hat{O}B + B\hat{O}C$?

2.1.2 Ângulos Adjacentes

Dois ângulos consecutivos são adjacentes se não estão um dentro do outro. No caso da figura anterior, temos que $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes.

Exercício de Fixação 2.3. Desenhe os ângulos $T\hat{O}H$ e $T\hat{O}J$ de duas formas distintas: na primeira, eles deverão ser apenas consecutivos; e, na outra, adjacentes.

2.1.3 Ângulos Opostos pelo Vértice

Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro. Veja, na figura a seguir: $A\hat{O}C$ é oposto a $D\hat{O}B$.

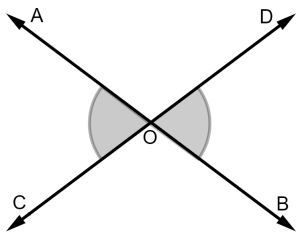


Figura 2.3: Ângulos Opostos pelo Vértice.

Note que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são opostas e $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ também o são.

Exercício de Fixação 2.4. $A\hat{O}D$ e $C\hat{O}B$ são opostos? Explique a sua resposta utilizando a definição de ângulos opostos.

2.2 Congruência de Ângulos

Uma relação entre ângulos é dita "congruência" (símbolo: $\equiv$) se as seguintes propriedades são satisfeitas:

i *Reflexividade.* Todo ângulo é congruente a si mesmo: $A\hat{O}B \equiv A\hat{O}B$ (diz-se: $A\hat{O}B$ é congruente a $A\hat{O}B$).

ii *Simetria.* Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$, então $C\hat{O}D \equiv A\hat{O}B$.

iii *Transitividade.* Se $A\hat{O}B \equiv C\hat{O}D$ e $C\hat{O}D \equiv E\hat{O}F$, então $A\hat{O}B \equiv E\hat{O}F$.

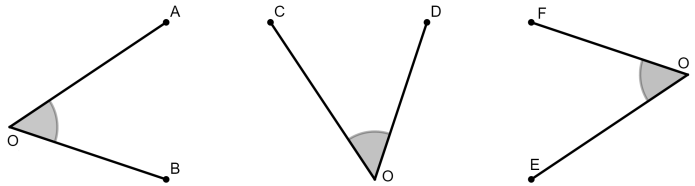


Figura 2.4: Congruência de Ângulos.

Exercício de Fixação 2.5. Ângulos opostos são congruentes? Por quê?

2.3 Adição de Ângulos

Se a semirreta $\overrightarrow{OB}$ for interna ao ângulo $A\hat{O}C$, dizemos que $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C$.

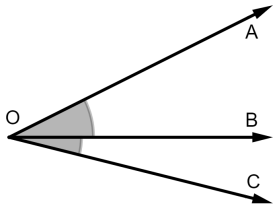


Figura 2.5: Adição de Ângulos.

Nota 2.

A exemplo do que vimos na aula anterior (em adição de segmentos), podemos também usar a ideia de congruência para somar ângulos.

Nota 3. Dado um ângulo $X\hat{O}Y$ que é a soma de n vezes um ângulo qualquer $A\hat{O}B$, dizemos que $X\hat{O}Y$ é um múltiplo de $A\hat{O}B$, de modo que podemos escrevê-lo $n(A\hat{O}B)$.

2.4 Bissetriz de um Ângulo

Uma semirreta $\overrightarrow{OB}$ interna ao ângulo $A\hat{O}C$ pode ser chamada de "bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$", se $A\hat{O}B \equiv B\hat{O}C$.

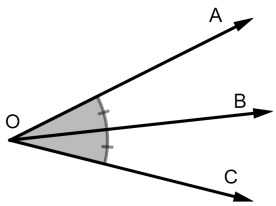
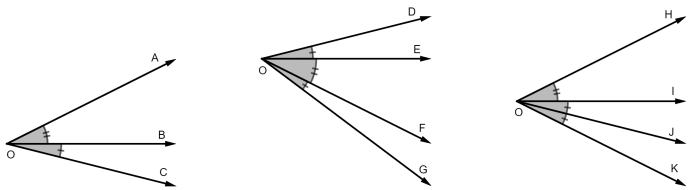


Figura 2.6: Bissetriz de um Ângulo.

Nota 4. Na figura acima, cada um dos arcos que representam os ângulos tem um pequeno traço perpendicular, isso quer dizer que eles são congruentes. Arcos com a mesma quantidade de traços indicam ângulos congruentes. Mas, atenção, esse caso vale apenas para ângulos da mesma figura!

Exercício de Fixação 2.6. Quais dos ângulos a seguir são congruentes?



Exercício de Fixação 2.7. Nas figuras do exercício anterior, há alguma bissetriz? Qual?

Exercício 2.1. Seja $\overrightarrow{OY}$ uma semirreta interna ao ângulo $A\hat{O}B$. Se $A\hat{O}Y \equiv C\hat{O}D$ e $C\hat{O}D \equiv Y\hat{O}B$, podemos dizer que $\overrightarrow{OY}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$? Por quê?

Exercício Resolvido 2.4.1. Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opostos pelo vértice são semirretas opostas.

Solução. Sejam $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ as bissetrizes dos ângulos opostos pelo vértice $A\hat{O}B = \alpha$ e $C\hat{O}D$ (faça a figura, para que visualize melhor a solução), com $D\hat{O}A = \gamma$. Então, por um lado, temos $X\hat{O}A + A\hat{O}D + D\hat{O}Y = \frac{\alpha}{e} + \gamma + \frac{\alpha}{2} = \alpha + \gamma$. Por outro lado, temos que $2\alpha + 2\gamma = 360°$, de forma que $\alpha + \gamma = 180°$. Então, $X\hat{O}Y$ é um ângulo raso - e $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são, realmente, semirretas opostas. $\square$

2.5 Medição de Ângulos

Tome dois segmentos de reta do mesmo tamanho, $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, tal que uma das suas extremidades (neste caso, o ponto O) seja o vértice do ângulo $A\hat{O}B$. Seja, agora, (O, r) a circunferência centrada em O e de raio $\overline{OA}$ (isto é, $r = \overline{OA}$). Assim, podemos dizer que o ângulo $A\hat{O}B$ é o arco de extremidades A e B que pertence à (O, r). A rigor, todos os ângulos podem ser considerados arcos, de modo que podemos estabelecer a sua medida a partir da ideia de frações da circunferência.

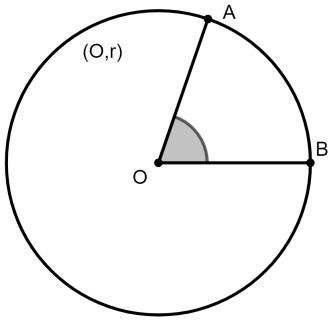


Figura 2.7: Ângulo $A\hat{O}B$ como fração de (O, r).

Nota 5. Ângulos congruentes têm a mesma medida.

2.5.1 Graus

Por convenção, costumamos dizer que um círculo (ou a abertura da sua circunferência) tem 360° (diz-se: 360 graus). Ou seja, se abrirmos o ângulo $A\hat{O}B$, mantendo fixa $\overrightarrow{OA}$, até que B complete uma volta ao redor de O, teremos percorrido 360°.

Assim, se o ângulo α é um arco que representa $\frac{1}{4}$ do círculo, temos que a sua medida é de 90°.

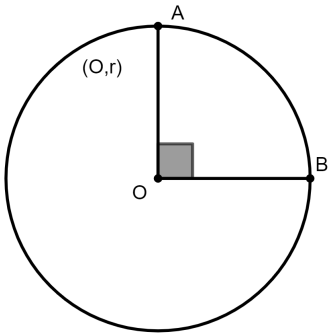
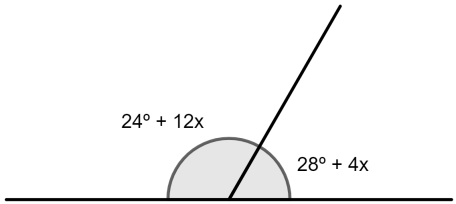


Figura 2.8: Ângulo de 90°.

Nota 6. Costumamos representar os ângulos de 90° graus com um quadrado, ao invés de um arco.

Exercício de Fixação 2.8. Dadas as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, desenhe $A\hat{O}B = 180°$. Que figura geométrica teremos traçado entre os pontos A e B?

Exercício 2.2. Determine o valor de x.



Nota 7. Observe, agora, que podemos somar ângulos da seguinte maneira: se $A\hat{O}B = 35°$ e $B\hat{O}C = 45°$ são adjacentes, então $A\hat{O}B + B\hat{O}C = 35° + 45° = 80°$.

Nem sempre, porém, conseguimos um corte perfeito em termos de graus, de modo que é necessário estabelecer uma medida para porções ainda menores de ângulos (tal como os milímetros o são para os centímetros). Essas porções menores são chamadas de "minutos" e "segundos". Um grau (1°) equivale a sessenta minutos e um minuto equivale a sessenta segundos ($0,5°$, por exemplo, vale 30 minutos).

Representamos os minutos com o símbolo $'$; e os segundos com $''$. Ou seja, um ângulo de 10 graus, 20 minutos e 30 segundos pode ser escrito da seguinte maneira: $10°20'30''$.

Exercício de Fixação 2.9. Quanto é $11°55'13'' + 25°10'24''$?

2.5.2 Radianos

Outra medida para ângulos é o que chamamos de "radianos". Tal como dizemos que um círculo tem 360°, podemos também afirmar que ele tem 2π radianos. Assim, $\frac{360°}{2\pi} = 1$.

Exercício de Fixação 2.10. Escreva os seguintes ângulos em radianos: 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 185°, 270° e 300°.

2.6 Ângulos Agudo, Reto, Obtuso, Raso, Convexo e Côncavo

O *ângulo agudo* é um ângulo menor do que 90°. Se α é um ângulo agudo, então $0 < \alpha < 90°$.

O *ângulo reto* é um ângulo com exatamente 90°.

O *ângulo obtuso* é um ângulo (α) com medida entre 90° e 180°, isto é, $90° < \alpha < 180°$.

O *ângulo raso* é um ângulo com medida 0° ou 180°.

O *ângulo convexo* é um ângulo (α) com medida entre 0° e 180°, isto é, $0° < \alpha < 180°$.

O *ângulo côncavo* é um ângulo (α) com medida entre 180° e 360°, isto é, $180° < \alpha < 360°$.

Exercício de Fixação 2.11. Faça desenhos representando cada um dos ângulos acima.

2.7 Ângulos Complementares e Suplementares

Dois ângulos são *complementares* se a soma das suas medidas resulta em 90°.

Dois ângulos são *suplementares* se a soma das suas medidas resulta em 180°.

2.8 Retas Paralelas cortadas por uma Transversal.

Dadas duas retas paralelas e não colineares, r e s. Se as atravessarmos com uma reta transversal, t, obteremos oito ângulos, como mostra a figura abaixo. Esses ângulos serão suplementares ou congruentes.

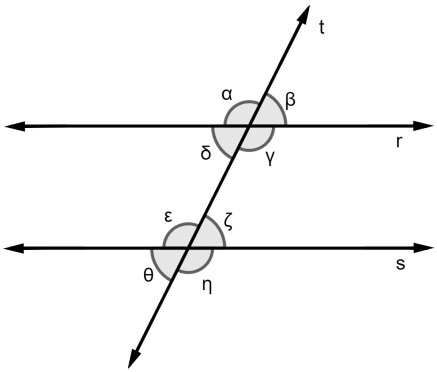


Figura 2.9: Retas Paralelas cortadas por uma Transversal

Daí, obtemos as relações nomeadas a seguir:

2.8.1 Ângulos Correspondentes

São ângulos que ocupam a mesma posição em retas distintas. No caso descrito acima, os ângulos correspondentes são congruentes. Desse modo: $\alpha \equiv \epsilon$; $\beta \equiv \zeta$; $\gamma \equiv \eta$; $\delta \equiv \theta$.

2.8.2 Ângulos Alternos Internos

Observe que o nome desses ângulos já indica a posição por eles ocupada. A palavra "interno" diz que esses ângulos estão no interior de $r//s$; e a palavra "alterno" nos diz que eles aparecem em posições alternadas com relação à reta t.

Os ângulos alternos internos são congruentes. Assim, na acima, temos que $\delta \equiv \zeta$ e $\gamma \equiv \epsilon$.

Exercício de Fixação 2.12. Se os ângulos $\alpha = (2x + 10)^\circ$ e $\beta = (4x - 30)^\circ$ são alternos internos, qual o valor de x?

2.8.3 Ângulos Alternos Externos

Esses ângulos estão no exterior de $r//s$ e, ao mesmo tempo, estão em lados opostos da reta t.

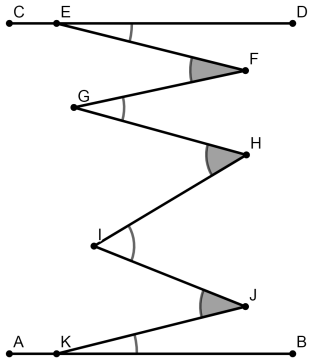
Os ângulos alternos externos também são congruentes. Desse modo, temos que, na figura acima: $\beta \equiv \theta$ e $\alpha \equiv \eta$.

Exercício de Aprofundamento 2.2. Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180 graus (usaremos essa propriedade para resolver alguns dos problemas abaixo).

Exercício de Aprofundamento 2.3. Qual a medida dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados?
Dica: calcule a quantidade de triângulos que podemos traçar a partir da conexão de um dos vértices do polígono com os demais.

Exercício 2.3. (OMM 2009) $ABGH$ é um quadrado no exterior do hexágono regular $ABCDEF$. Quanto mede o ângulo $H\hat{F}A$?

Exercício 2.4. Na figura abaixo, onde $\overline{AB}//\overline{CD}$, mostre que a soma dos ângulos brancos é igual à soma das medidas dos ângulos cinzas. Tal resultado vale para qualquer quantidade de "bicos" no desenho e o chamamos popularmente de "Teorema dos Bicos".

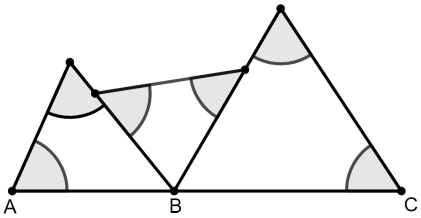


Problemas Propostos

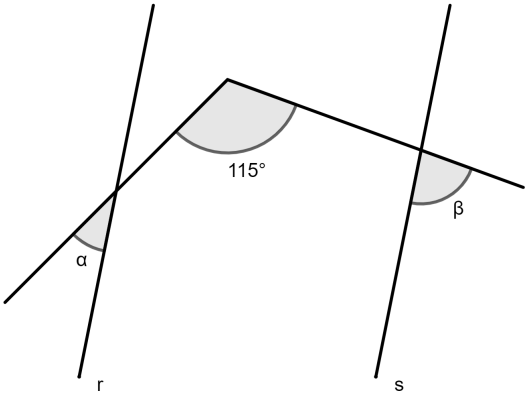
1. ● (OBMEP 2006) Uma tira de papel retangular é dobrada ao longo da linha tracejada, conforme indicado, formando a figura plana da direita. Qual a medida do ângulo x?

2. ● Qual é o ângulo que excede o seu complemento em 76°?

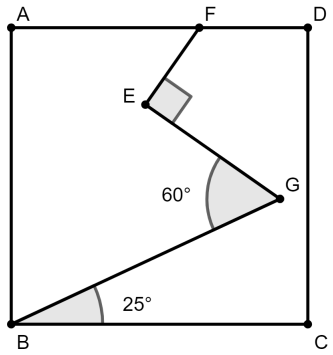
3. ● (OBMEP 2014) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em cinza?



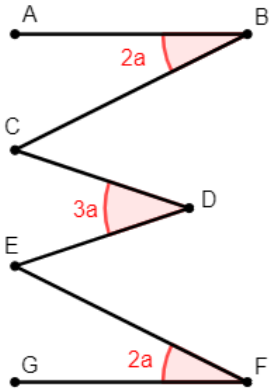
4. ● Considere $r//s$, determine $\alpha + \beta$.



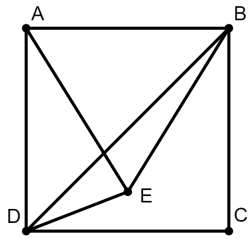
5. ● Determine $A\hat{F}E$, sabendo que ABCD é um quadrado (ou seja, cada um dos seus ângulos internos possui 90 graus).



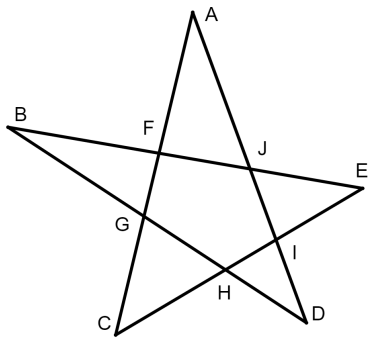
6. ● Sejam $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{GF}$ e $B\hat{C}D + D\hat{E}F = 84°$. Qual é o valor de a?



7. ● (OMM 2005) Observe a figura abaixo. Qual é o valor do ângulo $B\hat{D}E$, sabendo que $ABCD$ é um quadrado e ABE é um triângulo equilátero (que possui todos os lados iguais)?

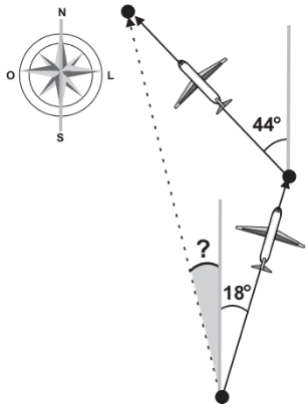


8. ● (OMM 2007 - Adaptada) Na estrela $ABCDE$, sabemos que $G\hat{B}F = 20°$, $G\hat{H}I = 130°$ e $G\hat{F}J = 100°$. Qual o valor de $G\hat{C}H$?

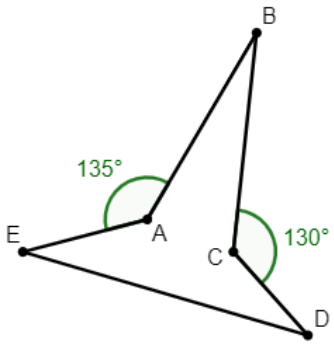


9. ● Em um triângulo, o maior entre dois lados quaisquer é o lado oposto ao ângulo maior. Ou seja, no triângulo ABC, temos $\overline{AB} > \overline{AC}$, então $A\hat{C}B > A\hat{B}C$ e vice-versa. A partir disso, prove que, se $\overline{AB} = \overline{AC}$, então os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são iguais.

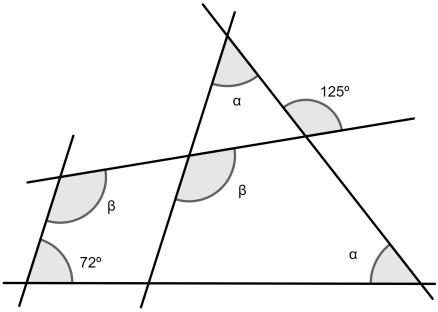
10. ● (OBMEP 2009) A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?



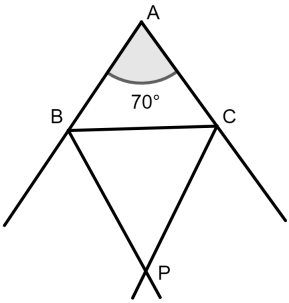
11. ● (Simulado POTI/UFPR - 2021) Sabendo que $E\hat{A}B = 135°$ e $B\hat{C}D = 130°$, encontre o valor da soma $A\hat{B}C + C\hat{D}E + D\hat{E}A$.



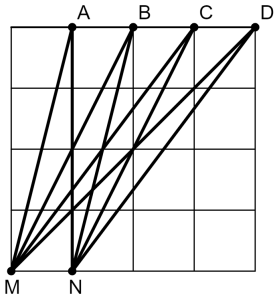
12. ● (OMM 2019) Na seguinte figura, algumas medidas de ângulos são mostradas. Diga: qual é o valor β?



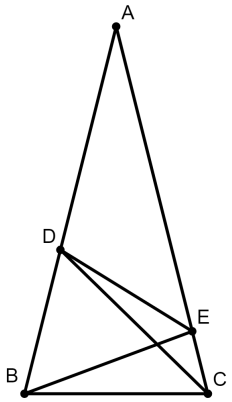
13. ● Na figura abaixo, P é interseção das bissetrizes externas em B e C. Calcule a medida do ângulo $B\hat{P}C$, sabendo que a medida ângulo $\hat{A}$ é 70 graus.



14. ● Encontre o resultado da soma dos ângulos $M\hat{A}N + M\hat{B}N + M\hat{C}N + M\hat{D}N$.

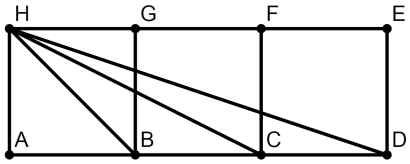


15. ● Seja a figura abaixo e considere: $AB = AC$, $D\hat{B}E = 60°$, $B\hat{C}D = 50°$ e $E\hat{C}D = 30°$. Determine a medida do ângulo $B\hat{E}D$.

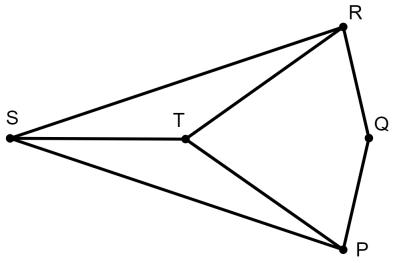


16. ● Dois espelhos formam um ângulo de 30 graus. Um raio de luz entra nesse ângulo paralelo a um dos lados e é refletido pelos lados de acordo com a lei usual que diz que o "ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão". Quantas vezes ele vai ser refletido nos espelhos antes de sair?

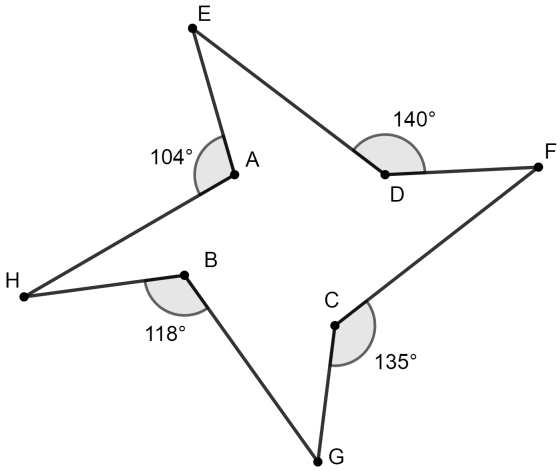
17. ● Na figura abaixo, $ABGH$, $BCFG$ e $CDEF$ são quadrados iguais. Determine a soma $A\hat{B}H + A\hat{C}H + A\hat{D}H$.



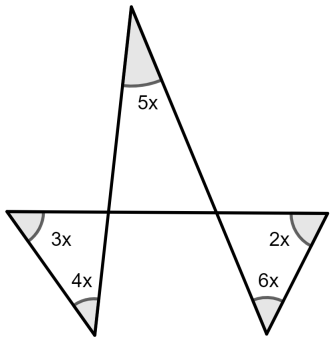
18. ● (OMA 2019) Na figura, $PQ = QR$, $PT = ST = RT$, $R\hat{T}P = 70°$ e $S\hat{R}Q = S\hat{P}Q = 80°$. Quanto mede $R\hat{Q}P$?



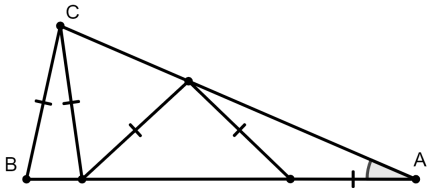
19. ● (Simulado POTI/UFPR - 2021) Seja a figura abaixo e considere: $E\hat{D}F = 140°$, $F\hat{C}G = 135°$, $G\hat{B}H = 118°$ e $H\hat{A}E = 104°$. Determine o valor da soma $A\hat{E}D + D\hat{F}C + C\hat{G}B + B\hat{H}A$.



20. ● (OBM) Na figura, quanto vale x?



21. ● (OBMEP 2009) No triângulo ABC, temos $AB = AC$ e os cinco segmentos marcados têm todos a mesma medida. Qual é a medida do ângulo $B\hat{A}C$?

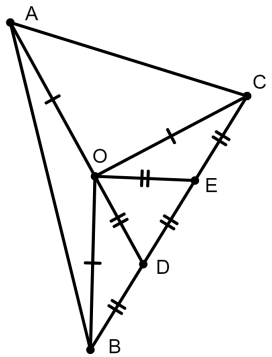


22. ● (OMERJ 2015) Sejam $ABCD$ um quadrado e CDE e BFG triângulos equiláteros todos com o mesmo lado, tais que A, B e F são colineares, com B entre A e F, e CDE é exterior ao quadrado.

    a. Prove que $DBGE$ é um paralelogramo.

    b. Calcule os ângulos do triângulo ECG.

23. ● (OBMEP 2019) Na figura, $OA = OB = OC$. Os pontos A, O e D estão alinhados, e os pontos D e E no segmento BC são tais que $BD = DE = EC = OD = OE$.

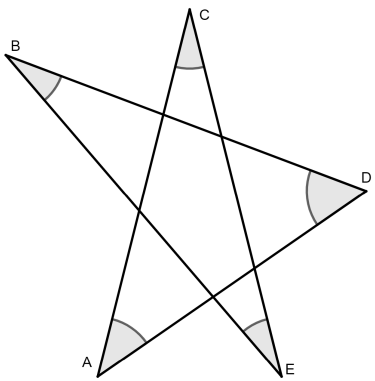


a. Calcule a medida do ângulo $O\hat{D}E$.

b. Calcule a medida do ângulo $B\hat{O}E$.

c. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

24. ● Prove que a soma dos ângulos nos vértices de uma estrela com cinco pontas é igual a 180 graus.



25. ● Sejam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ duas retas que se intersectam em um ponto O. Sejam $\overrightarrow{OP}$ a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, $\overrightarrow{OT}$ a bissetriz do ângulo $P\hat{O}B$ e $\overrightarrow{OR}$ a bissetriz do ângulo $T\hat{O}D$. Se $P\hat{O}R = 25^o$, encontre o valor de $A\hat{O}C$ e $A\hat{O}D$.

Aula 3

Triângulos

Triângulos são figuras geométricas planas formadas pela intersecção, em três pontos distintos, de três retas concorrentes.

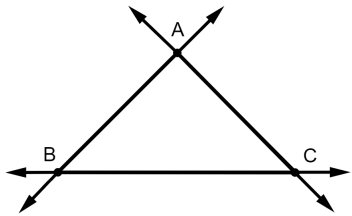


Figura 3.1: Triângulo $\triangle ABC$.

Definição 3.1. Mais especificamente, dados três pontos, A, B e C, não colineares, damos o nome de "triângulo" à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ - e a denotamos por $\triangle ABC$.

Nota 1. Os triângulos pertencem à classe de figuras geométricas chamada "polígonos", que é a classe que reúne figuras planas e fechadas, constituídas por segmentos de reta. A palavra "polígono" significa, literalmente, "muitos ângulos", pois a reunião dos segmentos de reta que compõe os seus elementos acaba por gerá-los.

3.1 Elementos do Triângulo

i. *Vértices*: os pontos A, B e C são os vértices de $\triangle ABC$.

ii. *Lados*: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados de $\triangle ABC$.

iii. *Ângulos Internos*: os ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ são os ângulos internos de $\triangle ABC$.

iv. *Ângulos Externos*: são os ângulos formados a partir do encontro entre o prolongamento de um dos lados do triângulo com um lado adjacente. Se tomarmos, por exemplo, a semirreta $\overrightarrow{BC}$ que atravessa o ponto D fora de $\overline{BC}$, $A\hat{C}D$ é um dos ângulos externos de $\triangle ABC$.

Exercício de Fixação 3.1. Faça um desenho de todos os ângulos externos de $\triangle ABC$ e os nomeie.

3.1.1 Ângulos Internos e Externos

Como vimos na aula anterior, a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Daí, obtemos o seguinte:

Teorema 3.1. Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

Tente você mesmo demonstrar esse teorema! (lembre-se de que o ângulo externo é igual a 180° menos o ângulo adjacente e que o ângulo adjacente é igual a 180° menos os dois ângulos não adjacentes)

3.2 Classificação dos Triângulos

3.2.1 Quanto aos Lados

i. *Equilátero*: triângulo com três lados congruentes.

ii. *Isósceles*: triângulo com exatamente dois lados congruentes.

iii. *Escaleno*: triângulo com lados não congruentes uns aos outros.

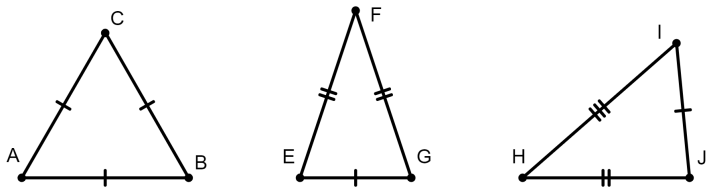
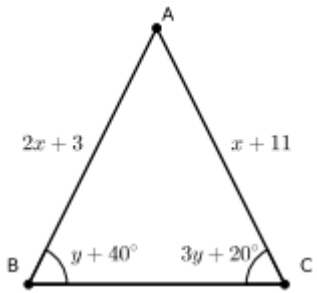


Figura 3.2: Triângulos equilátero, isósceles e escaleno, respectivamente.

Exercício 3.1. No desenho abaixo, o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles com base $\overline{BC}$. Determine os valores de x e y.



3.2.2 Quanto aos Ângulos

i. *Retângulo*: triângulo com um ângulo reto.

ii. *Acutângulo*: triângulo com todos os ângulos agudos.

iii. *Obtusângulo*: triângulo com um dos seus ângulos obtuso.

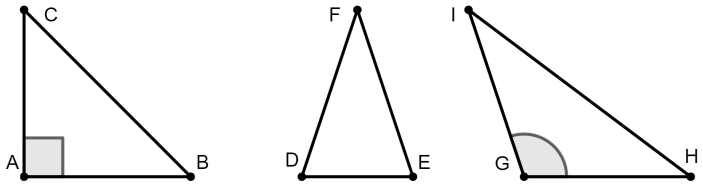


Figura 3.3: Da esquerda para a direita: triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo.

Nota 2. Damos o nome de "hipotenusa" ao lado oposto ao ângulo reto do triângulo retângulo. Aos demais lados desse tipo de triângulo, "catetos".

3.3 Congruência de Triângulos

Um triângulo é congruente (símbolo: $\equiv$) a outro se pudermos relacionar seus vértices de modo a que:

i. seus lados sejam congruentes aos lados do outro, ordenadamente;

ii. seus ângulos sejam congruentes aos ângulos do outro, ordenadamente.

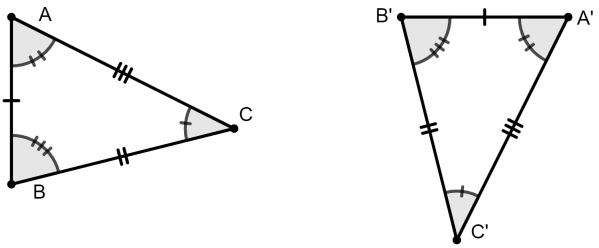


Figura 3.4: Congruência de Triângulos.

Nota 3. Como nos casos anteriores (de segmentos de reta e ângulos), a congruência entre triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.

3.3.1 Casos de Congruência

Existem algumas condições básicas que nos permitem avaliar se dois triângulos são congruentes, sem que precisemos verificar se cada ângulo e cada lado de um triângulo é congruente ao do outro. A essas condições básicas damos o nome de "casos de congruência".

Caso Lado-Ângulo-Lado (LAL)

Se dois triângulos têm dois lados congruentes e os ângulos formados por esses lados também o são, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.2. Usando o caso LAL, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Exercício 3.2. Prove, usando LAL, o seguinte teorema: "se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes (teorema do triângulo isósceles)".

Caso Ângulo-Lado-Ângulo (ALA)

Se dois triângulos têm um lado congruente e os ângulos adjacentes a esse lado também o são, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.3. Usando o caso ALA, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Exercício 3.3. Prove, usando ALA, a recíproca do teorema do triângulo isósceles: "se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então ele é isóceles".

Caso Lado-Lado-Lado (LLL)

Se dois triângulos têm os três lados congruentes, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.4. Usando o caso LLL, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Caso Lado-Ângulo-Ângulo-oposto ($\mathbf{LAA_O}$)

Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado congruentes, então os triângulos são congruentes.

Exercício de Fixação 3.5. Usando o caso $\mathrm{LAA_O}$, escreva as possibilidades de se garantir a congruência entre os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle A'B'C'$ da Figura 3.4.

Caso de Congruência de Triângulos Retângulos

Se dois triângulos retângulos têm as hipotenusas e um cateto congruentes, então os triângulos são congruentes.

3.4 Mediana de um Triângulo

Mediana é o segmento que parte de um dos vértices do triângulo e encontra o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

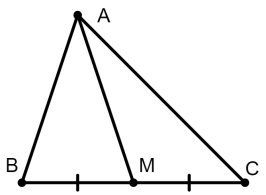
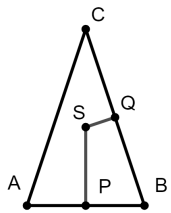


Figura 3.5: Mediana $\overline{AM}$ relativa ao vértice A e ao lado $\overline{BC}$.

Nota 4. À reta perpendicular a $\overline{BC}$ que passa por M, extremidade da mediana $\overline{AM}$, damos o nome de "mediatriz".

Exercício de Aprofundamento 3.1. Prove o seguinte teorema: "um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer um dos ângulo internos não adjacentes" (Teorema do Ângulo Externo).

Exercício 3.4. Em um triângulo isósceles $\triangle ABC$ de base $\overline{AB}$, o ângulo $A\hat{B}C$ é igual a $\frac{2}{3}$ de $P\hat{S}Q$, formado pelas mediatrizes $\overline{QS}$ e $\overline{PS}$. Calcule os ângulos desse triângulo.



Exercício 3.5. Mostre que a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa.

3.5 Bissetriz Interna de um Triângulo

A *Bissetriz Interna de um Triângulo* é o segmento que parte de um dos vértices do triângulo dividindo o ângulo desse vértice em dois ângulos congruentes e encontra o seu lado oposto.

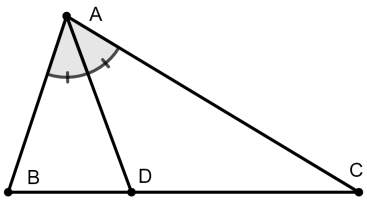


Figura 3.6: Bissetriz $\overline{AD}$ relativa ao vértice A e ao lado $\overline{BC}$.

Teorema 3.2. Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer (como o da figura acima). Se a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$ intersecta o lado $\overline{BC}$ no ponto D, então D divide o lado $\overline{BC}$ em dois segmentos proporcionais aos outros dois lados, isto é, $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$.

Nota 5. A Bissetriz Externa de um Triângulo é a bissetriz de um dos ângulos suplementares aos ângulos internos do triângulo.

Exercício 3.6. As bissetrizes internas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ de um triângulo $\triangle ABC$ formam um ângulo de $103°$. Determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

Exercício 3.7. Determine a medida do menor ângulo formado pelas bissetrizes externas relativas aos vértices B e C (e às semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, respectivamente) de um triângulo $\triangle ABC$, sabendo que $B\hat{A}C = 76°$.

Exercício 3.8. Dado o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{AD}$ bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BD} = 2$ e $\overline{DC} = 3$. Qual o valor de $\overline{BA}$?

3.6 Altura de um Triângulo

A *altura de um triângulo* é um segmento de reta perpendicular a um dos lados do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado desde o vértice oposto. Esse lado é chamado de "base da altura", e o ponto onde a altura encontra a base é comumente chamado de "pé da altura".

Notação 1. Costumamos representar a altura com a letra h.

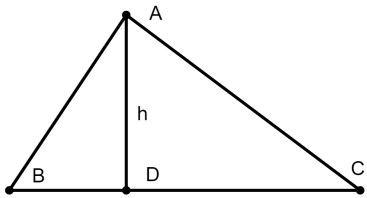


Figura 3.7: Altura h.

Exercício 3.9. As bissetrizes internas dos ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ de um triângulo $\triangle ABC$ formam um ângulo de $116°$. Determine a medida do menor ângulo formado pelas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ desse triângulo.

3.7 Desigualdade Triangular

Questão Introdutória 1. Seria possível os lados de um triângulo medirem 4, 6 e 8 centímetros? Justifique a sua resposta.

Antes de enunciarmos o que é a chamada "desigualdade triangular", devemos anotar dois teoremas, pois nos ajudarão a entendê-la.

Teorema 3.3. Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Teorema 3.4. Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado.

Agora, enunciemos o proposto.

Teorema 3.5 (Desigualdade Triangular)**.** Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Ou seja, dado um triângulo $\triangle ABC$, então $\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}$.

Demonstração. Consideremos um Ponto K na semirreta oposta à semirreta $\overrightarrow{AC}$, tal que:

$$\overline{AK} \equiv \overline{AB}. \tag{3.1}$$

Assim,

$$\overline{KC} = \overline{AC} + \overline{AK} \Longrightarrow \overline{KC} = \overline{AC} + \overline{AB}. \tag{3.2}$$

De (3.1), segue que $\triangle ABK$ é isósceles de base $\overline{BK}$ (isto é, $A\hat{K}B \equiv A\hat{B}K$) e A é interno a $C\hat{B}K$ (isto é, $C\hat{B}K > A\hat{B}K$). Então,

$$C\hat{B}K < A\hat{K}B \equiv C\hat{K}B. \tag{3.3}$$

No triângulo $\triangle BCK$, com (3.3) e os teoremas anteriores, temos $\overline{BC} < \overline{KC}$; e, com (3.2),

$$\overline{BC} < \overline{AC} + \overline{AB}.$$

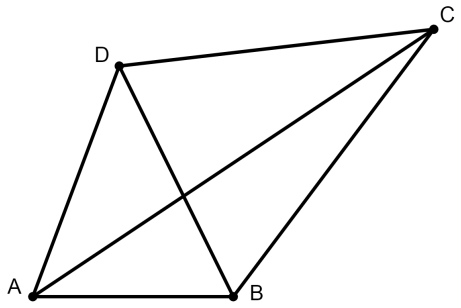
■

Exercício de Fixação 3.6. Sem repeti-los, quantos triângulos poderiam ser montados com os comprimentos a seguir: 2, 4, 5, 10, 6, 1 e 17?

Exercício de Fixação 3.7. O triângulo $\triangle ABC$ tem os lados $\overline{AB} = 11,8$ e $\overline{BC} = 14,3$. O perímetro (soma de todos os lados) do triângulo pode ser de $52,3$? Justifique.

Exercício 3.10. A distância de Leningrado a Moscou é de $660km$. De Leningrado até a cidade de Likovo são $310km$, de Likovo a Klin são $200km$ e de Klin a Moscou são $150km$. Quão longe fica Likovo de Moscou?

Exercício 3.11. (OMM 2006) O sitiante Bernardo construiu um curral com formato de um quadrilátero convexo, conforme a figura abaixo, em que $\overline{AC} = 6m$ e $\overline{BD} = 5m$. Mostre que o perímetro do curral é maior que 12 e menor que 22 metros.



3.8 Semelhança de Triângulos

O que poderiam ser triângulos semelhantes? Ter lados e ângulos com a mesma medida? Pois, se assim fosse, diríamos apenas que eles são congruentes, sem que precisássemos de outra denominação. Então, o que será que dois triângulos devem ter em comum ou de parecido para que os chamemos "semelhantes"?

Definição 3.2. Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem, de forma ordenada, os três ângulos congruentes e os lados correspondentes proporcionais.

Notação 2. Se $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ são semelhantes, escrevemos $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

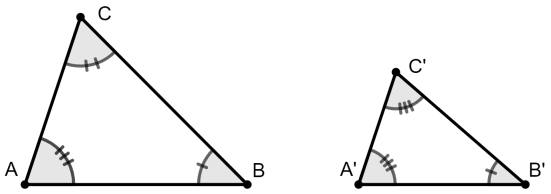


Figura 3.8: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Assim, como $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, então $C\hat{A}B \equiv C'\hat{A}'B'$, $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$, $B\hat{C}A \equiv B'\hat{C}'A'$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = k$, com $k \in \mathbb{R}$ (k é normalmente chamado de "razão de semelhança dos triângulos").

Nota 6. Se $k = 1$, então os triângulos são congruentes.

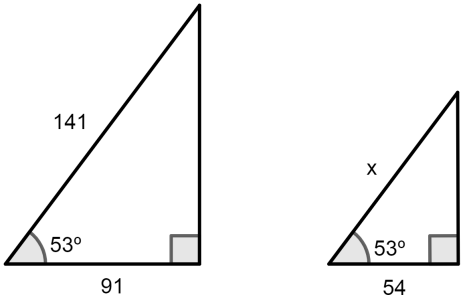
Mas será que é preciso conhecer todos os lados e ângulos de dois triângulos para que possamos dizer que eles são semelhantes? Exploremos essa questão formulando ainda outras:

Exercício de Aprofundamento 3.2. Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, eles são semelhantes? Por quê?

Exercício de Aprofundamento 3.3. Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados correspondentes do outro triângulo e se o ângulo entre esses lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes? Por quê?

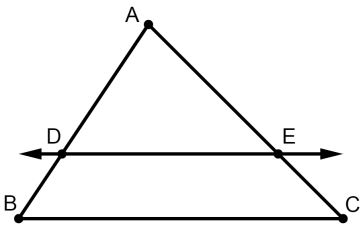
Exercício de Aprofundamento 3.4. Se dois triângulos possuem os seus lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes? Por quê?

Exercício de Fixação 3.8. Descubra o valor de x na figura a seguir.



3.9 Teorema de Tales de Mileto nos Triângulos

Questão Introdutória 2. Dado o triângulo $\triangle ABC$. Se traçarmos uma reta paralela à $\overleftrightarrow{BC}$ que cruze $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em pontos distintos, conforme a figura abaixo, podemos dizer que $\triangle ABC \sim \triangle ADE$? Você seria capaz de provar isso?

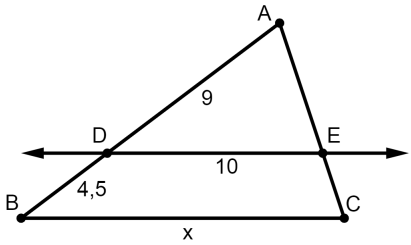


A resposta à primeira pergunta é "sim", veja o teorema abaixo. No entanto, a segunda permanece: você seria capaz de provar essa semelhança?

Teorema 3.6. Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e atravessa os demais em pontos distintos, então o triângulo formado por essa reta é semelhante àquele que fora cortado pela reta.

Desse modo, usando a figura acima: como $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$, então $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Exercício de Fixação 3.9. Sabendo que $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$, determine o valor de x na figura abaixo.



Exercício de Aprofundamento 3.5. Mostre que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é 5, então a razão entre os seus perímetros também será 5.

Exercício de Aprofundamento 3.6. Dados os triângulos semelhantes $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$. Se $\overline{AB} = 30$ e o seu correspondente $\overline{A'B'} = 60$, determine o perímetro do triângulo $\triangle ABC$, sabendo que o perímetro do triângulo $\triangle A'B'C'$ é 300.

3.10 Triângulo Retângulo

Como vimos anteriormente, um triângulo retângulo é um triângulo com um de seus ângulos medindo exatamente 90°.

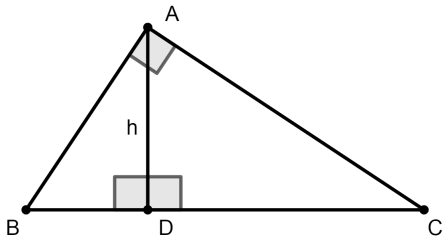
O lado oposto ao ângulo reto do triângulo retângulo é chamado de "hipotenusa" e os demais lados, "catetos".

Exercício de Fixação 3.10. Em um triângulo retângulo com lados 3, 4 e 5, quanto medem os catetos e quanto mede a hipotenusa?

Agora, vamos ver algumas características desse tipo de triângulo.

3.10.1 Semelhanças no Triângulo Retângulo

Se tomássemos um triângulo retângulo com a hipotenusa como base e traçássemos a sua altura, com D sendo o pé da altura, como na figura abaixo, poderíamos dizer que $\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$? Justifique a sua resposta.



3.10.2 Teorema de Pitágoras

Assumindo que você conseguiu justificar as semelhanças acima, podemos concluir algumas relações:

1. Como $\triangle ABC \sim \triangle DBA$, então

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} \Longrightarrow \overline{AB}^2 = \overline{BC}.\overline{BD}. \tag{3.4}$$

2. De outro modo, como $\triangle ABC \sim \triangle DAC$, então

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \Longrightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{DC}. \tag{3.5}$$

Assim, somando (3.4) e (3.5), temos:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{BD} + \overline{BC}.\overline{DC}$$

$$\Longrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}.(\overline{BD} + \overline{DC})$$

Como $\overline{BD} + \overline{DC} = \overline{BC}$, então:

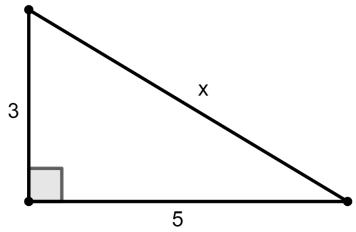
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}.\overline{BC}$$

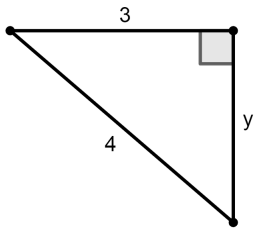
$$\Longrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

Desse modo, concluímos o seguinte:

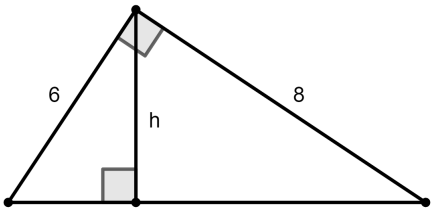
Teorema 3.7 (Teorema de Pitágoras)**.** Em um triângulo retângulo, a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Exercício de Fixação 3.11. Determine o valor de x e y nas figuras abaixo:



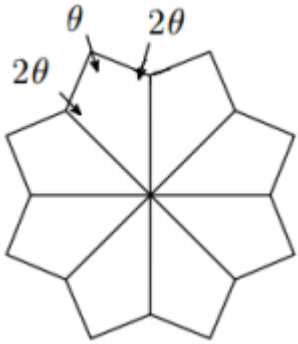


Exercício 3.12. Usando o que estudamos até aqui, determine o valor de h.



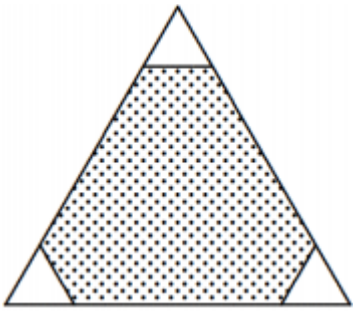
Problemas Propostos

1. ● (OPRM 2017 - Adaptada) Se oito pipas idênticas forem arranjadas conforme à figura abaixo, qual o valor do ângulo θ?

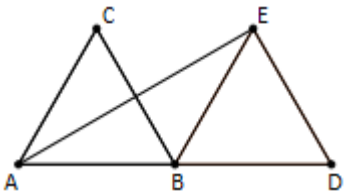


2. ● (OBM 2004) No triângulo $\triangle PQR$, a altura $\overline{PF}$ divide o lado $\overline{QR}$ em dois segmentos de medidas $\overline{QF} = 8$ e $\overline{RF} = 5$. Se $\overline{PF} = 13$, qual é a medida de $\overline{PQ}$?

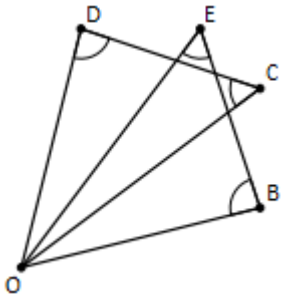
3. ● (OPRM 2017 - Adaptada) De um triângulo equilátero de perímetro 75 cm são retirados triângulos equiláteros de 5 cm de lado como mostra a figura abaixo. Quanto é o perímetro da figura resultante?



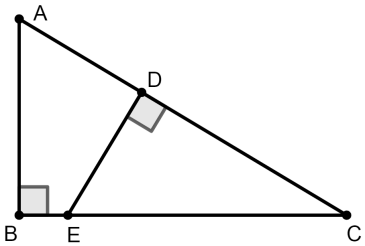
4. ● (Portal OBMEP) No desenho abaixo, os triângulos ABC e BED são equiláteros de mesmo lado. Determine o ângulo $A\hat{E}B$.



5. ● (Portal OBMEP) Na figura abaixo, $O\hat{D}C = O\hat{B}E$ e $O\hat{E}B = D\hat{C}O$. Se $DC = EB$, $D\hat{O}B = 60°$ e $OB = 5cm$, determine o comprimento de BD.

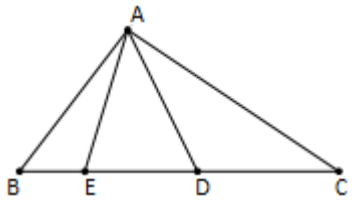


6. ● (Portal OBMEP) Sabendo que $AB = 15$, $BC = 20$, $AD = 10$ e $DC = 15$, determine a medida de DE na figura abaixo.

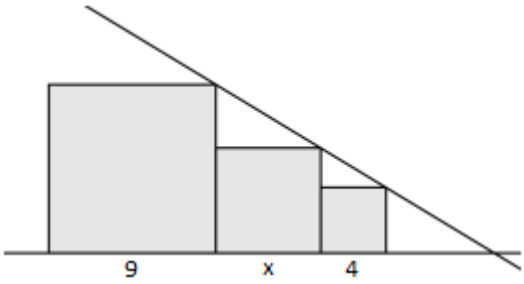


7. ● (OBM 2011) No triângulo ABC, os pontos D e E pertencem

ao lado BC e são tais que $BD = BA$ e $CE = CA$. Dado que $D\hat{A}E = 40°$, determine a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

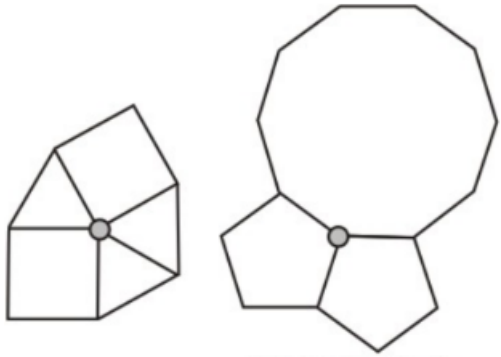


8. ● (Portal OBMEP) Determine x na figura abaixo, na qual existem três quadrados de lados 9, x e 4.



9. ● (OBM 2013 - Adaptada) Seja ABC um triângulo retângulo em A. Seja D o ponto médio de AC. Sabendo que $BD = 3DC$ e que $AC = 2$, qual a medida da hipotenusa de ABC?

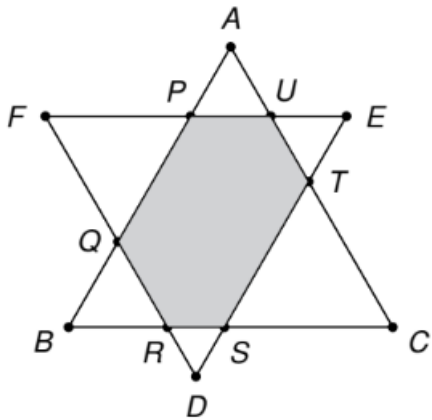
10. ● (OBMEP 2007 - adaptada) Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura, vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.



a. Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.

b. Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

11. ● (OBMEP 2006) Na figura, os triângulos ABC e DEF são equiláteros de lados 14 cm e 13 cm, respectivamente, e os lados BC e EF são paralelos.

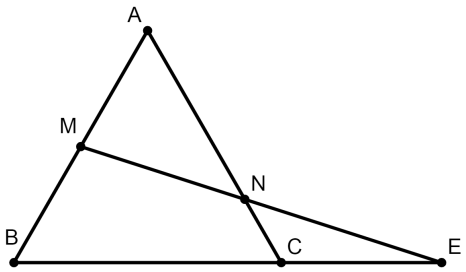


a. Calcule a medida do ângulo $E\hat{U}T$.

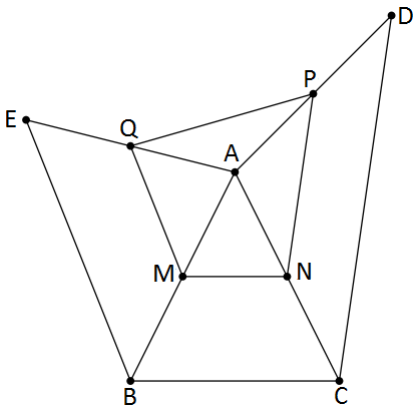
b. Calcule o perímetro do polígono $PQRSTU$.

c. Se o segmento PQ mede 6 cm, qual é a medida do segmento ST?

12. ● (OPRM 2016 - Adaptada) Na figura abaixo, o perímetro do triângulo equilátero ABC é 72 cm, M é o ponto médio de AB e $CE = 16$ cm. Quanto é a medida do segmento CN, em cm?

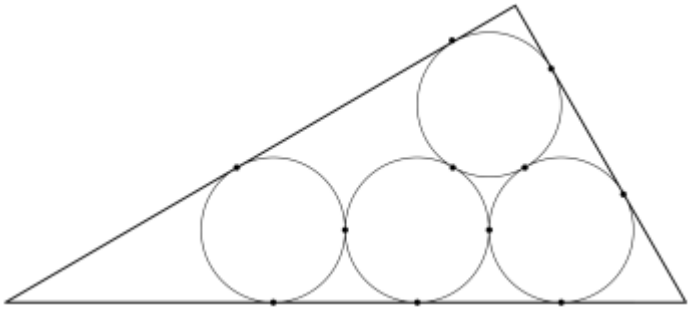


13. ● (OPRM 2019 - Adaptada) Considere $\triangle ABC$ um triângulo equilátero e M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, AC, AD e AE, respectivamente. Sabendo que $AN = 2$ cm e $CD + ED + EB = 12$ cm, calcule o perímetro do quadrilátero $MNPQ$.

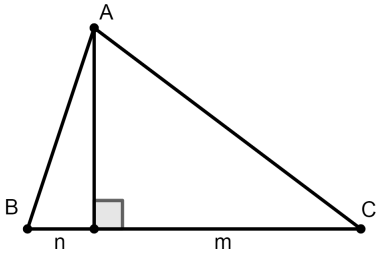


14. ● (OBMEP - Adaptada) A figura mostra quatro círculos de raio 1 cm dentro de um triângulo. Os pontos marcados são

os pontos de tangência (em que a circunferência toca outra figura). Qual é o comprimento do menor lado desse triângulo?

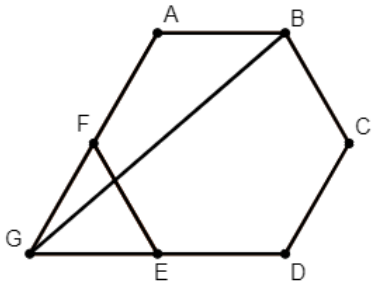


15. ● (OBMEP - Adaptada) No triângulo ABC, o comprimento dos lados AB, BC e CA, nessa ordem, sao números inteiros e consecutivos. A altura relativa a BC divide este lado em dois segmentos de comprimentos m e n, como indicado. Quanto vale $m - n$?



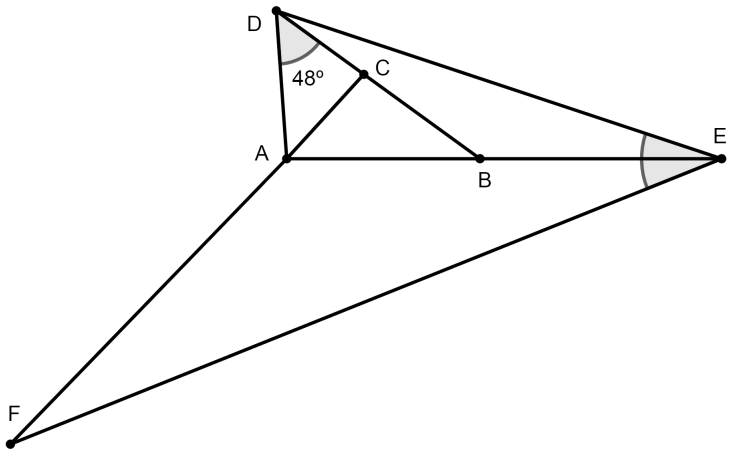
16. ● Em um triângulo ABC, foi desenhada uma reta paralela ao lado AC contendo o ponto de interseção das bissetrizes do triângulo. Esta reta intersecta os lados AB e BC nos pontos M e N, respectivamente. Prove que $MN = AM + CN$.

17. ● (Simulado POTI/UFPR - 2021) Qual o valor aproximado do segmento $\overline{GB}$, na figura abaixo, sabendo que ambos os polígonos são regulares e que $\overline{AB} = 2$.



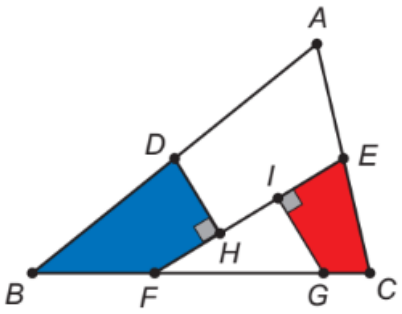
(a) 4,5
(b) 5,3
(c) 6
(d) 6,4
(e) 6,5

18. ● (OBMEP 2008) Na figura, o ângulo $A\hat{D}C$ mede 48° e os triângulos ACD, DBE e EAF são isósceles de bases AD, DE e EF, respectivamente. Quanto mede o ângulo $D\hat{E}F$?

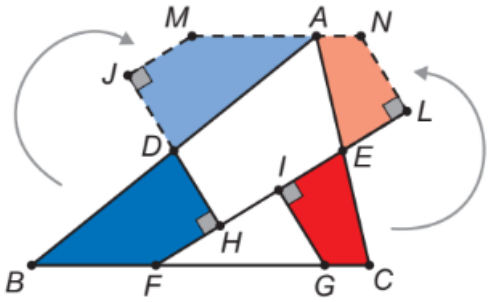


19. ● (OBMEP 2011) Em todas as figuras desta questão, vemos um triângulo ABC dividido em quatro partes; nesses triângu-

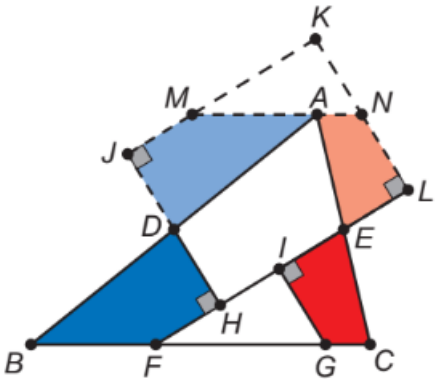
los, D é ponto médio de AB, E é ponto médio de AC e FG mede $\frac{1}{2}BC$.



a. Os quadriláteros $DJMA$ e $ELNA$ são obtidos girando de 180° os quadriláteros $DHFB$ e $EIGC$ em torno de D e E, respectivamente. Explique por que os pontos M, A e N estão alinhados, ou seja, por que a medida do ângulo MAN é igual a 180°.



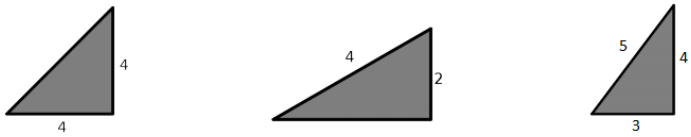
b. Na figura, o ponto K é a interseção das retas JM e LN. Explique por que os triângulos FGI e MNK são congruentes.



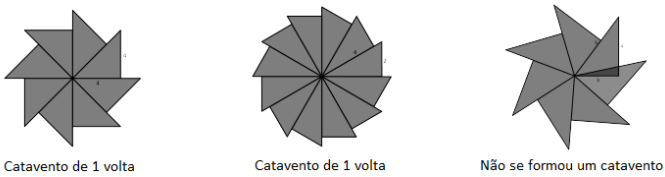
c. Os itens acima mostram que $HJKL$ é um retângulo formado com as quatro partes em que o triângulo ABC foi dividido. Mostre que $LH = EF$.

20. ● A altura de A ao lado de BC em um triângulo ABC não é menor do que o lado BC e a altura de B ao lado AC não é menor do que o lado AC. Encontre os ângulos de ABC.

21. ● (OMM 2010) Othon dispunha de triângulos retângulos de papelão de três tipos diferentes, esquematizados a seguir:

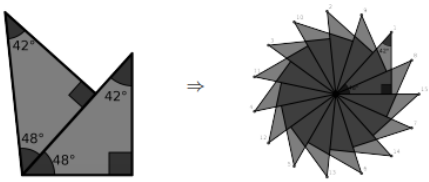


Justapondo um cateto de um triângulo à hipotenusa de outro do mesmo tipo de forma sucessiva, conforme às figuras abaixo, o primeiro e o segundo tipos formam "cataventos", enquanto o terceiro não.



a. Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que seja possível formar com ele um catavento. Aplique essa condição e verifique que os dois primeiros triângulos realmente formam cataventos. (Dica: analise o ângulo do vértice comum aos triângulos justapostos)

b. Othon percebeu que, justapondo triângulos como o abaixo, não se gerava um catavento; mas caso continuasse a justaposição após completada a primeira volta, a segunda volta terminava onde a primeira havia começado.



Encontre a condição que um triângulo retângulo deve satisfazer para que o final da p-ésima volta coincida com o início da primeira volta. Aplique essa condição e verifique que no triângulo acima isso ocorre ao final da segunda volta.

22. ● Responda as questões abaixo:

a. Cinco triângulos congruentes de papel foram colocados sobre uma mesa. Cada um deles pode ser deslocado em qualquer direção, mas não pode ser girado ou virado de modo que a face que estava para cima fique para baixo. Sempre é possível cobrir cada um desses triângulos com os outros quatro?

b. Responda a mesma pergunta, mas suponha que os triângulos são equiláteros, além de congruentes.

c. Nas condições do item anterior, sempre é possível cobrir qualquer dos triângulos com apenas três restantes?

23. ● (IMO 2016) O triângulo BCF é retângulo em B. Seja A o ponto da reta CF tal que $FA = FB$ e que F esteja entre A e C. Escolhe-se o ponto D de modo que $DA = DC$ e que AC seja bissetriz do ângulo $D\hat{A}B$. Escolhe-se o ponto E de modo que $EA = ED$ e que AD seja a bissetriz do ângulo $E\hat{A}C$. Seja M o ponto médio de CF. Seja X o ponto tal que $AMXE$ seja um paralelogramo (com $AM//EX$ e $AE//MX$). Demonstre que as retas BD, FX e ME são concorrentes.

Aula 4

Quadriláteros Notáveis

Quadriláteros, como o nome indica, são polígonos que possuem quatro lados.

Definição 4.1. Mais especificamente, dados quatro pontos, A, B, C e D, três deles não colineares, damos o nome de "quadrilátero" à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, quanto se interceptam somente nas extremidades.

Notação 1. Denotaremos o quadrilátero com vértices A, B, C e D da seguinte forma: $ABCD$.

Há dois tipos de quadriláteros: os côncavos e os convexos, conforme a figura abaixo:

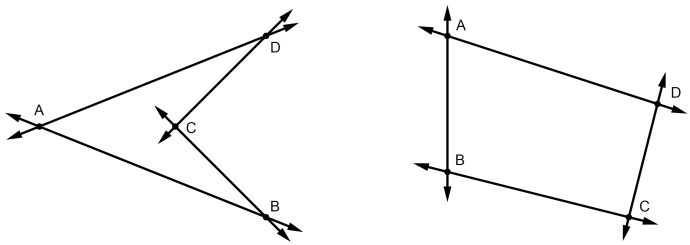


Figura 4.1: $ABCD$ côncavo (à esquerda) e $ABCD$ convexo (à direita).

Nesta aula, porém, estudaremos apenas algumas formas de quadriláteros convexos, os chamados "quadriláteros notáveis", dando atenção especial às suas propriedades.

4.1 Elementos do Quadrilátero

i. *Vértices*: os pontos A, B, C e D são os vértices de $ABCD$.

ii. *Lados*: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ são os lados de $ABCD$.

iii. *Ângulos*: os ângulos $D\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ e $C\hat{D}A$ são os ângulos de $ABCD$.

iv. *Diagonais*: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais de $ABCD$.

Exercício de Fixação 4.1. Faça um desenho de um quadrilátero convexo com suas diagonais.

Exercício 4.1. Qual a medida dos ângulos internos de um quadrilátero? Justifique a sua resposta.

4.2 Trapézio

Definição 4.2. Um trapézio é um quadrilátero convexo que possui dois lados paralelos.

Costumamos dizer que os lados paralelos são as "bases" do trapézio.

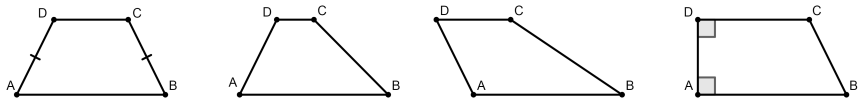
Os dois outros lados, por sua vez, não sendo base, poderão não ser paralelos, de modo que, de acordo com a sua forma, podemos classificar os trapézios:

i. *Trapézio Isósceles*: quando esses lados são congruentes.

ii. *Trapézio Escaleno*: quando esses lados não são congruentes.

iii. *Trapézio Retângulo*: quando um desses lados for perpendicular às bases, formando ângulos de $90°$.

Exercício de Fixação 4.2. Classifique os trapézios da figura abaixo conforme a descrição anterior.



Exercício de Aprofundamento 4.1. Prove que em todo trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ temos o seguinte resultado:

$$D\hat{A}B + A\hat{D}C = A\hat{B}C + B\hat{C}D = 180^\circ$$

4.2.1 Trapézio Isósceles

Exercício de Aprofundamento 4.2. Mostre que os ângulos de cada base de um trapézio isósceles são congruentes.

Teorema 4.1. As diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

Tente você mesmo provar o teorema acima, usando os resultados obtidos nos exercícios anteriores.

4.3 Paralelogramo

Definição 4.3. Um quadrilátero convexo cujos lados opostos são paralelos é um paralelogramo.

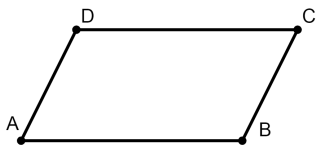
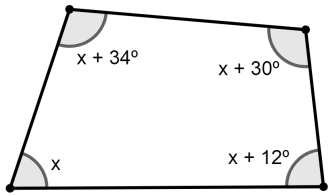


Figura 4.2: Paralelogramo $ABCD$.

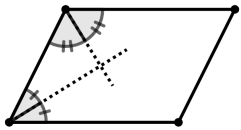
Exercício de Aprofundamento 4.3. Mostre que em todo paralelogramo dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.

Exercício de Fixação 4.3. Em um paralelogramo $ABCD$, o ângulo $D\hat{A}B$ mede $53°$. Determine os outros três ângulos desse paralelogramo.

Exercício de Fixação 4.4. Determine o valor de x na figura abaixo:



Exercício 4.2. Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos que partilham de um mesmo lado de um paralelogramo (o ângulo a ser determinado é aquele formado pelos segmentos pontilhados abaixo).



Teorema 4.2. Todo quadrilátero convexo cujos ângulos opostos são congruentes é um paralelogramo.

A partir do que fora enunciado acima, pense: que figuras geométricas você conhece que poderiam ser consideradas paralelogramos?

Teorema 4.3. Em todo paralelogramo, os lados opostos são congruentes.

Exercício de Aprofundamento 4.4. Demonstre o teorema acima. Dica: trace o segmento $\overline{AC}$ e, a partir do paralelismo entre $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, garanta a congruência de $D\hat{C}A$ com $C\hat{A}B$.

Teorema 4.4. Todo quadrilátero convexo cujos lados opostos são congruentes é um paralelogramo.

Que figuras geométricas você conhece que atendem ao que está dito acima?

Teorema 4.5. Em todo paralelogramo, as diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios.

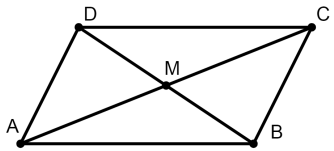


Figura 4.3: M é o ponto médio de ambas as diagonais do paralelogramo.

Teorema 4.6. Todo quadrilátero convexo cujas diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios é um paralelogramo.

De acordo com o que está dito no teorema acima, podemos concluir que, se dois segmentos de reta se interceptam nos respectivos pontos médios, então suas extremidades são vértices de um paralelogramo?

Exercício de Aprofundamento 4.5. Pense no seguinte: podemos dizer que todo quadrilátero convexo com dois lados paralelos e congruentes é um paralelogramo? Por quê?

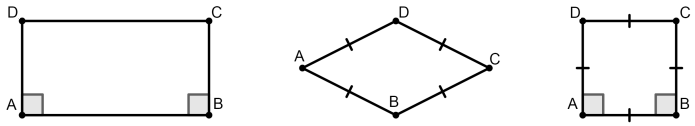
Agora que conhecemos um pouco a respeito dos paralelogramos, estudemos mais aprofundadamente alguns deles:

i. *Retângulo*: um quadrilátero convexo cujos ângulos são congruentes.

ii. *Losango*: um quadrilátero convexo cujos lados são todos congruentes.

iii. *Quadrado*: um quadrilátero convexo que possui ângulos e lados todos congruentes.

Exercício de Fixação 4.5. Classifique os paralelogramos da figura abaixo de acordo com a descrição anterior.



Exercício de Fixação 4.6. Uma aranha caminha sobre um losango $ABCD$, dando 10 voltas. Se a distância entre os vértices A e B, consecutivos, é 43 cm, qual a distância percorrida pela aranha?

Exercício de Aprofundamento 4.6. Mostre que em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Exercício de Aprofundamento 4.7. Por outro lado, mostre agora que todo paralelogramo que tem diagonais congruentes é um retângulo.

Exercício de Aprofundamento 4.8. Mostre que todo losango tem diagonais perpendiculares.

Exercício de Aprofundamento 4.9. Mostre, agora, que todo paralelogramo que tem diagonais perpendiculares é um losango.

Exercício de Aprofundamento 4.10. Por fim, mostre que todo quadrado é retângulo e também losango.

4.4 Bases Médias

4.4.1 Base Média do Triângulo

Teorema 4.7 (Base Média do Triângulo)**.** Dado um segmento com extremidades nos pontos médios de dois lados de um triângulo, então:

1. ele é paralelo ao terceiro lado;

2. ele é metade do terceiro lado.

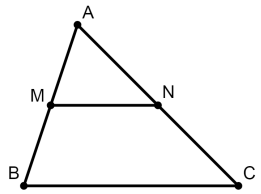
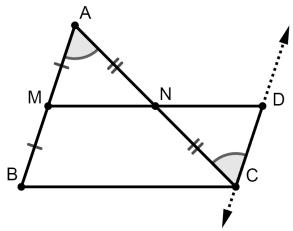


Figura 4.4: $\overline{MN}$ é base média do triângulo $\triangle ABC$.

Demonstração. Trace uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ que atravesse C. Seja, então, D o ponto de intersecção entre $\overleftrightarrow{MN}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, conforme figura abaixo.



Assim, $D\hat{C}N \equiv B\hat{A}C$, $\overline{AN} \equiv \overline{CN}$ e $A\hat{N}M \equiv D\hat{N}C$, de modo que, pelo caso de congruência do triângulo Ângulo-Lado-Ângulo, $\triangle AMN \equiv \triangle CDN \Longrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{AM} \Longrightarrow \overline{CD} \equiv \overline{MB}$.

Como $\overline{CD}//\overline{MB}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{MB}$, então $MBCD$ é um paralelogramo, de forma que $\overline{MD}//\overline{BC} \Longrightarrow \overline{MN}//\overline{BC}$.

Além disso, dado que $\overline{MN} \equiv \overline{DN}$ e $\overline{MD} \equiv \overline{BC}$, então $2.\overline{MN} = \overline{BC} \Longrightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}.\overline{BC}$. ■

Exercício de Fixação 4.7. No triângulo $\triangle ABC$, M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. Se $\overline{AB} = 22$, $\overline{BC} = 18$ e $\overline{AC} = 14$, calcule o perímetro do triângulo $\triangle MNP$.

4.4.2 Base Média do Trapézio

Teorema 4.8 (Base Média do Trapézio)**.** Dado um segmento com extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio, então:

1. ele é paralelo às bases;

2. ele é igual à metade da soma das bases.

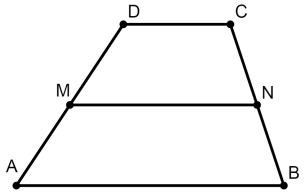


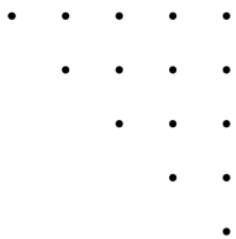
Figura 4.5: $\overline{MN}$ é a base média do trapézio $ABCD$.

Tente você mesmo demonstrar o Teorema da Base Média do Trapézio.

Problemas Propostos

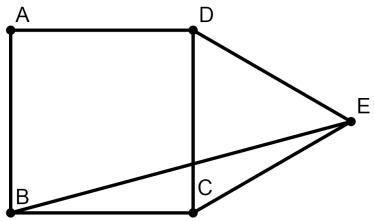
1. ● (OBMEP - Adaptada) Juliana tem 8 cartões de papelão, retangulares e iguais. Se ela enfileirar todos os cartões juntando apenas lados de mesma medida, a maior fila que ela poderá obter terá comprimento $176cm$ e a menor terá comprimento $96cm$. Qual é o perímetro (soma de todos os lados) de cada cartão?

2. ● (OBM Adaptada) Quantos quadrados têm como vértices os pontos reticulados abaixo?

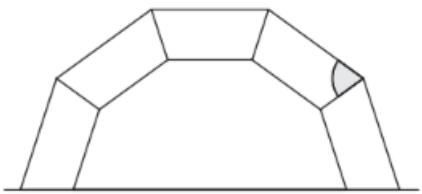


3. ● Duas escadas de concreto, ambas com um metro de altura e dois metros de comprimento da base, estão cobertas com longas tiras de carpete. A primeira escada tem sete degraus e a segunda tem nove. Uma tira de carpete que cubra completamente a primeira escada também cobrirá completamente a segunda?

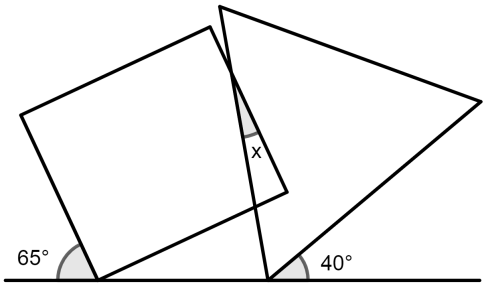
4. ● O quadrilátero $ABCD$, da figura abaixo, é quadrado e o triângulo $\triangle DCE$ é equilátero. Determine a medida do ângulo $D\hat{B}E$.



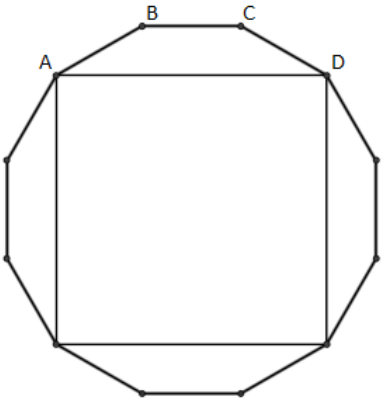
5. ● (OBMEP 2009) A figura é formada por 5 trapézios isósceles iguais. Qual é a medida do ângulo indicado?.



6. ● (OMM 2008) Na figura estão representados um triângulo equilátero e um retângulo. Qual é o valor em graus do ângulo marcado com x?

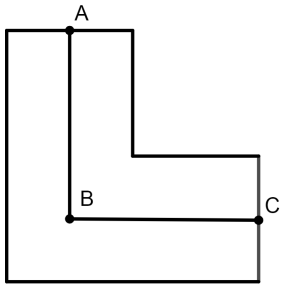


7. ● (OBM 2015 - Adaptada) A figura abaixo representa um dodecágono regular, qual a medida do ângulo $B\hat{A}D$ do trapézio $ABCD$?

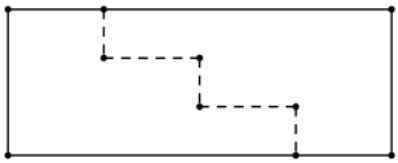


8. ● Determine os ângulos internos de um paralelogramo cuja diferença entre dois deles é de 40°.

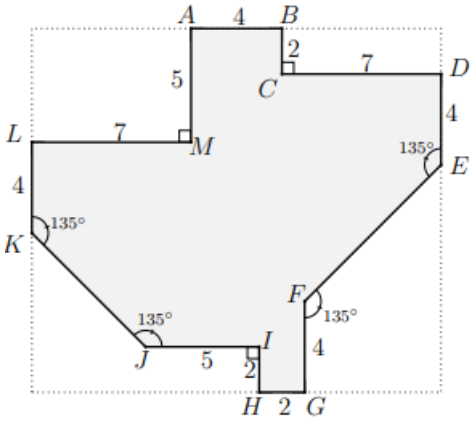
9. ● A piscina do clube que Samuel frequenta tem a forma de um hexágono (polígono com seis lados), com um ângulo interno de 270°, os demais ângulos de 90° e os quatro lados menores com $12m$ cada. Samuel costuma nadar pelo meio da piscina, a partir do ponto A, descrevendo o trajeto representado, na figura, pelo ângulo reto $A\hat{B}C$, em que $AB = BC$. Certo dia, ele nadou por esse trajeto 4 vezes, isto é, foi e voltou 2 vezes. Quantos metros ele percorreu?



10. ● (OBMEP 2007 - Adaptada) Um retângulo de papelão com $45cm$ de altura foi cortado em dois pedaços iguais, nos segmentos pontilhados da figura. Com esses dois pedaços é possível montar um quadrado de lado maior que $45cm$. Qual é o comprimento da base do retângulo?



11. ● (OMM 2013) De uma chapa metálica retangular, foi recortada uma peça. Na figura abaixo, todas as medidas estão em centímetros, a chapa original é representada pela linha pontilhada e a parte cinza representa a peça recortada.

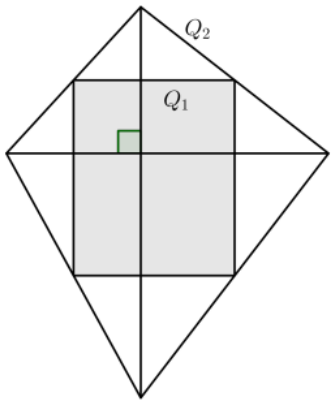


a. Qual era a largura original da chapa?

b. Qual era o comprimento original da chapa?

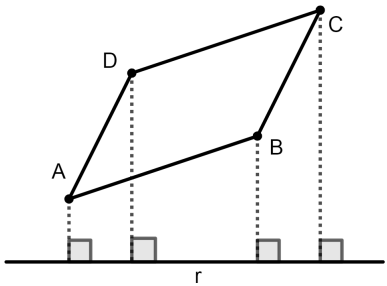
12. ● Seja $ABCD$ um trapézio isósceles de bases AB e CD, com $AB > CD$. Tome $\hat{A} = 60°$ e $AD = DC = CB = 3$. Calcule a base média do trapézio.

13. ● (Portal OBMEP) Na figura, o quadrilátero Q_1 é formado ligando-se os pontos médios dos lados do quadrilátero Q_2, que tem diagonais perpendiculares. Mostre que Q_1 tem diagonais congruentes.

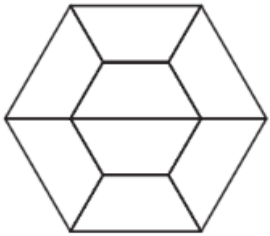


14. ● Seja $ABCD$ um quadrilátero (convexo ou não convexo). Assumindo que M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, mostre que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

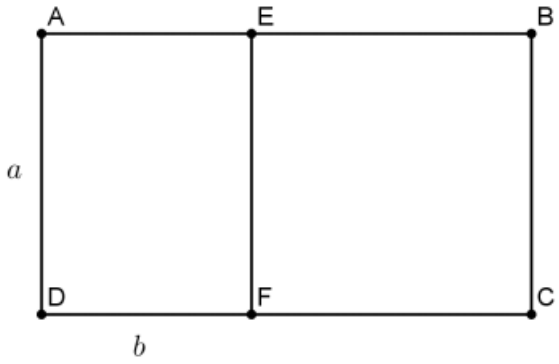
15. ● Sendo $ABCD$ um paralelogramo, e a, b, c e d, respectivamente, as distâncias dos vértices A, B, C e D à reta r exterior (distâncias representadas pelos pontos reticulados na figura abaixo). Mostre que $a + c = b + d$.



16. ● (OBMEP 2012) A figura foi formada por oito trapézios isósceles idênticos, cuja base maior mede 10 cm. Qual é a medida, em centímetros, da base menor de cada um desses trapézios?



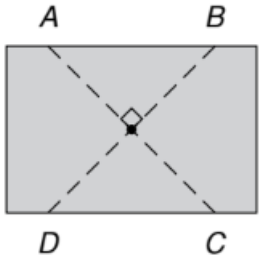
17. ● (Razão Áurea) O retângulo $ABCD$ da figura foi dividido em um quadrado e um retângulo pelo segmento EF. A razão das dimensões do retângulo $ABCD$ é igual à razão das dimensões do retângulo $AEFD$. Determine essa razão, $\frac{a}{b}$, a qual chamamos "razão áurea".



18. ● (OCM) Seja AB e CD as bases de um trapézio tal que a medida da base menor CD é igual à soma das medidas dos lados não paralelos do trapézio. Se E é um ponto de CD e EA é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, mostre que EB é também bissetriz do ângulo $\hat{B}$.

19. ● (OMM 2012) Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M um ponto interior. Sejam G_1, G_2, G_3 e G_4 os baricentros dos triângulos ABM, BCM, CDM e DAM, respectivamente. Mostre que $G_1G_2G_3G_4$ é um paralelogramo. (Observação: o baricentro do triângulo é o ponto de intersecção das medianas do triângulo. Além disso, é conhecido que este ponto corta as medianas na proporção $2:1$).

20. ● (OBMEP 2006 - Adaptada) Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na abaixo.

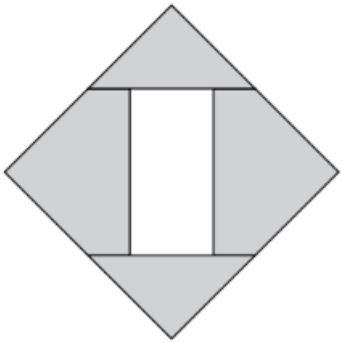


Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo, formando ângulos retos.

a. Qual é o comprimento do segmento AB?

b. Qual é o perímetro de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?

c. Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com buraco retangular, como na figura abaixo. Qual é o perímetro do buraco?

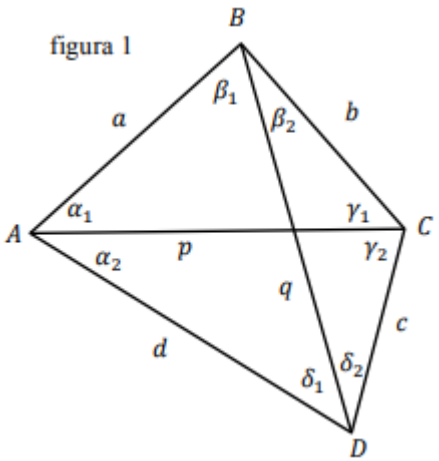


21. ● (Torneio das Cidades) $ABCD$ é um paralelogramo. Um ponto M é escolhido sobre o lado AB tal que $M\hat{A}D = A\hat{M}O$, onde O é o ponto de interseção das diagonais do paralelogramo. Prove que $MD = MC$.

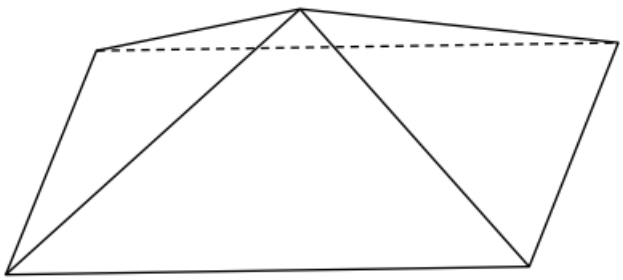
22. ● (Torneio das Cidades) Em um quadrado $ABCD$, K é um ponto do lado BC e a bissetriz do ângulo $K\hat{A}D$ intersecta o

lado CD no ponto M. Prove que o comprimento do segmento AK é igual à soma dos comprimentos dos segmentos DM e BK.

23. ● (OPM 2015) Um dos teoremas mais importantes sobre quadriláteros é a *Desigualdade de Ptolomeu*: em um quadrilátero convexo cujos lados têm medidas a, b, c e d (nessa ordem) e as diagonais têm medidas p e q, tem-se que $p.q \leq a.c + b.d$.



Nessa questão iremos aprender uma demonstração desse teorema. Considere a figura a seguir em que, por construção: $\triangle ABC$ (figura 1) é semelhante a $\triangle EFG$; $\triangle ABD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle HGF$ e $\triangle CBD$ (da figura 1) é semelhante a $\triangle IEF$. Fazemos, ainda, $EG = p.q$.



a. Determine as medidas de FH e FI.

b. Prove que $IEGH$ é um paralelogramo e conclua a demonstração do teorema.(Nesse item você pode desejar utilizar o fato de que $IEGH$ é um paralelogramo se, se somente se, $EI = GH$ e as retas EI e GH são paralelas.

c. Supondo que $p.q = a.c + b.d$, calcule $\triangle ABC + \triangle CDA$, ou seja, a soma dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ do quadrilátero inicial.

Aula 5

Círculos

Como alertamos nas aulas anteriores, circunferência e círculo são coisas distintas. A circunferência é aquela linha desenhada ao redor de um ponto; o círculo é a união entre essa linha e o que há no seu interior.

Mas você conseguiria definir, precisamente, uma circunferência? Que característica podemos observar nela para que o consigamos fazer?

5.1 Circunferência

Definição 5.1. Chamamos de "circunferência" o segmento que atravessa todos os pontos equidistantes de um ponto dado, nomeado "centro".

Notação 1. Denotamos a circunferência que preserva uma distância r do centro O da seguinte maneira: (O, r). No entanto, para facilitar a notação, podemos nos referir à circunferência utilizando apenas uma letra grega minúscula ou, quando não houver chance de confusão, um símbolo qualquer.

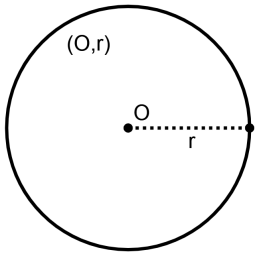
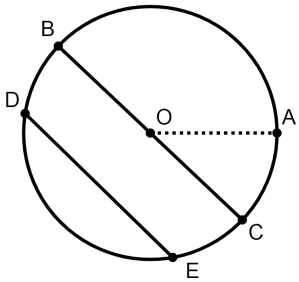


Figura 5.1: Circunferência (O, r).

5.1.1 Raio, Diâmetro e Corda



O *raio* de uma circunferência é o segmento cujas extremidades são o centro e outro ponto da circunferência. Na figura acima, $\overline{OA}$ é raio de (O, r).

O *diâmetro* de uma circunferência é o segmento que atravessa o seu centro e tem suas extremidades em pontos que pertencem à circunferência. Na figura, $\overline{BC}$ é diâmetro de (O, r).

A *corda* de uma circunferência é o segmento cujas extremidades pertencem à circunferência. Na figura, $\overline{DE}$ é corda de (O, r).

Exercício de Fixação 5.1. Podemos dizer que o diâmetro é também uma corda da circunferência? E o raio?

5.2 Círculo

Definição 5.2. Chamamos de "círculo" a união entre a circunferência e a região em seu interior.

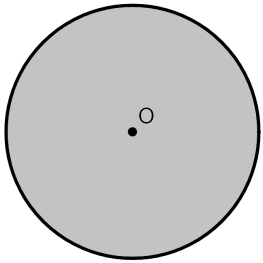


Figura 5.2: Círculo com (O, r).

Podemos dividir o círculo em setores ou em segmentos circulares. Quando o fazemos em setores, dividimos o círculo como quando cortamos uma pizza. Por outro lado, quando em segmentos circulares, atravessamos o círculo com um segmento de reta, dividindo-o, e lhe arrancamos um dos pedaços resultantes do corte, ficando apenas com o outro.

Chamamos a metade de um círculo de "semicírculo".

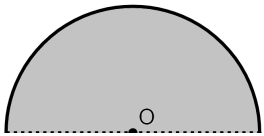


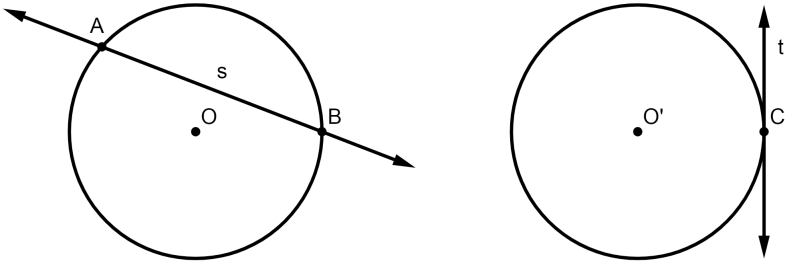
Figura 5.3: Semicírculo.

Exercício de Fixação 5.2. Na figura acima, que tipo de divisão do círculo fizemos: em setor ou em segmento circular?

5.3 Secante e Tangente

Definição 5.3. A *secante* é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

Definição 5.4. A *tangente* é uma reta que intercepta a circunferência em apenas um ponto.



Exercício de Fixação 5.3. De acordo com as definições anteriores, diga qual reta é secante e qual é tangente na imagem acima.

Exercício 5.1. Dada a circunferência (O, r), mostre que os triângulos $\triangle AMO$ e $\triangle BMO$ são congruentes, sabendo que $\overleftrightarrow{AB}$ é uma secante a (O, r) que não passa pelo centro O e que M é o ponto médio de $\overline{AB}$. (Dica: desenhe todos os elementos do exercício antes de resolvê-lo)

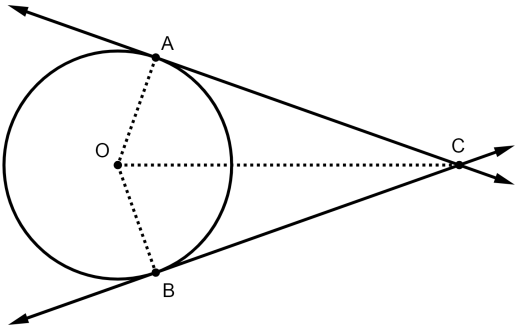
Exercício 5.2. Mostre que toda reta que passa pelo centro de uma circunferência e pelo ponto médio de uma corda que não atravessa o centro da circunferência é perpendicular à reta que contém essa mesma corda.

Nota 1. Uma propriedade bastante importante da tangente é a seguinte: toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular à reta que contêm o raio da circunferência, justamente no ponto de tangência.

Nota 2. Também podemos dizer que duas circunferências se tangenciam, se elas se "tocam" em apenas um ponto. Neste caso, uma circunferência é tangente à outra.

Exercício 5.3. Sabendo que $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são tangentes à circunferên-

cia $(O, \overline{OA})$ e que ambas as retas se interceptam em C, prove que os triângulos $\triangle AOC$ e $\triangle BOC$ são congruentes.



Exercício 5.4. São dadas duas circunferências de raios $r_1 = 14cm$ e $r_2 = 26cm$. Determine a distanciância entre seus centros para que as circunferências sejam:

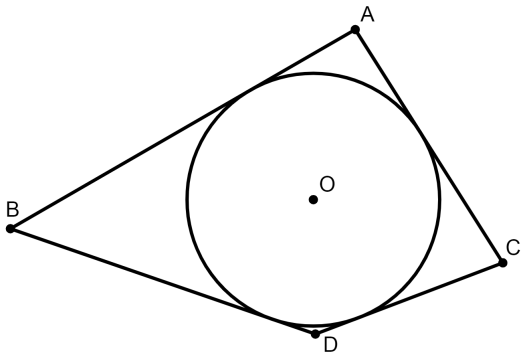
a) tangentes externamente.

b) tangentes internamente.

c) secantes.

5.4 Quadriláteros Circunscritíveis

Dizemos que um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, e somente se, seus quatro lados são contidos por retas tangentes à circunferência.



Exercício 5.5. Mostre que a soma de dois lados opostos de um quadrilátero convexo circunscrito é igual à soma dos outros dois lados. (Dica: use os resultados obtidos nos exercícios anteriores)

5.5 Ângulos na Circunferência

Definição 5.5. Dizemos que duas circunferências são congruentes se têm raios congruentes.

5.5.1 Ângulo Central

Ângulo Central é o ângulo que tem vértice no centro da circunferência.

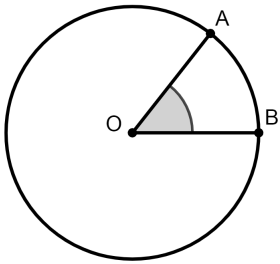


Figura 5.4: Ângulo Central $A\hat{O}B$.

Nota 3. A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

5.5.2 Ângulo Inscrito

Ângulo Inscrito é o ângulo que o vértice está contido na circunferência e os seus lados a seccionam.

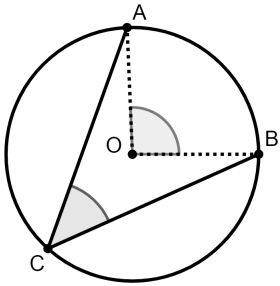
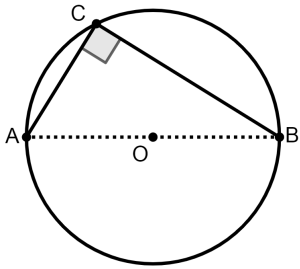


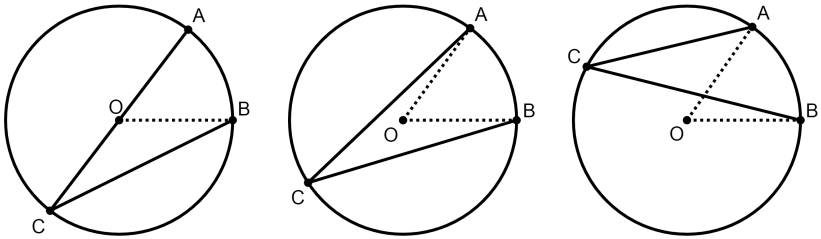
Figura 5.5: Ângulo Inscrito $A\hat{C}B$.

Um ângulo inscrito mede a metade do ângulo central correspondente. Isto é, na figura acima, $A\hat{C}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.

Exercício de Fixação 5.4. Podemos afirmar que todo triângulo inscrito em uma semicircunferência com lado igual ao seu diâmetro é um triângulo retângulo? Por quê?



Exercício de Aprofundamento 5.1. Considere os três casos de ângulos inscritos abaixo e mostre que a medida de cada um deles é a metade da medida do ângulo central correspondente.



5.6 Comprimento da Circunferência

Chamamos de "*Comprimento da Circunferência*" o perímetro do círculo. Para estabelecê-lo, podemos usar a ideia de retificação da circunferência: tomando-a como uma corda que pode ser seccionada em um de seus pontos, esticamo-la, formando um segmento de reta - a medida desse segmento será o comprimento da circunferência.

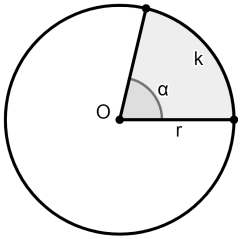
No entanto, esse processo é bastante complicado, pois nem sempre temos a circunferência como uma corda real, que pode ser esticada. Para escapar dessa dificuldade, é preciso pensar se não conseguiríamos estabelecer uma relação entre o raio ou o diâmetro da circunferência (coisas que podem ser medidas mais facilmente) e o perímetro do círculo.

De fato, essa relação é possível. Analisando quantas vezes a circunferência é maior do que o seu diâmetro, chegamos à constante π (*pi*). Ou seja, o comprimento da circunferência é π vezes o comprimento do diâmetro, de modo que, sabendo que o diâmetro é o dobro do raio, podemos concluir o seguinte: $C = 2.\pi.r$ (onde C é o comprimento da circunferência e r, o raio).

Mas qual o valor de π? Não sabemos exatamente, justamente porque as duas medidas, diâmetro e comprimento da circunferência, são incomensuráveis, ou seja, não encontram unidade que as coloque em razão perfeita. Mas temos uma aproximação: $\pi = 3,1415926535...$ - ou, para que consigamos realizar os cálculos à mão, apenas $\pi = 3,14$.

Nota 4. O comprimento de um arco de circunferência k qualquer (isto é, uma parte da circunferência que é determinada por um ân-

gulo central) é proporcional à sua medida.

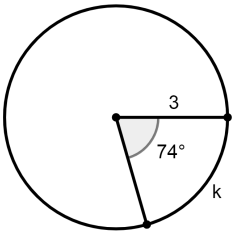


Assim, temos que o valor de k é o seguinte:

i. Para α em radianos: $k = r.\alpha$.

ii. Para α em graus: $k = \frac{\pi.r.\alpha}{180}$.

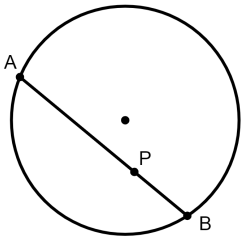
Exercício 5.6. Qual o valor (em graus) de k na figura abaixo?

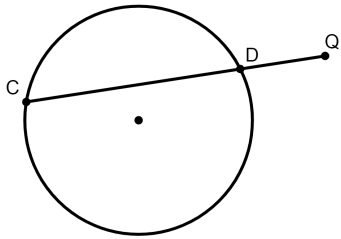


5.7 Potência de Ponto

Definição 5.6. *Potência de Ponto* é o produto de todas as distâncias de um ponto dado às intersecções entre uma reta que passa por esse ponto e uma circunferência.

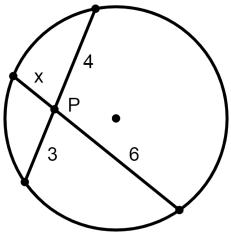
Há dois casos possíveis de potência de ponto: no primeiro, o ponto está no interior da circunferência; no segundo, o ponto está no exterior.

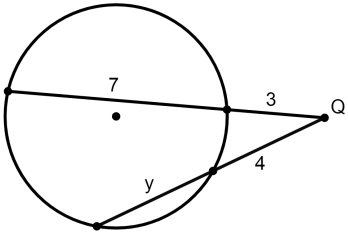




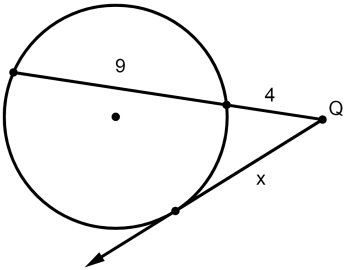
Nas figuras acima, por exemplo, os Pontos de Potência de P e Q são, respectivamente, $\overline{AP}.\overline{PB}$ e $\overline{QC}.\overline{QD}$.

Exercício 5.7. Com base nas informações anteriores, descubra os valores de x e y na imagem a seguir.



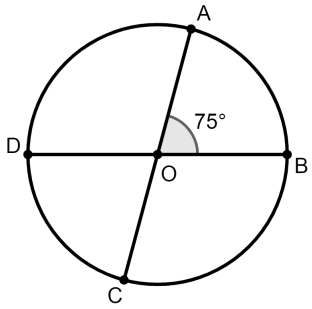


Exercício 5.8. Qual o valor de x na figura abaixo?



Problemas Propostos

1. ● Na figura abaixo, O é o centro da circunferência.

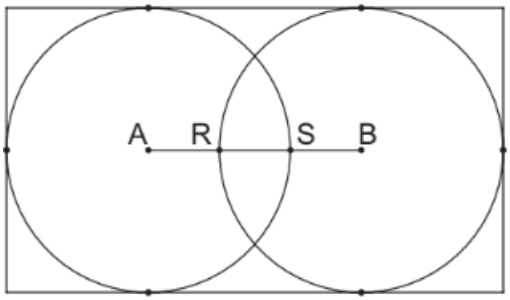


Determine o seguinte:

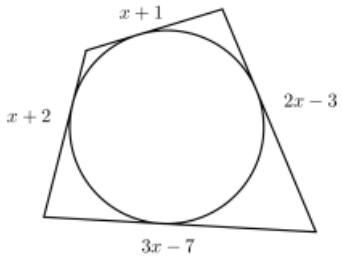
a) a medida do arco $\widehat{BC}$.
b) a medida de $A\hat{O}D$.
c) a medida do arco $\widehat{ABC}$.

2. ● Considere um quadrado com lado de $30cm$ inscrito em uma circunferência. Considerando $\pi = 3,14$ e $\sqrt{2} = 1,41$, determine a medida aproximada do comprimento da circunferência.

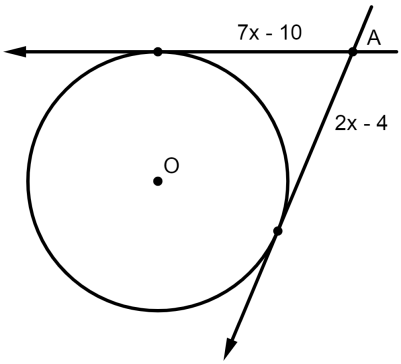
3. ● (OBMEP 2010) Na figura, as circunferências de centros A e B são tangentes aos lados do retângulo e têm diâmetros iguais a $4cm$. A distância entre os pontos R e S é de $1cm$. Qual é o perímetro do retângulo?



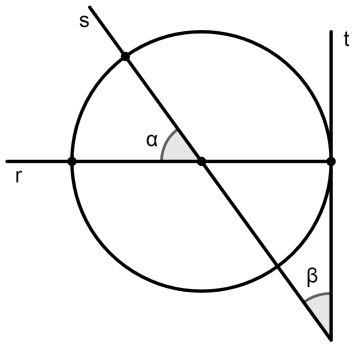
4. ● Determine o valor de x no quadrilátero abaixo:



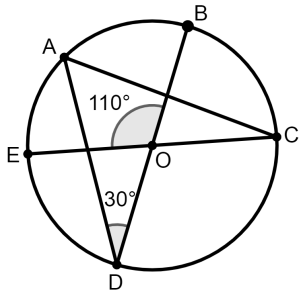
5. ● Na figura abaixo, as duas retas sao tangentes à circunferência. Determine o valor de x.



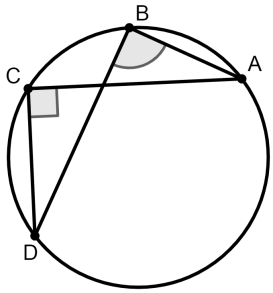
6. ● Sabendo que t é tangente à circunferência e que r e s atravessam o seu centro, determine o valor de $\alpha + \beta$.



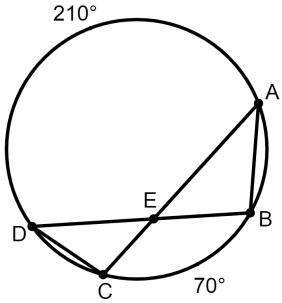
7. ● Sabendo que O é o centro da circunferência, determine a medida do ângulo $A\hat{C}E$,



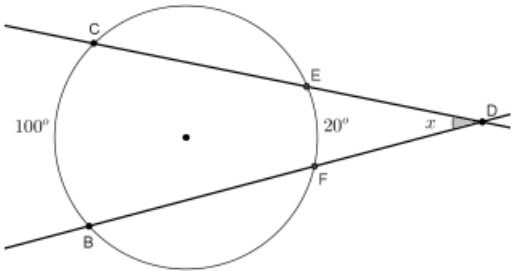
8. ● Determine o valor de $A\hat{B}D$ na figura abaixo.



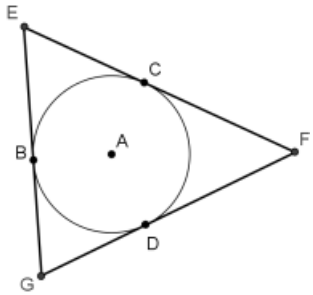
9. ● Sabendo que o arco $\widehat{DA} = 210°$ e o arco $\widehat{CB} = 70°$, determine o valor do ângulo $D\hat{E}A$.



10. ● Determine o valor de x.

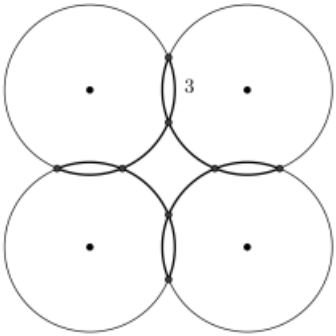


11. ● Na figura abaixo, temos uma circunferência inscrita ao triângulo $\triangle EFG$. Determine a medida do lado EF, sabendo que $BE = 8cm$ e $DF = 9cm$.

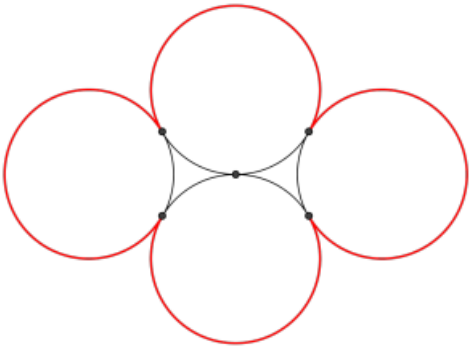


12. ● (OBMEP 2014) Quatro circunferências de mesmo raio estão dispostas como na figura, determinando doze pequenos arcos,

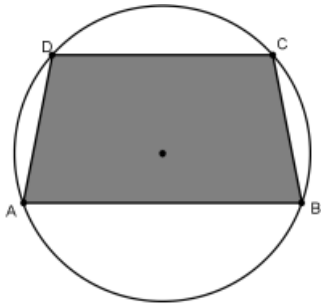
todos de comprimento 3. Qual é o comprimento de cada uma dessas circunferências?



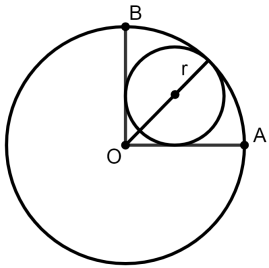
13. ● A figura mostra quatro circunferências, todas de comprimento 1 e tangentes nos pontos indicados. Qual é a soma dos comprimentos dos arcos destacados em vermelho (os maiores arcos de cada circunferência)?



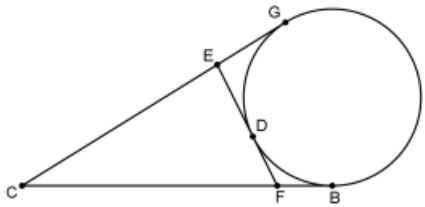
14. ● (OBMEP 2015) Na figura, $ABCD$ é um trapézio inscrito numa circunferência. A base maior do trapézio mede $16cm$, a base menor, $10cm$, e a altura, $9cm$. Qual é a medida, em centímetros, do raio da circunferência?



15. ● Determine o raio do círculo menor inscrito num quadrante do círculo maior (ou seja, O é o centro e $A\hat{O}B = 90°$), da figura abaixo, sendo $2R$ o diâmetro do círculo maior.

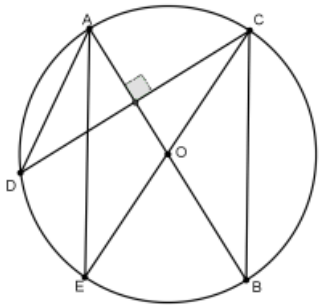


16. ● Na figura, CB, CG e EF são segmentos tangentes à circunferência nos pontos B, G e D, respectivamente. Se $CE = 10$, $CF = 9$ e $EF = 7$, determine a medida de $CB + CG$.

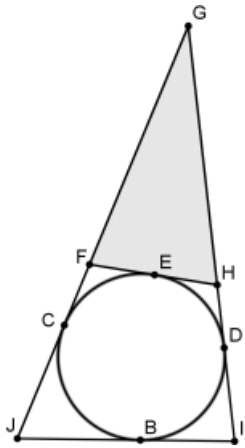


17. ● (OBM 2013) Na figura, o ponto O é o centro da circunferência que passa pelos pontos A, B, C, D e E. Sabendo

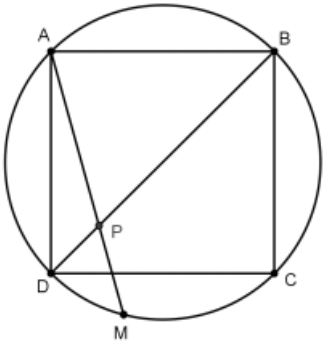
que o diâmetro AB e a corda CD são perpendiculares e que $B\hat{C}E = 35°$, qual é o valor em graus do ângulo $D\hat{A}E$?



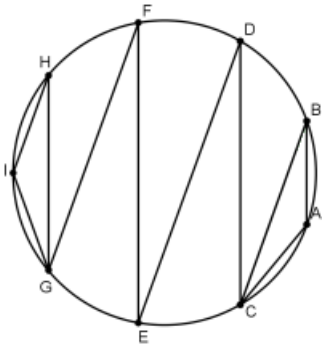
18. ● Seja um triângulo JIG, onde $JI = 6$, $IG = 8$ e $GJ = 9$. Por F e H, pontos pertencentes aos lados GJ e IG, respectivamente, traça-se um segmento tangente à circunferência inscrita a JIG. Determine o perímetro do triângulo FHG.



19. ● (OBM 2013) O quadrado $ABCD$ está inscrito em um círculo cujo raio mede 30. A corda AM intercepta a diagonal BD no ponto P. Se o segmento AM mede 50, determine a medida do segmento AP.



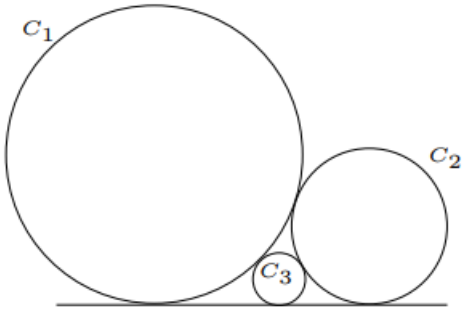
20. ● (OBM 2014) Considere a figura, onde os pontos de A até I estão sobre uma circunferência. Sabe-se que ABC e GHI são isósceles, que AB, CD, EF e GH são segmentos paralelos e que BC, DE, FG e HI são segmentos paralelos. Qual é a medida do ângulo $C\hat{B}A$ em graus?



21. ● (OCM) Duas tangentes OA e OB são traçadas a um círculo de um ponto externo O. Uma corda AC é construída paralela a OB e uma secante OC é desenhada intersectando o círculo em E. Se K é o ponto de intersecção de OB com o prolongamento de AE, prove que $OK = KB$.

22. ● (OMM 2004) Na figura abaixo, C_1, C_2 e C_3 são três circunferências tangentes entre si e também tangentes à reta subscrita.

Sabendo que o raio da circunferência C_1 é 9 e o raio de C_2 é 4, calcule o raio da circunferência C_3.



Aula 6

Áreas I

Você conseguiria, sozinho, dar uma definição de *área*?

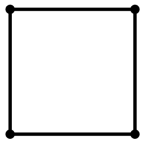
Essa é uma daquelas coisas da geometria que estamos acostumados a trabalhar, mas temos dificuldade para explicar. Em uma imagem, é sempre fácil mostrar o que nela é a área, mas pode ser um problema defini-la formalmente.

Tentemos pensar a respeito. Sabemos que um ponto não tem área, pois pontos não têm parte alguma, não têm nada. Um segmento de reta, por sua vez, também não tem área, pois ele é só comprimento, isto é, ele é só um caminho de um ponto a outro, mas um caminho sem abertura, sem largura, uma passagem que ainda não foi pisada.

E um quadrado? Ele tem área? Sim, sabemos que tem. Mas, por quê? Ora, porque ele tem superfície, ou seja, ele ocupa (ou ele abre) um espaço no plano. Sobre a superfície nós podemos caminhar, podemos construir algo, temos espaço para nos movimentar.

Definição 6.1. Desse modo, *área* pode ser definida como a superfície aberta por uma figura geométrica.

Como área é superfície, ela é então uma relação entre comprimento e altura. A nossa referência usual para área é o quadrado: uma figura cuja essência é relacionar de forma perfeita justamente comprimento e altura. Não é à toa que, para medir uma sala de aula, por exemplo, usamos a unidade m^2 (metro *quadrado*).



Exercício de Aprofundamento 6.1. Por que o quadrado pode ser visto como uma figura cuja essência é relacionar de forma perfeita comprimento e altura?

Mas como medir uma área? Como atribuir-lhe um valor numérico? Ora, só é possível fazer isso, se tivermos uma unidade de medida (que pode variar muito, dependendo do intuito da medição). De todo modo, o ponto importante aqui é que a unidade será sempre (ou quase sempre) um quadrado. Quando medimos a área de uma figura, queremos saber quantos quadrados cabem nela. Assim sendo, o que determinará a unidade de medida é a unidade do lado do quadrado. Como no exemplo acima, se quisermos medir a área de uma sala de aula, utilizaremos o m^2, isto é, veremos quantos quadrados de 1 m de lado cabem naquela sala.

Exercício de Aprofundamento 6.2. Sabendo disso, usando uma unidade de medida genérica, como poderíamos medir a área de uma figura quadrada? Poderíamos estabelecer uma fórmula para isso? Se sim, explique como chegou a ela.

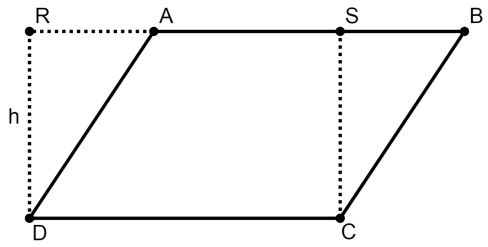
Exercício de Aprofundamento 6.3. Agora, pense, como seria o caso de um retângulo? Há uma fórmula para a medição da sua área? Qual e por quê?

Exercício 6.1. Podemos concluir que figuras geométricas (com superfície) congruentes têm áreas iguais? Por quê?

Exercício 6.2. Sabendo que a diagonal de um quadrado é $\sqrt{8}$, qual é a medida da sua área?

6.1 Área do Paralelogramo

Exercício 6.3. Oberseve a figura a seguir e responda ao que se pede.



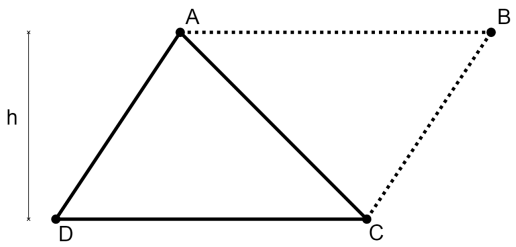
a) Qual a relação entre os triângulos $\triangle RAD$ e $\triangle SBC$?

b) Seria possível dizer que o paralelogramo $ABCD$ tem a mesma área que o retângulo $RSCD$? Por quê?

c) Com base nas respostas anteriores, você conseguiria estabelecer uma fórmula para a área do paralelogramo? Qual e por quê?

6.2 Área do Triângulo

Exercício 6.4. Oberseve a figura a seguir e responda ao que se pede.

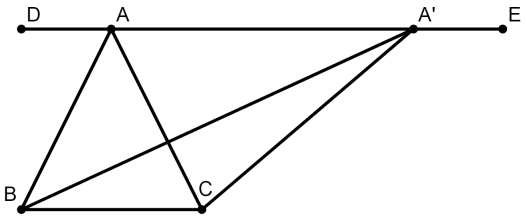


a) Sabendo que $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{AD}//\overleftrightarrow{BC}$, qual é a relação entre os triângulos $\triangle ACD$ e $\triangle ABC$?

b) Com base nisso, você conseguiria estabelecer uma fórmula para a área de todo e qualquer triângulo? Qual e por quê?

Exercício de Aprofundamento 6.4. Pense, agora, em qual poderia ser a área de um triângulo equilátero de lado medindo a.

Exercício de Fixação 6.1. Oberseve a figura a seguir, em que $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, e responda ao que se pede.



a) Podemos dizer, com base na fórmula obtida para o cálculo da área do triângulo, que as áreas de $\triangle ABC$ e $\triangle A'BC$ são iguais?

b) Para qualquer ponto X da reta $\overleftrightarrow{DE}$, teremos que a área de $\triangle XBC$ será igual à área de $\triangle ABC$?

Exercício de Fixação 6.2. Em um triângulo, a mediana divide sua área em partes iguais? Justifique a sua resposta.

6.2.1 Razão entre Áreas de dois Triângulos Semelhantes

Exercício 6.5. Oberseve os triângulos semelhantes a seguir e responda ao que se pede.

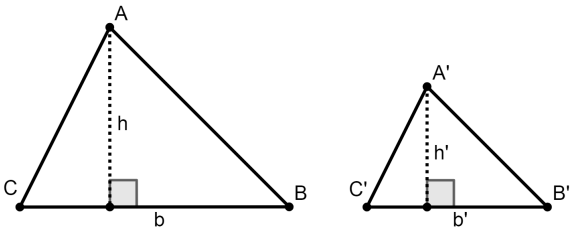


Figura 6.1: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

.

a) Sabemos que a razão de semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ é $\frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = k$. Com base nisso, e também na fórmula obtida

para medir a área de triângulos, descubra qual é a razão de semelhança entre as áreas de dois triângulos semelhantes.

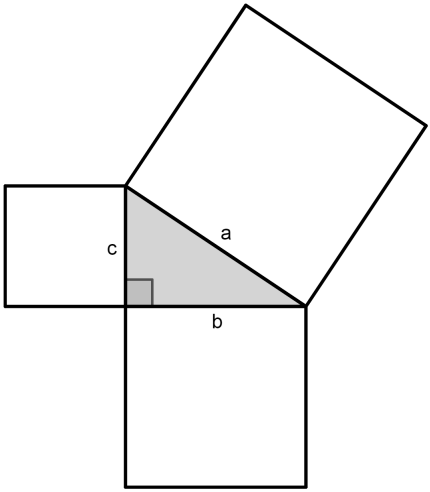
b) Se a razão de semelhança entre $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ é $k = 1,5$, qual é a razão de semelhança entre as suas áreas?

6.2.2 Prova Geométrica do Teorema de Pitágoras

Há duas aulas, vimos algumas relações entre os lados de um triângulo retângulo, das quais também aquela enunciada no Teorema de Pitágoras.

Agora, veremos essa mesma relação, mas incluindo a ideia de área.

Teorema 6.1. Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado tem a medida da hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

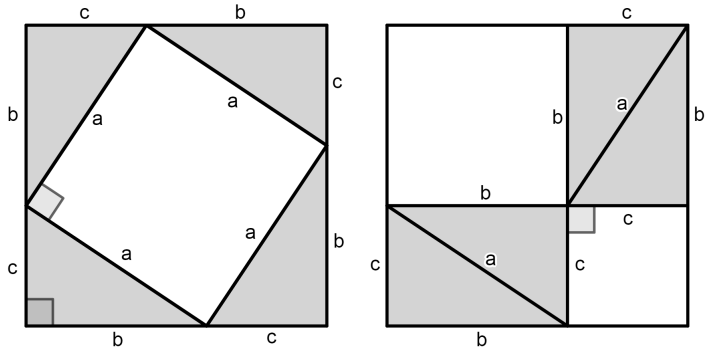


Desse modo, na figura acima, o teorema nos garante que o quadrado de lado a tem a mesma área que a soma dos quadrados de lados b e c.

Mas como provar que isso está certo? Na *Aula 3*, nós conseguimos mostrar essa relação com a ideia de semelhança de triângulos,

mas será que conseguiríamos fazê-lo geometricamente? Sim! Verifiquemos nós mesmos com o exercício a seguir.

Exercício 6.6. Observe as duas imagens abaixo:

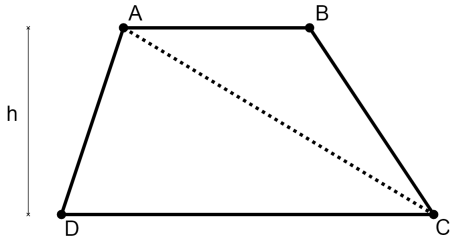


Como elas podem ser capazes de nos mostrar a veracidade do *Teorema de Pitágoras*?

Exercício 6.7. O triângulo $\triangle ABC$ tem lados $\overline{AB} = \sqrt{12}$, $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CA} = \sqrt{20}$. Calcule a área de $\triangle ABC$.

6.3 Área do Trapézio

Exercício 6.8. Oberseve a figura a seguir e responda ao que se pede.

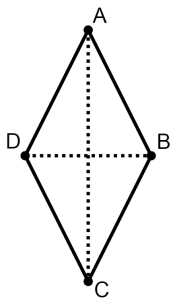


a) Seccionando (cortanto) o trapézio $ABCD$ com o segmento $\overline{AC}$, que figuras geométricas obtemos?

b) Com base nisso, e chamando $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$ de b_1 e b_2, respectivamente, você conseguiria estabelecer uma fórmula para a área de todo e qualquer trapézio? Qual e por quê?

6.4 Losango

Exercício 6.9. Oberseve a figura a seguir e responda ao que se pede.

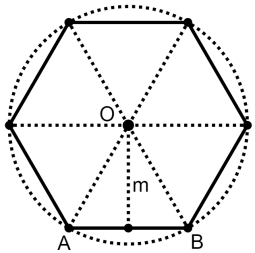


a) Seccionando o losango $ABCD$ com os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$, que figuras geométricas obtemos?

b) Com base nisso, e chamando $\overline{DB}$ e $\overline{AC}$ de d_1 e d_2, você conseguiria estabelecer uma fórmula para a área de todo e qualquer losango? Qual e por quê?

6.5 Áreas de Polígonos Regulares

Exercício 6.10. Oberseve a figura a seguir e responda ao que se pede.



a) Seccionando o polígono com segmentos que atravessam o centro O da circunferência que o circunscreve, obtemos que figuras geométricas? O que há em comum entre as figuras obtidas?

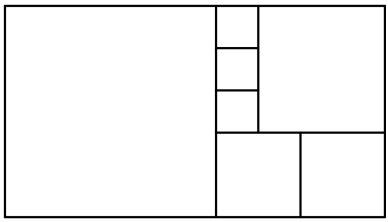
b) Com base nisso, e chamando $\overline{AB}$ de k e a altura do triângulo $\triangle OAB$ de m, você conseguiria calcular a área da figura acima?

c) Quanto à fórmula geral para o cálculo de área de polígonos regulares, você conseguiria pensar em uma? Qual e por quê?

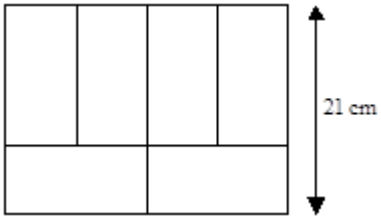
Nota 1. Costumamos chamar o m, da figura acima, de "apótema".

Problemas Propostos

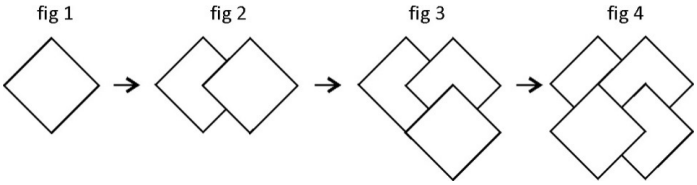
1. ● (OBM 2003) O retângulo da figura a seguir está dividido em 7 quadrados. Se a área do menor quadrado é igual a 1, a área do retângulo é igual a quanto?



2. ● (OBM 2005) Seis retângulos idênticos são reunidos para formar um retângulo maior conforme indicado na figura. Qual é a área deste retângulo maior?



3. ● (OBM 2014) Esmeralda tem quatro folhas quadradas iguais, de lado $20cm$. Ela cola uma folha sobre a outra, fazendo um vértice da folha de cima coincidir com o centro da folha de baixo, alinhando horizontalmente quatro vértices dessas folhas, conforme figuras 1 e 2. Ela continua fazendo isto, até colar as quatro folhas, de acordo com as figuras 3 e 4.



Qual é a área da figura 4?

a) $1200cm^2$

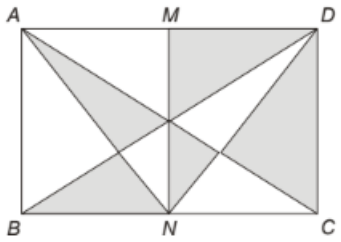
b) $1300cm^2$

c) $1400cm^2$

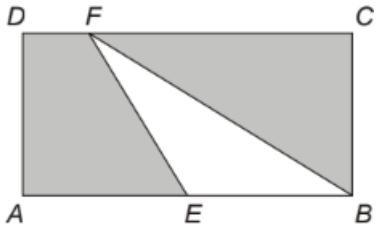
d) $1500cm^2$

e) $1600cm^2$

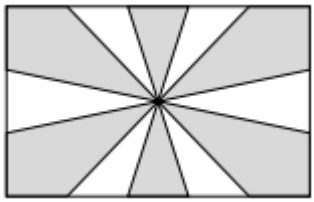
4. ● (OBMEP 2006) No retângulo $ABCD$ da figura, M e N são os pontos médios dos lados AD e BC. Qual é a razão entre a área da parte sombreada e a área do retângulo $ABCD$?



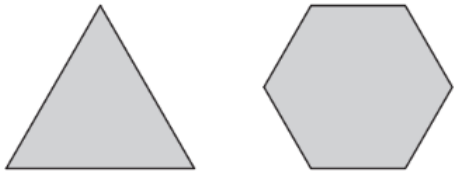
5. ● (OBMEP 2005) No retângulo da figura temos $AB = 6cm$ e $BC = 4cm$. O ponto E é o ponto médio do lado AB. Qual é a área da parte sombreada?



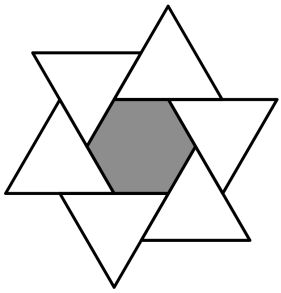
6. ● (OBMEP 2011) O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isto, comprou um tecido branco retangular com $100cm$ de largura e $60cm$ de altura. Dividiu dois de seus lados em cinco partes iguais e os outros dois em três partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura. Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?



7. ● (OBMEP 2011) Um triângulo equilátero e um hexágono regular têm o mesmo perímetro. A área do hexágono é $6m^2$. Qual é a área do triângulo?



8. ● (OBM 2012 - Adaptada) A figura mostra seis triângulos equiláteros com lados de comprimento 2 e um hexágono regular de lados de comprimento 1. Qual é a razão entre a área sombreada e a figura toda?



a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{7}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{1}{5}$
e) $\frac{1}{4}$

9. ● (OBMEP 2007) A figura I mostra um quadrado de $40cm^2$ cortado em cinco triângulos retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, formando as sete peças do jogo Tangran. Com elas é possível formar a figura II, que tem um buraco sombreado. Qual é a área do buraco?

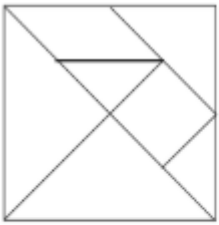


Figura I

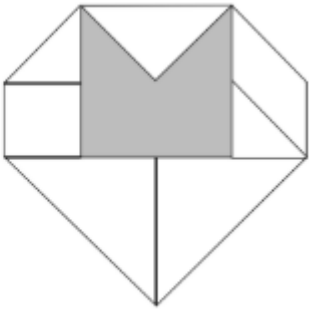


Figura II

a) $5cm^2$

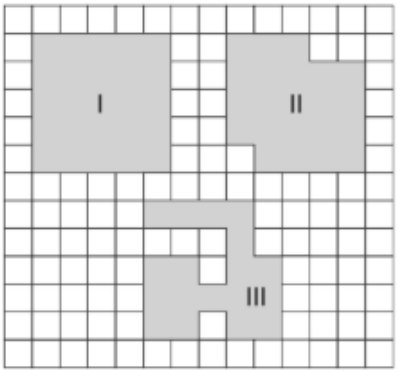
b) $10cm^2$

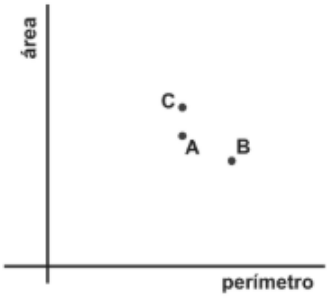
c) $15cm^2$

d) $20cm^2$

e) $25cm^2$

10. ● (OBMEP 2007) A figura mostra três polígonos desenhados em uma folha quadriculada. Para cada um destes polígonos foi assinalado, no plano cartesiano à direita, o ponto cujas coordenadas horizontal e vertical são, respectivamente, seu perímetro e sua área.

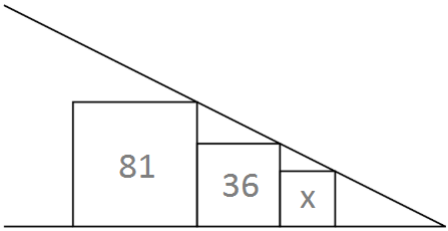




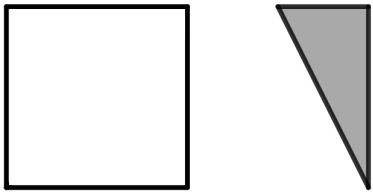
Qual é a correspondência correta entre os polígonos e os pontos?

a) $I \longrightarrow C$, $II \longrightarrow B$, $III \longrightarrow A$
b) $I \longrightarrow B$, $II \longrightarrow A$, $III \longrightarrow C$
c) $I \longrightarrow A$, $II \longrightarrow C$, $III \longrightarrow B$
d) $I \longrightarrow A$, $II \longrightarrow B$, $III \longrightarrow C$
e) $I \longrightarrow C$, $II \longrightarrow A$, $III \longrightarrow B$

11. ● Na figura abaixo, há três quadrados com áreas 81, 36 e x. Determine o valor de x.



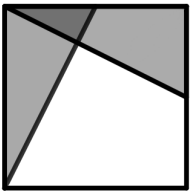
12. ● (OBMEP) Na figura a seguir, temos um quadrado e um triângulo retângulo cujo cateto maior tem a mesma medida do lado do quadrado e o cateto menor tem a metade da medida do lado do quadrado.



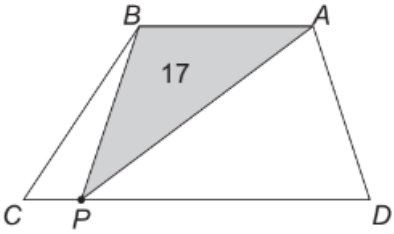
Se a área do quadrado é $4k$, determine:

a) A área do quadrado que não está em cinza.

b) A área em cinza mais escuro da figura abaixo.



13. ● (OBMEP 2018) No trapézio $ABCD$ da figura, os lados AB e CD são paralelos e o comprimento de CD é o dobro do comprimento de AB. O ponto P está sobre o lado CD e determina um triângulo ABP com área igual a 17. Qual é a área do trapézio $ABCD$?



a) 32

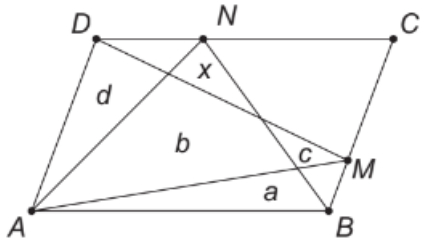
b) 34

c) 45

d) 51

e) 68

14. ● (OBMEP 2019) No paralelogramo $ABCD$ da figura, os pontos M e N são pontos dos lados BC e CD, respectivamente. As áreas a, b, c e d são conhecidas. Qual é o valor da área x?



a) $c + d - a$

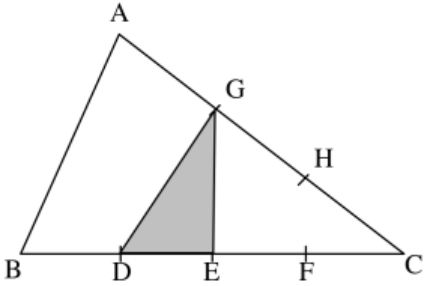
b) $a + c + d - b$

c) $a + c + d - 2b$

d) $a + d - b$

e) $a + c - d$

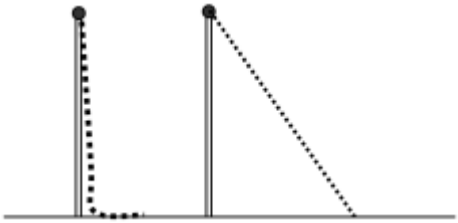
15. ● O triângulo ABC da figura abaixo tem área igual a 30. O lado BC está dividido em quatro partes iguais, pelos pontos D, E e F, e o lado AC está dividido em três partes iguais pelos pontos G e H. Qual é a área do triângulo GDE?



16. ● (FGV RIO - Adaptada) O antigo livro chinês *Jiuzhang suanshu* contém 246 problemas. Para a solução de alguns, é necessário o uso do *gou gu* (nome chinês para o Teorema de Pitágo-

ras). Veja um desses problemas traduzidos do Capítulo 9 do *Jiuzhang*.

No alto de um bambu vertical está presa uma corda. A parte da corda em contato com o solo mede 3*chih*. Quando a corda é esticada, sua extremidade toca no solo a uma distância de 8*chih* do pé do bambu.



Com base nisso, responda:

a) Que comprimento tem o bambu?

b) Qual a área formada pelo triângulo resultante da corda esticada?

17. ● (OBM 2014) Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros ABE, BCF, CDG e DAH. Qual é a área do quadrilátero $EFGH$?

a) 2

b) $2\sqrt{3}$

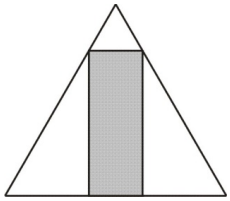
c) $2 + \sqrt{3}$

d) 3

e) 6

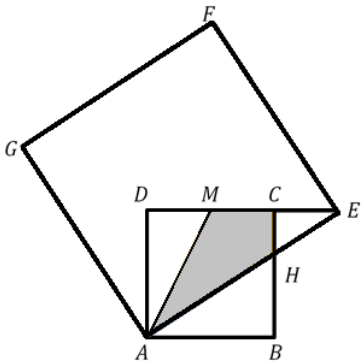
18. ● (OBM 2010) No desenho, o retângulo cinza tem seus vértices sobre os lados do triângulo equilátero de área $40cm^2$. O menor

lado do retângulo é um quarto do lado do triângulo. A área do retângulo em cm^2 é:



a) 5
b) 10
c) 15
d) 18
e) 22

19. ● (OBM 2016) Na figura ao lado, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto E está na reta CD. Além disso, M é o ponto médio do segmento CD e C é o ponto médio do segmento ME. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado 6, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$.



a) $\frac{5}{39}$
b) $\frac{5}{27}$

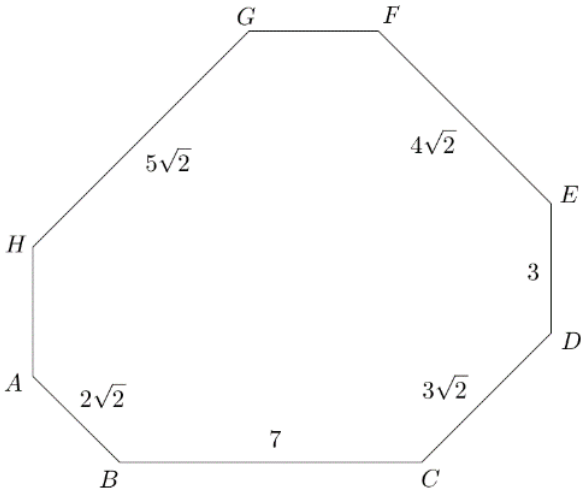
c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{3}{13}$

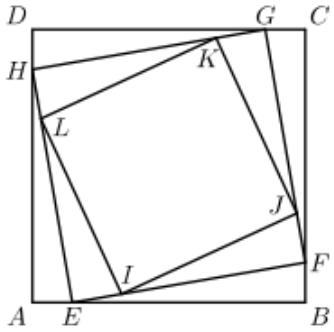
e) $\frac{2}{13}$

20. ● (OBM 2012 - 2ª fase) Seja $ABCD$ um retângulo tal que $AD = 6$ e $DC = 8$. Construa um triângulo equilátero CED tal que E, A e B estão no mesmo semi-plano determinado pela reta CD. Determine a área do triângulo AEC.

21. ● (OBM 2015 - 2ª fase) João cortou os quatro cantos de uma folha retangular e obteve um octógono equiângulo (com ângulos iguais) $ABCDEFGH$, como mostra a figura abaixo. Sabendo que $GH = 5\sqrt{2}$, $FE = 4\sqrt{2}$, $DC = 3\sqrt{2}$, $BA = 2\sqrt{2}$, $ED = 3$ e $BC = 7$, determine a área desse octógono.



22. ● (ORM 2016 - 2ª fase) Na figura abaixo, os quadriláteros $ABCD$, $EFGH$ e $IJKL$ são quadrados. Sabendo que $ABCD$ tem área $100cm^2$, $IJKL$ tem área $50cm^2$ e os triângulos EBF, FCG, GDH, HAE, IFJ, JGK, KHL e LEI têm todos a mesma área, calcule a medida do segmento KG.


D
G
C
H
K
L
J
F
I
A
E
B

Aula 7

Áreas II

7.1 Área do Círculo

Conseguimos obter a medida de área de todos os elementos estudados anteriormente através da ideia de preencimento da sua superfície com quadrados, ou suas secções, justamente porque aqueles elementos eram limitados por segmentos de reta. Mas como proceder com um círculo, cuja extremidade é a circunferência? Não há como preencher plenamente uma região circular com quadrados: por menores que sejam, haverá sempre um espaço livre.

Pensando nisso, alguns matemáticos decidiram usar uma estratégia um pouco diferentes para chegar à área do círculo. Observando polígonos regulares, eles conseguiram encontrar uma solução. Será que você seria capaz de encontrar também?

Exercício 7.1. Oberseve a figura a seguir e responda ao que se pede.

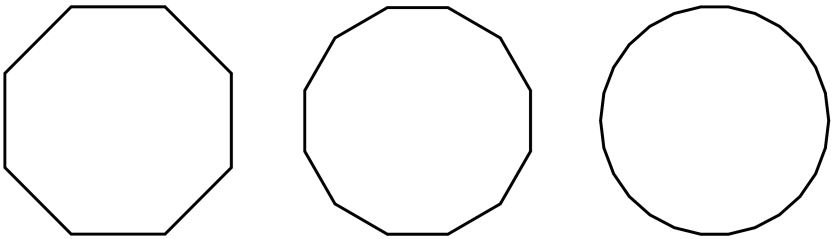


Figura 7.1: Polígonos de 8, 12 e 26 lados, respectivamente.

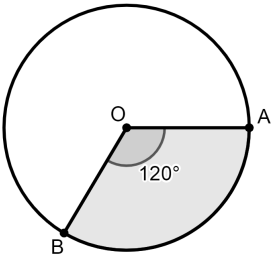
a) Parece que, quando aumentamos a quantidade de lados de um polígono regular, sua forma tende a se aproximar da forma de outra figura. Que figura é essa?

b) Poderíamos dizer que, quanto mais lados houver em um polígono regular, mais a medida da sua apótema se aproximará do raio da circunferência que o circunscreve? Por quê?

c) Sabendo disso, como poderíamos construir uma fórmula para calcular a área do círculo? E qual seria essa fórmula?

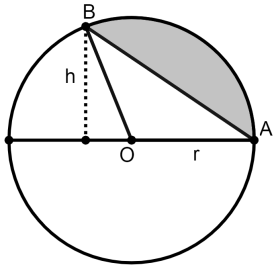
Exercício 7.2. Agora que você conseguiu encontrar uma fórmula para o cálculo da área do círculo, descubra como calcular a área dos setores de um círculo, isto é, das partes seccionadas desde os lados de um ângulo central.

Exercício de Fixação 7.1. Calcule a área do setor circular AB abaixo.

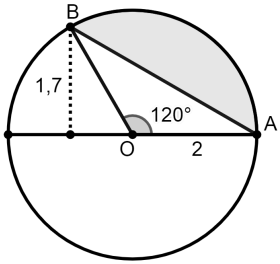


Exercício 7.3. E como poderíamos calcular a área delimitada por um segmento circular?

Veja a figura a seguir (em que O é o centro da circunferência) e tente estabeler uma fórmula para o cálculo da região sombreada.

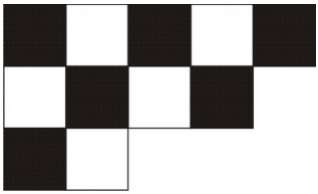


Exercício de Fixação 7.2. Calcule a área sombreada da figura a seguir.



Problemas Propostos

1. ● (OBM 2010) O desenho representa um canto de um tabuleiro retangular convencional, formado por quadradinhos de lado $1cm$. Nesse tabuleiro, 17 quadradinhos são brancos. Qual é a área do tabuleiro, em centímetros quadrados?



a) $29cm^2$

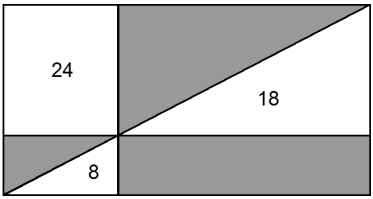
b) $34cm^2$

c) $35cm^2$

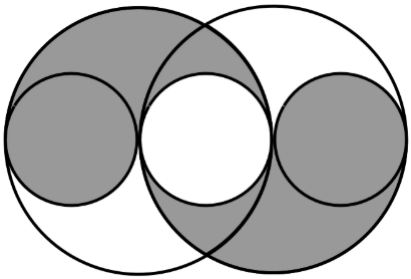
d) $40cm^2$

e) $150cm^2$

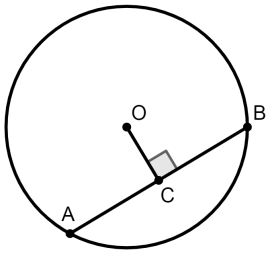
2. ● (OBM 2014) O retângulo da figura foi repartido por meio de três segmentos em várias regiões, algumas retangulares e outras triangulares. A linha não paralela aos lados é uma diagonal e os números indicam as áreas em m^2 das regiões brancas em que se encontram. Qual é a área do retângulo original?



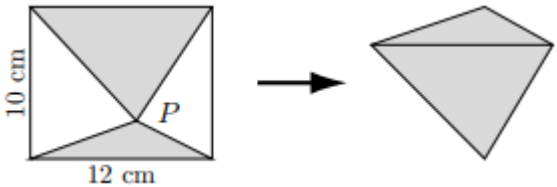
3. ● (OBMEP - Adaptada) Abaixo, veem-se círculos grandes e pequenos. Os círculos grandes têm raio 2, e os círculos pequenos têm raio 1. Qual é a área da região pintada de cinza?



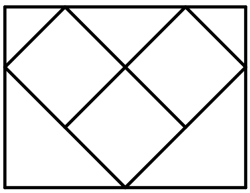
4. ● Se $\overline{OC} = 4$ e $\overline{AB} = 12$, qual é a área do círculo abaixo?



5. ● (OBMEP 2013) Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento $12cm$ e largura $10cm$. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com estes triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a área do quadrilátero?



6. ● (OBM 2007) A figura abaixo é formada por três quadrados de lado 1 e um retângulo que os contorna.



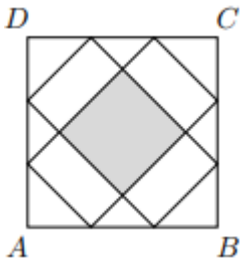
A área do retângulo é:

a) $3\sqrt{2}$
b) $4\sqrt{2}$
c) 6

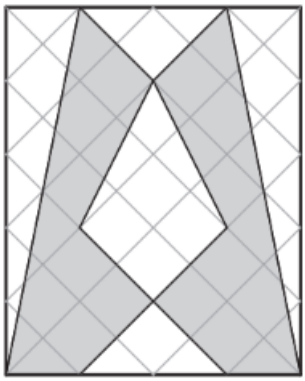
d) $6\sqrt{2}$

e) 8

7. ● Na figura a seguir, $ABCD$ é um quadrado de lado 18. Sobre cada um dos seus lados estão marcados dois pontos que dividem o lado do quadrado em 3 partes iguais. Traçando alguns segmentos que unem estes pontos, foi obtida a seguinte figura. Qual é a área do quadrado sombreado?



8. ● O retângulo abaixo, que foi recortado de uma folha de papel quadriculada, mede $4cm$ de largura por $5cm$ de altura. Qual é a área da região cinzenta?



a) $10cm^2$

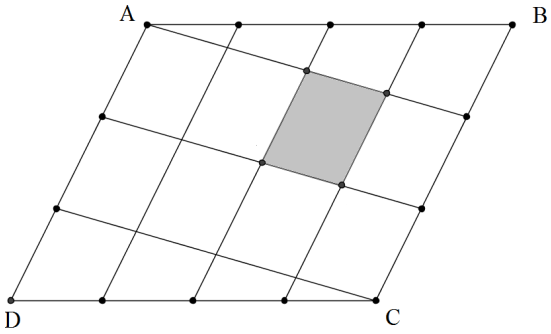
b) $11cm^2$

c) $12,5cm^2$

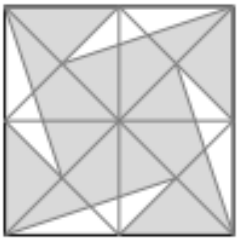
d) $13cm^2$

e) $14,5cm^2$

9. ● (OBM 2012) Os lados AB e DC do paralelogramo $ABCD$ foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados AD e BC foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados, como indica a figura abaixo. Se a área de $ABCD$ é 84, determine a área sombreada.

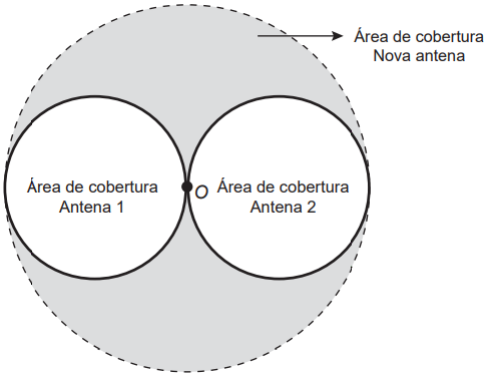


10. ● (OBMEP 2010) A figura mostra um quadrado com suas diagonais e segmentos que unem os pontos médios de seus lados. A área sombreada corresponde a que fração da área do quadrado?



11. ● (ENEM 2015) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente.

As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio $2km$, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a) 8π

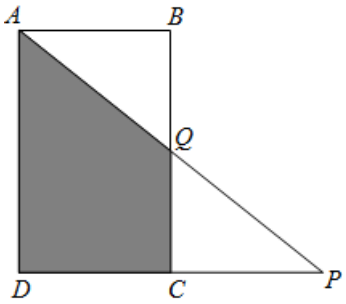
b) 12π

c) 16π

d) 32π

e) 64π

12. ● (OBM 2009) Na figura, P é um ponto da reta CD. A região cinza é comum ao retângulo $ABCD$ e ao triângulo ADP. Se $AB = 5cm$, $AD = 8cm$ e a área da região cinza é $\frac{3}{4}$ da área do retângulo, quanto vale a distância PC? (Dica: use a ideia de triângulos semelhantes)



a) $1cm$

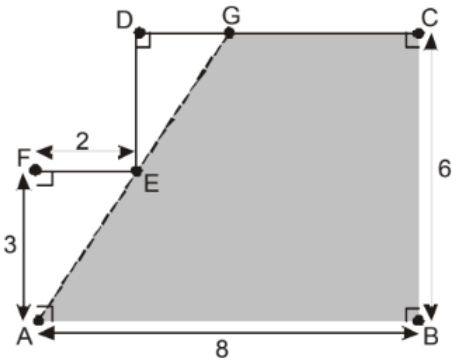
b) $2cm$

c) $3cm$

d) $4cm$

e) $5cm$

13. ● (OBMEP 2005) A figura mostra um polígono $ABCDEF$ no qual dois lados consecutivos quaisquer são perpendiculares. O ponto G está sobre o lado CD e sobre a reta que passa por A e E. Os comprimentos de alguns lados estão indicados em centímetros. Qual é a área do polígono $ABCG$?



a) $36cm^2$

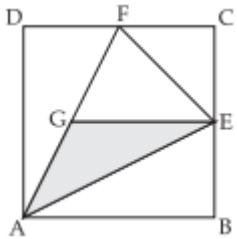
b) $37cm^2$

c) $38cm^2$

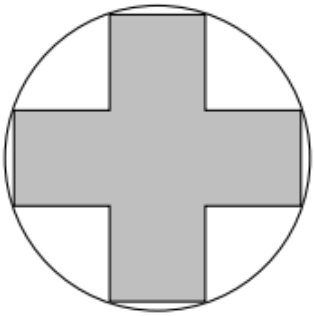
d) $39cm^2$

e) $40cm^2$

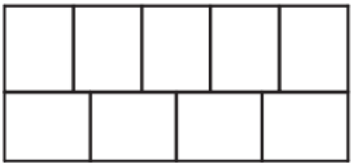
14. ● (ORM 2008 - Adaptada) O quadrado ABCD tem lado igual a 1, e os pontos E e F são pontos médios dos lados BC e CD, respectivamente. O segmento EG é paralelo ao lado AB do quadrado. Calcule a área do triângulo AEG.



15. ● (ORM 2019 - Adaptada) Na figura abaixo, o polígono sombreado tem todos os lados de comprimento $1cm$. Qual é a área do círculo?



16. ● (OBMEP 2010) A figura mostra um retângulo de área $720cm^2$, formado por nove retângulos menores e iguais. Qual é o perímetro, em centímetros, de um dos retângulos menores?



a) 20

b) 24

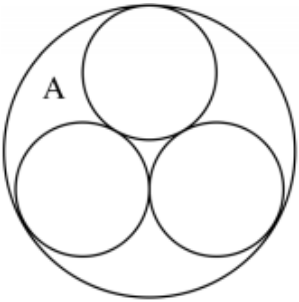
c) 30

d) 36

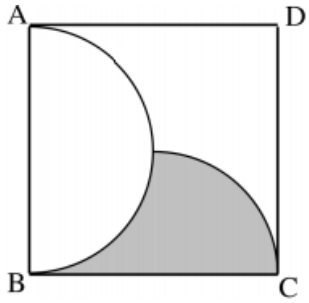
e) 48

17. ● No triângulo ABC de área 1, as medianas BM e CN cortam-se em G. Qual é a área do triângulo BMN?

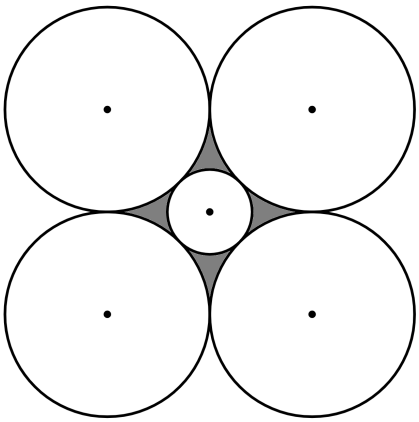
18. ● A figura a seguir mostra três circunferências de raios iguais a 1, tangentes entre si duas a duas, e uma circunferência maior tangente às três primeiras. Calcule a área da região A. (Dica: a distância do centro do triângulo equilátero a cada um dos vértices é igual a $\frac{2}{3}$ do valor da sua altura.)



19. ● No interior do quadrado $ABCD$ de lado 1 da figura abaixo, foram traçadas as semicircunferências de diâmetros AB e BC. Qual é o valor da área sombreada?

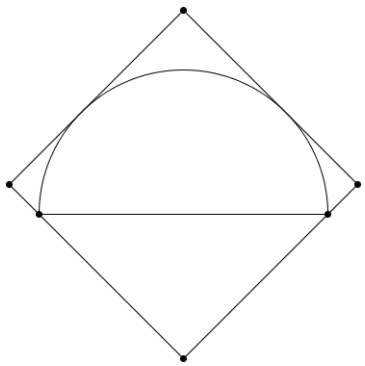


20. ● (UFRJ 2001) As cinco circunferências da figura são tais que a interior tangencia as outras quatro e cada uma das exteriores também tangencia duas das demais exteriores. Sabendo que as circunferências exteriores têm todas raio 1, calcule a área da região sombreada situada entre as cinco circunferências.



21. ● (Olimpíada de Maio) $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero. N é o ponto do lado AC tal que $AC = 7AN$, M é o ponto do lado AB tal que MN é paralelo a BC e P o ponto do lado BC tal que MP é paralelo a AC. Determine o valor da razão $\frac{área(MNP)}{área(ABC)}$. (Dica: use a ideia de razão entre áreas de triângulos semelhantes)

22. ● (OBM 2012) Na figura abaixo temos um semicírculo de raio 1 inscrito em um quadrado de modo que seu centro passe por uma das diagonais do quadrado. Qual é a área do quadrado? (Dica: a diagonal do quadrado pode nos ajudar a encontrar a sua área)



a) $\frac{3}{2} + \sqrt{2}$

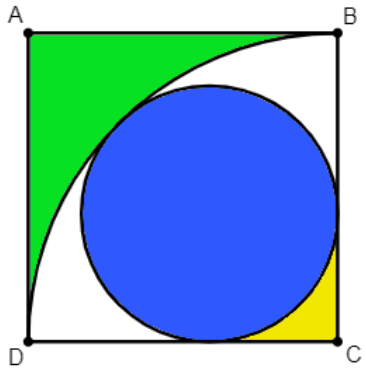
b) $1 + 2\sqrt{2}$

c) $5 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) 4

e) $\frac{2}{3} + \sqrt{2}$

23. ● (Simulado POTI/UFPR - 2021) Na figura abaixo, temos o quadrado ABCD, de lado 1, que contém o arco DB, de centro em C, e o círculo azul, cuja circunferência tangencia $\overline{DC}$, $\overline{CB}$ e o arco DB. Com base nisso, responda:

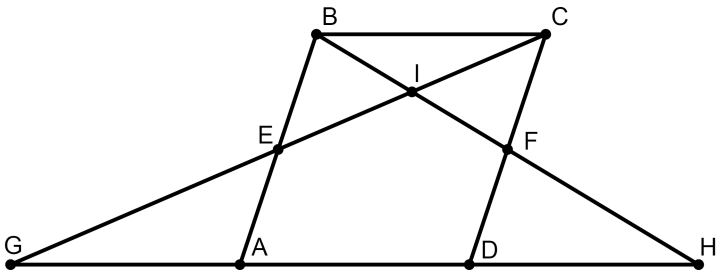


(a) Qual é a área da região verde?

(b) Qual é a área do círculo azul?

(c) Qual é a área da região amarela?

24. ● (OBMEP 2018) Na figura abaixo, $ABCD$ é um paralelogramo. O ponto E é ponto médio de AB, e F é ponto médio de CD. Qual é a razão entre a área do triângulo GIH e a área do paralelogramo $ABCD$?



a) $\frac{9}{8}$

b) $\frac{5}{4}$

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{2}$

e) 2

25. ● (ORM 2012 - 2ª fase - Adaptada) Um polígono em forma de cruz (Figura 1) é rotacionado em torno de seu centro de um ângulo de 45°, resultando na Figura 2 abaixo. Calcule a área contornada em negrito da figura 2.

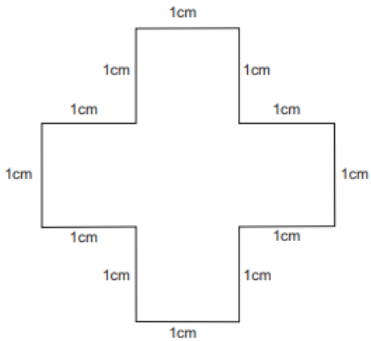


Figura 1

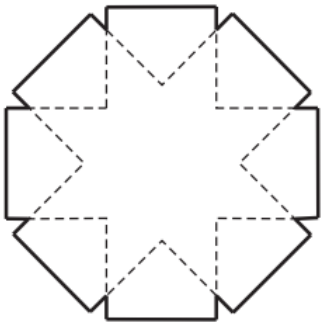
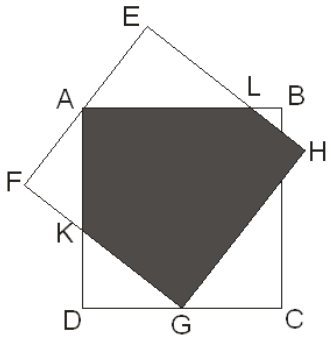


Figura 2

26. ● (*O problema de Hipócrates*) A figura a seguir mostra um triângulo retângulo e três semicircunferências tendo os lados como diâmetros. Mostre que a soma das áreas das duas "lúnulas" sombreadas é igual à área do triângulo.

27. ● (OBM 2009 - 2ª fase) Na figura abaixo, $ABCD$ e $EFGH$ são quadrados de lado $48cm$. Sabendo que A é o ponto médio de EF e G é o ponto médio de DC, determine a área destacada em cm^2.


E
A
L
B
H
F
K
D
G
C

Aula 8

Pontos Notáveis do Triângulo

Os *Pontos Notáveis do Triângulo* são os pontos obtidos a partir da intersecção de alguns segmentos comuns a todos os triângulos. Para que possamos estudá-los, precisamos ver quais são esses segmentos.

8.1 Cevianas

Podemos definir *ceviana* como sendo um segmento que parte de qualquer vértice de um triângulo e encontra o lado oposto a esse vértice ou encontra o prolongamento do lado oposto a esse vértice.

Nota 1. Chamamos o prolongamento de um segmento de reta de "reta suporte" (ou simplesmente "suporte").

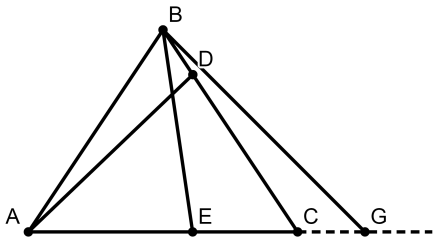


Figura 8.1: Dado o triângulo $\triangle ABC$, $\overline{AD}$, $\overline{BG}$ e $\overline{BE}$ são cevianas.

Há cevianas muito famosas, algumas inclusive que já estudamos, como veremos a seguir.

8.1.1 Mediana

A *mediana* do triângulo é um segmento que parte de um de seus vértices e encontra o ponto médio do lado oposto a esse vértice.

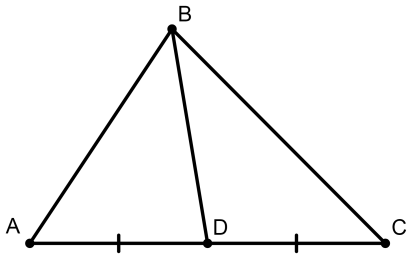


Figura 8.2: Dado o triângulo $\triangle ABC$, $\overline{BD}$ é uma mediana.

Exercício de Aprofundamento 8.1. Prove que a mediana de um triângulo que está entre dois de seus lados diferentes forma um ângulo maior com o menor desses dois lados.

8.1.2 Bissetriz Interna do Triângulo

A *bissetriz interna do triângulo* é um segmento que parte de um de seus vértices, dividindo o seu ângulo em dois ângulos congruentes, e alcança o lado oposto a esse vértice.

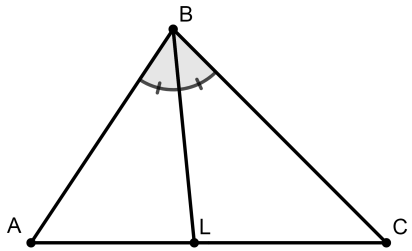


Figura 8.3: Dado o triângulo $\triangle ABC$, $\overline{BL}$ é uma bissetriz interna.

Exercício de Aprofundamento 8.2. Duas bissetrizes em um triângulo podem ser perpendiculares?

Exercício de Aprofundamento 8.3. (Teorema da Bissetriz Interna) Mostre que a bissetriz $\overline{AL}$ de um triângulo $\triangle ABC$, sendo L um ponto do lado $\overline{BC}$, gera segmentos $\overline{BL}$ e $\overline{LC}$ proporcionais aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, ou seja, $\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$.

8.1.3 Altura do Triângulo

A *altura do triângulo* é um segmento que, além de partir de um dos lados do triângulo (ou seu suporte), é perpendicular a esse lado (ou suporte) e encontra o seu vértice oposto.

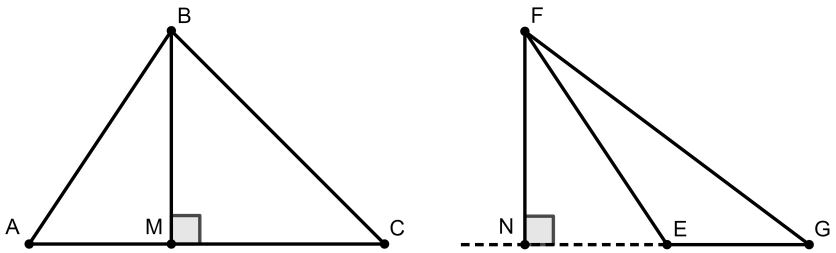


Figura 8.4: Dados os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle EFG$, $\overline{BM}$ e $\overline{FN}$ são, respectivamente, alturas.

Exercício de Aprofundamento 8.4. Existe um triângulo tal que a soma das suas alturas seja maior do que a soma das duas bases correspondentes?

8.2 Mediatriz do Triângulo

A *mediatriz do triângulo* é uma reta que, além de perpendicular a um de seus lados, divide esse mesmo lado em dois segmentos congruentes.

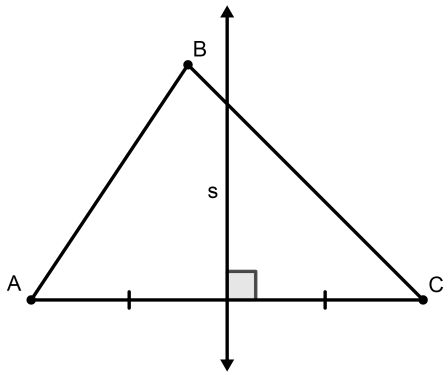


Figura 8.5: Dado o triângulo $\triangle ABC$, a reta s é uma mediatriz.

8.3 Pontos Notáveis do Triângulo

8.3.1 Baricentro

O *baricentro* é o ponto de encontro das três medianas do triângulo.

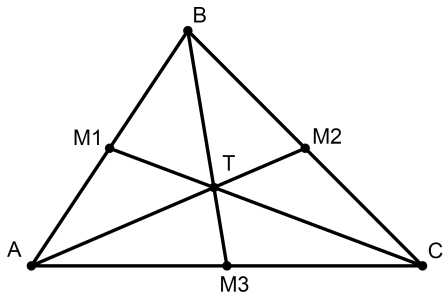


Figura 8.6: Dado o triângulo $\triangle ABC$, com M_1, M_2 e M_3 sendo, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, então T é o baricentro.

Nota 2. O baricentro é o "centro de gravidade" do triângulo.

Exercício de Aprofundamento 8.5. Mostre que o baricentro de um triângulo divide cada mediana em duas partes tais que aquela que contém o vértice é o dobro da outra.

Exercício 8.1. Tome o triângulo da figura acima e considere o seguinte: $\overline{M_1T} = 3$. Qual a medida de $\overline{TC}$?

Exercício 8.2. Considere um triângulo $\triangle ABC$ tal que as medianas $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$, que se cortam em G, sejam congruentes. Mostre que:

a) $\overline{BG} = \overline{CG}$;

b) $\triangle CGD = \triangle BGE$;

c) o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles.

8.3.2 Incentro

O *incentro* é o ponto de encontro das três bissetrizes internas do triângulo.

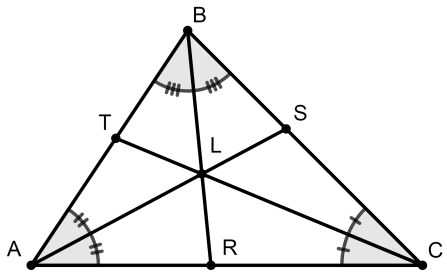
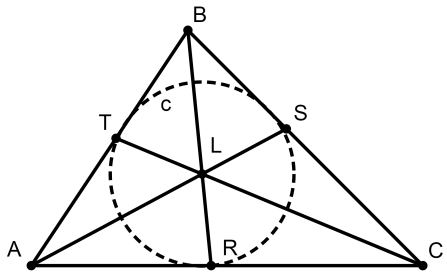


Figura 8.7: Dado o triângulo $\triangle ABC$, L é o incentro.

Exercício de Aprofundamento 8.6. Seja a figura abaixo. Mostre que, se $\overline{AS}$, $\overline{BR}$ e $\overline{CT}$ são as bissetrizes internas de $\triangle ABC$, então L (a intersecção dessas bissetrizes) está a igual distância dos lados de $\triangle ABC$. Conclua dizendo que L é o centro da circunferência c inscrita no triângulo em questão.



Exercício 8.3. Mostre que a área de um triângulo pode ser calculada como o produto do seu semiperímetro pelo raio de sua circunferência inscrita.

8.3.3 Ortocentro

O *ortocentro* é o encontro das retas suportes das alturas do triângulo.

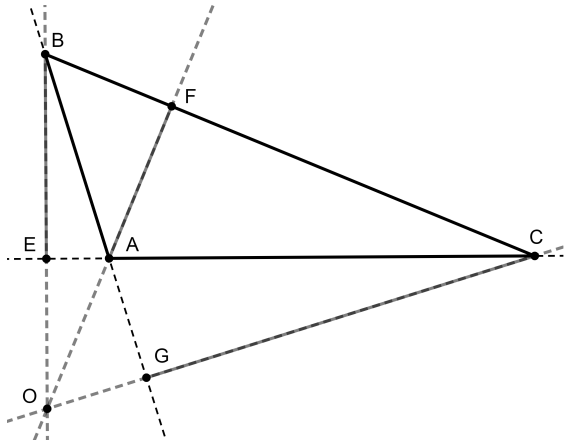


Figura 8.8: Dado o triângulo $\triangle ABC$, com $\overline{BE}$, $\overline{AF}$ e $\overline{CG}$ sendo as suas alturas e $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{CG}$, as respectivas retas suportes, então o ponto O é o ortocentro.

Exercício 8.4. Quais as condições para que o ortocentro seja interno ao triângulo?

Exercício 8.5. Sendo H o ortocentro do triângulo $\triangle ABC$ e $B\hat{H}C = 150°$, determine $B\hat{A}C$.

Exercício de Aprofundamento 8.7. Mostre que, em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$, o ortocentro é incentro do seu triângulo órtico (isto é, incentro do triângulo cujos vértices são os pés das alturas de $\triangle ABC$).

8.3.4 Circuncentro

O *circuncentro* é o encontro das mediatrizes do triângulo.

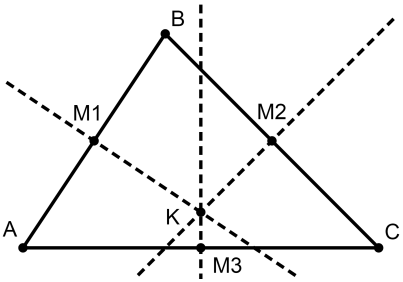


Figura 8.9: Dado o triângulo $\triangle ABC$, com M_1, M_2 e M_3 sendo, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ e $\overleftrightarrow{M_1K}$, $\overleftrightarrow{M_2K}$ e $\overleftrightarrow{M_3K}$, retas perpendiculares, respectivamente, a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, então K é o circuncentro de $\triangle ABC$.

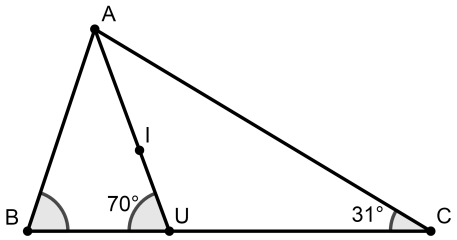
Exercício de Aprofundamento 8.8. Mostre que o circuncentro está a igual distância dos vértices do triângulo - e conclua dizendo que ele também é o centro da circunferência que o circunscreve.

Exercício de Aprofundamento 8.9. Seja o centro de um círculo circunscrito em um triângulo o ponto médio de um dos lados do triângulo. Prove que esse triângulo é um triângulo retângulo.

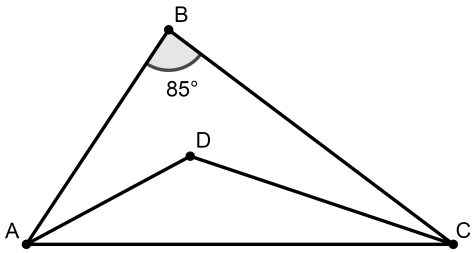
Exercício de Aprofundamento 8.10. Prove que um círculo construído com um dos lados iguais de um triângulo isósceles como diâmetro contém o ponto médio do terceiro lado.

Problemas Propostos

1. ● Seja o triângulo $\triangle ABC$ da figura abaixo. Considere I o seu incentro, $A\hat{U}B = 70°$ e $A\hat{C}U = 31°$. Determine qual a medida de $A\hat{B}U$.



2. ● Dada a figura abaixo, com $A\hat{B}C = 85°$ e D sendo o incentro de $\triangle ABC$, qual o valor de $A\hat{D}C$?



a) $145°$

b) $136,5°$

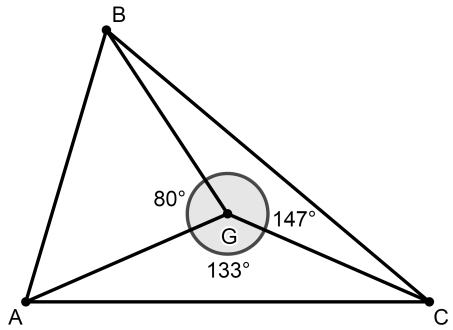
c) $137,5°$

d) $118,5°$

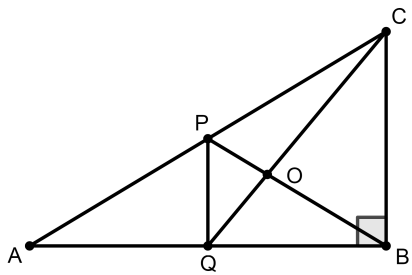
e) $150°$

3. ● Em um triângulo $\triangle ABC$, as três mediatrizes fazem entre si três ângulos iguais a $120°$. Mostre que esse triângulo é equilátero.

4. ● No triângulo $\triangle ABC$ da figura abaixo, G é o circuncentro. Determine os ângulos internos de $\triangle ABC$.

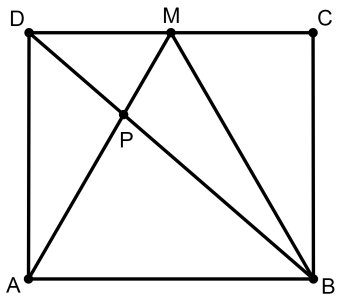


5. ● Na figura, Q é o ponto médio de $\overline{AB}$ e $\overline{QP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Sendo $\overline{AC} = 30cm$, determine $\overline{PO}$.

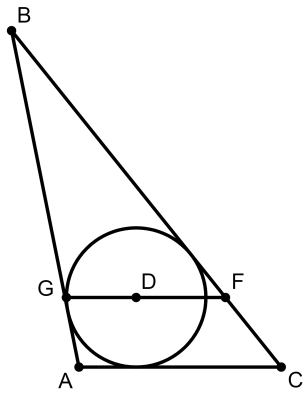


6. ● Um triângulo equilátero $\triangle AKB$ foi construído fora do quadrado $ABCD$ com lado $\overline{AB}$. Encontre o raio do círculo circunscrito em torno do triângulo $\triangle CKD$, se $\overline{AB} = 1$.

7. ● Na figura, $ABCD$ é retângulo, M é o ponto médio de $\overline{CD}$ e o triângulo $\triangle ABM$ é equilátero. Sendo $\overline{AB} = 15$, calcule $\overline{AP}$.



8. ● Determine o perímetro do triângulo $\triangle BGF$ da figura, onde $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem $15cm$ e $20cm$, respectivamente, $\overline{GF}$ é paralelo a $\overline{AC}$ e D é o centro da circunferência inscrita em $\triangle ABC$.



9. ● (OPM) No triângulo ABC, as medianas dos lados AB e AC são perpendiculares. Sabendo que $AB = 6$ e $AC = 8$, determine BC.

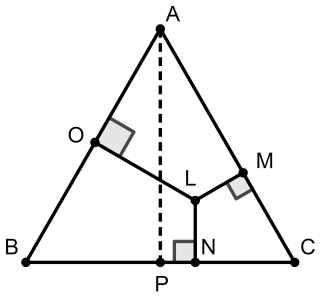
10. ● (OBM 2010) As bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ do triângulo $\triangle ABC$ cortam-se no ponto I. Sabe-se que $AI = BC$ e que $m(I\hat{C}A) = 2m(I\hat{A}C)$. Determine a medida do ângulo $A\hat{B}C$.

11. ● (OBM 2007) O triângulo ABC é retângulo em B. Sejam I o centro da circunferência inscrita em ABC e O o ponto médio

do lado AC. Se $A\hat{O}I = 45°$, quanto mede, em graus, o ângulo $A\hat{C}B$?

12. ● (OBM 2007) Seja ABC um triângulo e O o seu circuncentro. Seja ainda P a intersecção das retas BO e AC e S a circunferência circunscrita a AOP. Suponha que $BO = AP$ e que a medida do arco OP em S que não contém A é $40°$. Determine a medida do ângulo $O\hat{B}C$.

13. ● (Teorema de Viviani) Sejam L um ponto qualquer no interior de um triângulo equilátero $\triangle ABC$ e P o ponto médio de $\overline{BC}$. Prove que a soma das distâncias de L aos três lados de $\triangle ABC$ é constante e igual às alturas de $\triangle ABC$ (isto é, prove que $\overline{OL} + \overline{ML} + \overline{NL} = \overline{AP}$).

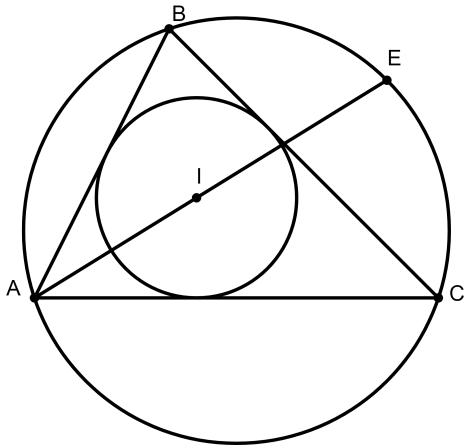


14. ● (OBM 1998) Em um triângulo acutângulo $\triangle ABC$, o ângulo interno de vértice A mede 300. Os pontos B_1 e C_1 são os pés das alturas traçadas por B e C, respectivamente, e os pontos B_2 e C_2 são médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

15. ● (OBM 2010) Seja $ABCD$ um paralelogramo e Γ a circunferência circunscrita ao triângulo $\triangle ABD$. Se E e F são as interseções de Γ com as retas BC e CD respectivamente, prove que o circuncentro do triângulo $\triangle CEF$ está sobre Γ.

16. ● Em um triângulo ABC com incentro I, a bissetriz interna do ângulo A encontra a circunferência circunscrita em E. Prove

que $EB = EC = EI$.

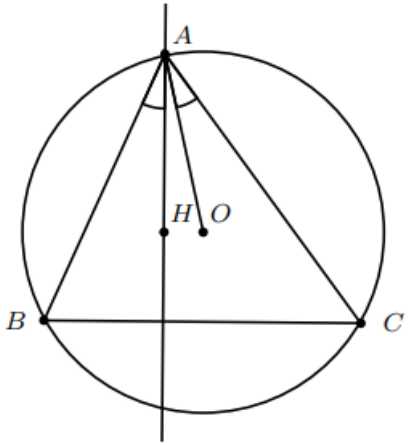


17. ● (OBM 2018) Seja ABC um triângulo acutângulo de circuncentro O e ortocentro H. A circunferência de centro X_A passa pelos pontos A e H e tangencia o circuncírculo do triângulo ABC. Defina de maneira análoga os pontos X_B e X_C. Sejam O_A, O_B e O_C os simétricos de O em relação aos lados BC, CA e AB, respectivamente. Prove que as retas O_AX_A, O_BX_B e O_CX_C são concorrentes.

18. ● (OBM 2017) No triângulo $\triangle ABC$, com $AB \neq AC$, seja I seu incentro. Os pontos P e Q são definidos como pontos onde o circuncírculo do triângulo $\triangle BCI$ intersecta novamente as retas AB e AC, respectivamente. Seja D o ponto de intersecção de AI e BC.

    a) Prove que P, Q e D são colineares;
    b) Sendo T, diferente de P, o ponto de encontro dos circuncírculos dos triângulos $\triangle PDB$ e $\triangle QDC$, prove que T está no circuncírculo do triângulo $\triangle ABC$.

19. ● Sejam H o ortocentro e O o circuncentro de $\triangle ABC$, mostre que $H\hat{A}B = O\hat{A}C$.



20. ● (OBM 2014) Sejam AB um diâmetro da circunferência Γ e CD uma corda perpendicular a tal diâmetro. Sejam ainda E o ponto de interseção entre CD e AB e P um ponto qualquer sobre a corda CD diferente de E. As retas AP e BP intersectam Γ novamente em F e G, respectivamente. Se O é o circuncírculo do triângulo EFG, mostre que a área do triângulo OCD é sempre a mesma para qualquer que seja o ponto P escolhido.

21. ● (Cyberspace Mathematical Competition 2020) Seja $\triangle ABC$ um triângulo tal que $\overline{AB} > \overline{BC}$ e seja D um ponto variável sobre o segmento de reta $\overline{BC}$. Seja E um ponto sobre a circunferência circunscrita do triângulo $\triangle ABC$ no semiplano oposto de A em relação a $\overline{BC}$ tal que $B\hat{A}E = D\hat{A}C$. Seja I o incentro do triângulo $\triangle ABD$ e seja J o incentro do triângulo $\triangle ACE$. Prove que a reta $\overleftrightarrow{IJ}$ passa por um ponto fixo que não depende de D.

Referências Bibliográficas

1. DOLCE, O; POMPEO, J. N. *Geometria Plana.* Coleção Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 9, 5 ed., São Paulo: Atual, 1993.

2. DORICHENKO, S. *Círculo Matemático, Problemas Semana-a-Semana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

3. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

4. LEHOCZKY, S; RUSCZKY, R. N. *The Art of Problem Solving.* Vol. 1, 7 ed., Alpine: David Patrick, 2006.