Teoria de Números POTI/TOPMAT UFPR

Nível 2

3ª edição

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral:	Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam
Coordenadores:	Fernanda de Oliveira de Jesus Leonardo Knelsen Mahmut Telles Cansiz
Site:	http://poti.ufpr.br/
E-mail:	poti@ufpr.br
Capa:	Luciana Laroca
Impressão:	Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de produzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinco e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

Prof. Dr. José Carlos Eidam
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024
Departamento de Matemática - UFPR
Janeiro de 2024

Sumário

Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo “eu já sei, já estudei isso”. Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

Equipe POTI/TOPMAT
Nível 2
2024

Aula 1

As Operações Aritméticas

Neste nosso primeiro passo no estudo de *Teoria de Números* trabalharemos conteúdos com os quais você está familiarizado há bastante tempo. Você verá como, partindo apenas das quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão), já podemos formular problemas interessantes, e alguns até desafiadores.

1.1 Intuição Aritmética

Comecemos com um problema que exigirá de você boa *intuição aritmética.*

Exercício Resolvido 1.1. Escreva o número 1991 usando apenas algarismos "4". Você pode usar tantas operações de soma, subtração, multiplicação e divisão quanto forem necessárias.

A título de exemplo, o número 632 poderia ser escrito como

$$444 + 4 \times \left(44 + 4 - \frac{4}{4}\right).$$

Resolução: Não há propriamente um método (um passo a passo) para resolver este exercício. Você deve testar combinações adequadas de "4" e dos símbolos de $+, -, \times$, e $\div$ de modo a obter 1991. Mas, quanto melhor for sua percepção mental aritmética, menos testes você precisará fazer e, assim, mais rapidamente chegará à resposta.

Um modo de produzir o 1991 seria:

$$1991 = \frac{4444}{4} + (444 - 4) \times \left(\frac{4+4}{4}\right).$$

Será que você conseguiria chegar ao 1991 de um modo mais simples, usando uma menor quantidade de algarismos 4 ou de operações aritméticas? $\square$

Exercícios Propostos

Exercite sua intuição numérica. Nos itens abaixo você deve colocar apenas os sinais de $+, -, \times, \div$ e os parênteses (cada um desses sinais pode ser usado mais de uma vez ou não ser usado) entre os algarismos de modo que:

a) 88888888 torne-se 100.

b) $\underbrace{55555555555555555555}_{\text{20 algarismos 5}}$ torne-se 1000.

c) 1234567 torne-se 100.

d) 1984 torne-se 4.

e) 1984 torne-se 5.

f) 123456789 torne-se 72.

g) 123456789 torne-se 453.

1.2 Dígitos Escondidos

Normalmente em exercícios de Aritmética são dados alguns números e lhe pedem para fazer contas com eles: muito fácil! Na pior das hipóteses você terá algum trabalho para chegar ao resultado. Porém, o processo pode ser *invertido*: apresenta-se a conta montada (mas, com os dígitos dos números escondidos por símbolos) e, a partir dela, você deve descobrir quais são os números envolvidos. Agora já não fica tão simples...

Vamos a esse tipo de problema que já virou um clássico em olimpíadas de matemática.

Exercício Resolvido 1.2. Na operação abaixo, as letras a, b e c representam algarismos distintos. Determine os números envolvidos.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & b \\ \times & & & c \\ \hline b & c & b & 1 \end{array}$$

Resolução: A conta está montada e precisamos encontrar quais números estão nela. Para isso, temos de descobrir os dígitos que estão escondidos sob as letras a, b e c.

Primeiramente, note que os dígitos (algarismos) a, b e c são números naturais entre 0 e 9: portanto, nossa análise sobre eles está restrita a esse intervalo.

Analisemos a estrutura da conta. $c \times b$ deve terminar em 1: as únicas possibilidades para o valor do par (c, b) são os pares (1,1), (9,9) e (3,7) (verifique isso!). Os dois primeiros podem ser desconsiderados porque, de acordo com o enunciado, os algarismos devem ser distintos. Assim, resta apenas (3,7). Logo, há duas possibilidades:

(i) $c = 3$ e $b = 7$;

(ii) $c = 7$ e $b = 3$.

Se (i) fosse verdadeiro, a conta dada no enunciado ficaria assim ao substituir os valores de c e b:

$$\begin{array}{cccc} & a & 7 & 7 \\ \times & & & 3 \\ \hline 7 & 3 & 7 & 1 \end{array}$$

Veja que essa conta está claramente errada! Portanto, como não vale (i), deve valer (ii), ou seja, podemos assegurar que $c = 7$ e $b = 3$. Para facilitar o resto da análise, vamos substituir esses valores na conta original:

$$\begin{array}{cccc} & a & 3 & 3 \\ \times & & & 7 \\ \hline 3 & 7 & 3 & 1 \end{array}$$

Agora fica fácil descobrir o valor de a. Como na conta vai 2 em cima do a, devemos ter que

$$7 \times a + 2 = 37 \Rightarrow a = 5$$

Portanto, descobrimos que $a = 5$, $b = 3$ e $c = 7$. Logo, os números envolvidos na conta e que estavam escondidos sob as letras são (de cima para baixo): 533, 7 e 3731. $\square$

Exercícios Propostos

1. Encontre os números (cujos dígitos estão escondidos sob letras) nas seguintes contas:

   a)

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{B} \\ \times & & & \mathrm{A} \\ \hline & \mathrm{A} & \mathrm{B} & 7 \end{array}$$

   b) (Cada letra representa um algarismo diferente)

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \times & & & \mathrm{C} \\ \hline 1 & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{C} \end{array}$$

c) (A, B e C representam dígitos não nulos)

$$\begin{array}{ccc} & A & B \\ + & B & C \\ \hline A & A & A \end{array}$$

d) (Cada letra representa um algarismo diferente)

$$\begin{array}{ccc} A & B & A \\ - & C & A \\ \hline & A & B \end{array}$$

2. Explique por que *nenhum valor* para as letras tornaria correta a conta abaixo:

$$\begin{array}{cccccc} & & & M & N & C \\ & & \times & R & S & C \\ \hline D & E & F & G & H & 7 \end{array}$$

3. O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. Qual é número N?

4. Encontre *todos os valores* para os dígitos A, B e C (diferentes de zero) que tornam correta a equação abaixo:

$$\begin{array}{cccc} A & B & B & C \\ + & A & B & B \\ \hline C & A & B & A \end{array}$$

1.3 Contas Gigantes: Identificando Padrões

Você está acostumado com contas de mais, menos, multiplicação e divisão. Mas, e se elas envolverem números *muito* grandes?

Exercício Resolvido 1.3. Qual é a diferença entre o maior e o menor dos seguintes números:

$$2222222 \times 9999999 \quad \text{e} \quad 6666666 \times 3333334\ ?$$

Resolução: Talvez o seu primeiro impulso aqui seja sair fazendo as contas de multiplicação (2222222×9999999 e 6666666×3333334) para depois fazer a subtração desses dois números, tudo isso usando os métodos que você aprendeu quando criança. Mas não faça isso! Você gastará *muito* tempo em contas tediosas e fatalmente errará algum passo, comprometendo o resultado final. Se lhe pedirem para fazer uma conta gigantesca destas numa olimpíada de matemática, pode ter certeza de que o propósito de quem elaborou a questão não é que você faça a conta diretamente, mas que *primeiro encontre algum padrão que a facilite.*

Na verdade, isto vale para qualquer problema de matemática que pareça muito trabalhoso: ao invés de seguir pelo caminho automático e preguiçoso de já sair resolvendo-o do modo que lhe é mais familiar, você deve primeiro raciocinar, esforçando-se para encontrar algum padrão que esteja na base do problema; como recompensa, você precisará trabalhar muito menos para chegar à resposta.

Voltemos então ao problema. Perceba que

$$2222222 = 2 \times 1111111$$

$$9999999 = 9 \times 1111111$$

$$6666666 = 6 \times 1111111$$

$$3333334 = 3333333 + 1 = 3 \times 1111111 + 1.$$

Assim, vemos que o número 1111111 aparece em todas as parcelas das contas dadas no enunciado: temos aqui o padrão que procurávamos. Vamos então reescrever os números do enunciado, mas, para não ter que ficar repetindo "1111111" toda vez, vamos chamá-lo simplesmente de "A", ou seja, façamos 1111111 = A[1]:

$$2222222 \times 9999999 = (2 \times A) \times (9 \times A) = 18A^2$$

$$6666666 \times 3333334 = (6 \times A) \times (3 \times A + 1) = 18A^2 + 6A.$$

[1]Este é um recurso muito conveniente em cálculos: substituir um número ou expressão numérica extensos (e que apareçam em várias partes da conta) por uma letra e, assim, tornar a conta mais limpa, o que reduz a possibilidade de errar.

Portanto, 6666666×3333334 é maior do que 2222222×9999999 e a diferença entre eles é $6A = 6 \times 1111111 = 6666666$. $\square$

Preste atenção à estratégia adotada na resolução: primeiro encontramos um número que estava escondido nos números originais do enunciado (percebemos o 1111111) e depois substituímos esse número por uma letra, para visualizar melhor as contas (fizemos $1111111 = A$). Procedendo do mesmo modo, podemos efetuar com relativamente pouco trabalho contas enormes, como as do exercício.

Exercícios Propostos

1. Descubra a diferença entre o maior e o menor dos seguintes números:

$$\underbrace{333...333}_{100 \text{ dígitos } 3} \times \underbrace{444...444}_{100 \text{ dígitos } 4} \text{ e } \underbrace{222...222}_{100 \text{ dígitos } 2} \times \underbrace{666...66}_{99 \text{ dígitos } 6}7$$

2. Calcule:

$$44445 \times 44444 + 66666 - (88888 \times 22222 + 11)$$

3. Qual é o valor da expressão

$$20112011^2 + 20112003^2 - 16 \times 20112007?$$

a) 2×20112007^2 c) 2×20112003^2 e) 2×20112007
b) 2×20112003 d) 2×20112011^2

***

Assim como pudemos encontrar padrões que simplificaram contas de multiplicação entre números gigantes, tentemos o mesmo para *somas* gigantescas.

Talvez você já tenha ouvido a história do menino Gauss. Conta-se que o matemático Carl Friedrich Gauss era uma criança genial mas um pouco arteira: terminava as tarefas antes de todo mundo e começava a fazer bagunça em sala de aula. O professor de Gauss resolveu então passar um exercício que deveria mantê-lo ocupado (e quieto) por bastante tempo: calcular a soma dos 100 primeiros números, ou seja, fazer $1 + 2 + \cdots + 100$. Porém, para espanto do professor, não deram dois minutos e o menino já chegou à resposta! Como será que ele conseguiu?

Olhemos novamente para a soma:

$$1 + 2 + \cdots + 99 + 100.$$

Antes de sair fazendo as contas sem pensar (aquele caminho automático e preguiçoso...), tomemos a soma sob um outro aspecto: vamos considerá-la de trás para frente $(100 + ... + 1)$ e colocá-la abaixo da primeira soma:

$$\begin{gathered} 1 + 2 + \cdots + 99 + 100 \\ 100 + 99 + \cdots + 2 + 1. \end{gathered}$$

Agora, ao invés de somarmos os números no interior de cada soma, vamos somar o primeiro termo da soma de cima (1) com o primeiro termo da soma de baixo (100), o segundo da de cima (2) com o segundo da de baixo (99) e assim por diante:

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

Como cada soma tem 100 parcelas, o número 101 aparece 100 vezes, ou seja, o resultado será 100×101. Mas, 100×101 é o que obtemos somando $1 + 2 + ... + 100$ *duas vezes*: para compensar, temos de dividir esse resultado por 2. Logo,

$$1 + 2 + ... + 100 = \frac{100 \times 101}{2}.$$

Portanto, o menino Gauss só precisou efetuar $\frac{100 \times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$ e logo dizer ao professor a resposta.

Ora, podemos aplicar o mesmo raciocínio para descobrir a soma dos 200, 450, 1288, ..., primeiros números: enfim, a soma dos n primeiros números, sendo n um número natural qualquer. Obtemos assim a seguinte fórmula:

$$\boxed{1 + 2 + ... + n = \tfrac{n \times (n+1)}{2}} \tag{1.1}$$

Essa fórmula é muito útil para a resolução de diversos problemas de olimpíada. É importante que você a memorize, ou então lembre do raciocínio pelo qual se chega a ela.

Exercícios Propostos

1. Calcule:
   a) A soma dos 2020 primeiros números naturais.
   b) $2021 + 2022 + 2023 + ... + 6750$.
   c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 899 - 900$.

2. Como o menino Gauss voltou a bagunçar em sala, o professor achou que podia enfim desafiá-lo e obrigá-lo a ficar quieto. Ele perguntou:

   — Qual é a soma dos 100 primeiros *ímpares*? E dos 200 primeiros múltiplos de 3? E dos 300 primeiros múltiplos de 17?

   Como é que Gauss pode fazer todas essas contas o mais rápido possível, para voltar logo aos seus afazeres não matemáticos?

3. Calcule a diferença entre:
   a) Os 2020 primeiros números pares e os 2020 primeiros números ímpares.
   b) Os 2020 primeiros múltiplos de 17 e os 2020 primeiros múltiplos de 13.

   Para ambos os itens considere apenas números maiores do que zero.

1.4 Aritmética Alternativa

As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão são chamadas de operações *básicas* porque são nelas que se fundamenta a Aritmética e também porque são as que mais fazem sentido em nossa vida. Mas, e se por mera diversão inventássemos *outras operações*?

Exercício Resolvido 1.4. Vamos criar então uma nova operação aritmética, que denotaremos pelo símbolo §. Assim, dados dois números naturais a e b, ela tem este aspecto: $a\S b$.

Sobre tal operação as únicas coisas que sabemos é que:

(i) $(a+c)\S(b+d) = a\S b + c\S d$, para quaisquer números naturais a, b, c e d.

(ii) $1\S 2 = 8$

(iii) $2\S 1 = 7$

Vejamos, p.ex., como calcular $4\S 2$:

$$\begin{aligned} 4\S 2 &= (2+2)\S(1+1) \\ &= 2\S 1 + 2\S 1 \text{ (pelo item (i))} \\ &= 7+7 \text{ (pelo (ii))} \\ &= 14. \end{aligned}$$

Baseando-se apenas nas informações (i), (ii) e (iii), calcule $5\S 4$ e $2021\S 2020$.

Resolução: Façamos as contas com muito cuidado, para usar corretamente as condições (i) a (iii) e também para não pressupor nada fora delas. Temos que:

$$\begin{aligned} 5\S 4 &= (4+1)\S(2+2) \\ &= 4\S 2 + 1\S 2 \text{ (por (i))} \\ &= (2+2)\S(1+1) + 1\S 2 \\ &= 2\S 1 + 2\S 1 + 1\S 2 \text{ (por (i))} \\ &= 7+7+8 \text{ (por (ii) e (iii))} \\ &= 22. \end{aligned}$$

Portanto, $5\S 4 = 22$.

Para calcular $2021\S 2020$, notemos primeiramente que:

$$3\S 3 = (1+2)\S(2+1) \overbrace{=}^{\text{por (i)}} \underbrace{1\S 2 + 2\S 1 = 8+7}_{\text{soma das equações em (i) e (ii)}} = 15.$$

Portanto, seguindo esta cadeia de igualdades, descobrimos que $3\S 3 = 15$.

Agora, observe o seguinte padrão:

$$(2\times 3)\S(2\times 3) = 6\S 6 = (3+3)\S(3+3) \overbrace{=}^{\text{por (i)}} 3\S 3 + 3\S 3 = 15+15 = 2\times 15$$

$$(3\times 3)\S(3\times 3) = 9\S 9 = (3+6)\S(3+6) = 3\S 3 + 6\S 6 = 15 + 2\times 15 = 3\times 15$$

$$(4\times 3)\S(4\times 3) = 12\S 12 = (3+9)\S(3+9) = 3\S 3 + 9\S 9 = 15 + 3\times 15 = 4\times 15$$

(...)

Assim, para calcular $a\S a$, sendo o número a um múltiplo qualquer de 3, basta notar que podemos escrever $a = k \times 3$, onde k é um natural qualquer[1], e fazer

$$a\S a = (k\times 3)\S(k\times 3) = k \times 15.$$

[1] Isso se segue da definição de *multiplicidade*, tema que será estudado em detalhes na Aula 3.

Em particular,

$$2016\S 2016 = (672 \times 3)\S(672 \times 3) = 672 \times 15 = 10080.$$

Voltando enfim a 2021§2020, temos:

$$\begin{aligned} 2021\S 2020 &= (2016 + 15)\S(2016 + 14) \\ &= 2016\S 2016 + 5\S 4 \text{ (por (i)} \\ &= 10080 + 22 \text{ (5§4 já tinha sido calculado acima)} \\ &= 10102. \end{aligned}$$

Portanto, $2021\S 2020 = 10102$. □

Exercícios Propostos

1. Criemos ainda mais uma operação, do seguinte modo: se m e n são inteiros maiores do que zero e se $m < n$, então definimos $m\nabla n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5\nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

   Qual é o valor de $\frac{22\nabla 26}{4\nabla 6}$?

2. E uma outra: dados dois números naturais a e b, a operação $a\S b$ tem como resultado a soma dos números a e b seguida de tantos zeros quanto for o resultado dessa soma. Por exemplo,

   $$2\S 3 = 5\underbrace{00000}_{\text{5 zeros}} \quad \text{e} \quad 7\S 0 = 7\underbrace{0000000}_{\text{7 zeros}}$$

   Quantos zeros há no resultado da multiplicação abaixo?

   $$(1\S 0) \times (1\S 1) \times (1\S 2) \times (1\S 3) \times (1\S 4)$$

Problemas Propostos

1. ● (OBMEP 2006) Qual é a soma dos algarismos do número $10^{1500} + 10^{1792} + 10^{1822} + 10^{1888} + 10^{1889}$?

2. ● (OBMEP 2013) Qual é o algarismo das dezenas da soma abaixo?

$$\underbrace{7}_{\text{1 sete}} + \underbrace{77}_{\text{2 setes}} + \underbrace{777}_{\text{3 setes}} + \underbrace{7777}_{\text{4 setes}} + \ldots + \underbrace{777\ldots77}_{\text{76 setes}} + \underbrace{777\ldots777}_{\text{77 setes}}$$

3. ● João e Maria têm, cada um, um jarro grande com um litro de água. No primeiro dia, João coloca 1 ml da água do seu jarro no jarro da Maria. No segundo dia, Maria coloca 2 ml da água do seu jarro no jarro do João. No terceiro dia, João coloca 3 ml da água do seu jarro no jarro da Maria, e assim por diante. Depois de 200 dias, quantos mililitros de água tem no jarro de Maria?

4. ● (OPRM 2017) A soma de 27 inteiros consecutivos é 2646. Qual é o menor desses inteiros?

5. ● O símbolo $\odot$ representa uma operação especial com números. Alguns exemplos são $2 \odot 4 = 10$, $3 \odot 8 = 27$, $4 \odot 27 = 112$ e $5 \odot 1 = 10$. Quanto vale $4 \odot (8 \odot 7)$?

6. ● Você conhece o problema dos *quatro quatros*? Consiste em escrever um número natural dado usando operações aritméticas e *exatamente quatro vezes* o algarismo 4. Por exemplo, podemos escrever

$$15 = \frac{44}{4} + 4 \quad \text{e} \quad 28 = (4+4) \times 4 - 4$$

Usando apenas as quatro operações aritméticas básicas e 4 vezes o algarismo 4, escreva todos os números de 0 a 10.[1]

[1] Dizem os calculistas que é possível obter todos os números de 0 a 100 usando,

7. ● O Mestre Innumeratus propôs um desafio à sua aprendiz, Mathophila. Ele escreveu os nove algarismos diferentes de 0 na ordem, com espaços, desta forma:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

— Quero que você ... – começou ele.

— ... coloque símbolos aritméticos comuns de modo que o resultado seja 100? – continuou Mathophila. – Essa é fácil! E ela escreveu:

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100.$$

— Não, você roubou. – disse Innumeratus. Eu deixei espaços! Você não pode considerar 1 2 3 como se fossem 123.

— Ok... então não é permitido concatenar símbolos.

— Isso. Não pode con...cal...ternulizar. Ah, sei lá!

— Hum...então fica mais difícil. Não tenho certeza de que isso seja possível.

— Quer apostar? – desafiou o presunçoso Mestre.

Alerte Mathophila que ela não deve apostar, mostrando que é possível chegar a uma resposta ao desafio de seu mestre.

8. ● (OBMEP 2014) Na conta indicada a seguir, as letras X, Y e Z representam algarismos distintos. Qual é o valor desses algarismos?

---

além das quatro operações aritméticas, as operações de potência, raiz quadrada e fatorial. O *fatorial* de um número n qualquer – representado pelo símbolo $n!$ – é definido como o produto dos números de 1 até n: ou seja, $n! = 1 \times 2 \times ... \times (n-1) \times n$. P.ex., $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ e $7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$. Além disso, definimos $0! = 1$. Assim, por exemplo, $25 = 4! + 4^{4-4}$(ver *O Homem que Calculava*, pp.263-265). Agora, se você tiver tempo e paciência, pode fazer as contar e verificar se os calculistas estão mesmo certos...

$$\begin{array}{cccccc} & X & X & X & X \\ + & Y & Y & Y & Y \\ & Z & Z & Z & Z \\ \hline Y & X & X & X & Z \end{array}$$

9. ● Balbino e Belarmina receberam de volta suas provas de matemática, em que os algarismos das notas foram substituídos por símbolos. A nota de Balbino foi ♣Φ e a de Belarmina Φ✠. Juntos, eles obtiveram ✠¥¶. Além disso, Belarmina obteve 13 pontos a mais do que Balbino. Qual foi a nota de cada um?

10. ● Um número foi obtido permutando-se os algarismos de outro número.

    a) A soma desses dois números pode ser igual a 9999?

    b) Pode ser igual a 99999?

11. ● Qual é a diferença entre o maior e o menor dos seguintes números?

    a) $60606060607 \times 50505050506$ e $303030303041 \times 10101010101$

    b) $\underbrace{888...888}_{2020\ 8s} \times \underbrace{333...33}_{2019\ 3s}$ e $\underbrace{444...44}_{2019\ 4s} \times \underbrace{666...66}_{2019\ 6s}7$

12. ● Qual é a soma dos dígitos de $999...999 \times 333...333$, em que cada dígito nesses fatores aparece 2020 vezes?

13. ● Uma fábrica produziu uma calculadora original que efetua duas operações:

    - a adição usual, denotada por $+$;
    - uma operação denotada por $\bigotimes$.

    Sabemos que valem:

    (i) $a \bigotimes a = a$, para todo número natural a;

    (ii) $a \bigotimes 0 = 2a$, para todo número natural a;

(iii) $(a \bigotimes b)+(c \bigotimes d) = (a+c) \bigotimes (b+d)$, para quaisquer quatro números naturais a, b, c e d.

Quais são os resultados das operações $(2 + 3) \bigotimes (0 + 3)$ e $1024 \bigotimes 48$?

14. ● Responda:

   a) Os asteriscos em $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0$ podem ser mudados para sinais de mais ou de menos de modo que a equação fique verdadeira?
   b) E os asteriscos em $1 * 2 * 3 * ... * 2019 * 2020 = 0$?
   c) E os asteriscos em $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0$? E em $1 * 2 * 3 * ... * 2018 * 2019 = 0$?

15. ● O número 153 é igual à soma do cubo dos seus algarismos:

$$1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$$

Você consegue encontrar um outro número de três algarismos que tenha esta propriedade?

16. ● Cada uma das letras D, O, I, S nesta multiplicação representa um algarismo diferente:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \mathrm{D} & \mathrm{O} & \mathrm{I} & \mathrm{S} \\
 & & & \times & \mathrm{D} & \mathrm{O} & \mathrm{I} & \mathrm{S} \\
\cline{4-8}
 & & & * & * & * & * & \mathrm{D} \\
 & & * & * & * & * & \mathrm{O} & \\
 & * & * & * & * & \mathrm{I} & & \\
* & * & * & * & \mathrm{S} & & & \\
\hline
* & * & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Encontre os possíveis valores para os algarismos correspondentes a cada letra.

17. ● Um número natural termina com o algarismo 2. Se movermos este último algarismo 2 para o início do número, então o número terá seu valor dobrado. Encontre o menor número com esta propriedade.

18. ● Um número natural a é chamado de *novinvertibulus* quando a multiplicação de a por 9 resulta em número que tem os mesmos algarismos de a, mas em ordem invertida. Por exemplo, 1089 é um *novinvertibulus* porque quando o multiplicamos por 9 obtemos o número 9801, que é o número 1089 com os seus algarismos escritos da esquerda para direita:

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 0 & 8 & 9 \\ \times & & & & 9 \\ \hline & 9 & 8 & 0 & 1 \end{array}$$

a) Encontre um *novinvertibulus* de cinco algarismos.

b) Encontre *todos os novinvertibulus* de sete algarismos.

19. ● Quanto vale:

$$\frac{222622 \times 666266 - 444344 \times 333433}{111011}?$$

a) 0

b) 1500

c) 888788

d)111011

e) Nenhuma das alternativas anteriores.

20. ● Para cada número natural n, seja S_n a soma dos dez primeiros múltiplos positivos de n. Por exemplo, $S_2 = 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$. Quanto é $S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{10}$?

21. ● Calcule a soma

$$6 + 66 + 666 + 6666 + 66666 + ... + 666...666,$$

onde o último número tem 100 algarismos iguais a 6.

22. ● Não satisfeitos com a brincadeira de inventar uma nova operação aritmética para fazer contas esquisitas, os professores do POTI resolveram inventar logo duas de uma só vez: as operações $\heartsuit$ e $\spadesuit$. No Sistema Aritmético do POTI (SAPO) valem as seguintes propriedades para quaisquer naturais a, b e c:

(i) $a \spadesuit b = (a + b) + 1$

(ii) $a \heartsuit b = b \heartsuit a$

(iii) $0 \heartsuit 0 = 1$

(iv) $a \heartsuit (b \spadesuit c) = (a \heartsuit b) \spadesuit (a \heartsuit c)$

Assim, por exemplo, para calcular o valor de $0 \heartsuit 1$ no SAPO podemos fazer o seguinte:

$$\begin{aligned} 0 \heartsuit 1 &= 0 \heartsuit ((0 + 0) + 1) \\ &= 0 \heartsuit (0 \spadesuit 0) \text{ (pela propriedade (i))} \\ &= (0 \heartsuit 0) \spadesuit (0 \heartsuit 0) \text{ (pela (iv))} \\ &= 1 \spadesuit 1 \text{ (pela (iii))} \\ &= (1 + 1) + 1 \text{ (pela (i))} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Portanto, $0 \heartsuit 1 = 3$.

Calcule no SAPO os valores de:

a) $0 \heartsuit 3$

b) $2 \heartsuit 3$

c) $8 \heartsuit 5$

23. ● O número $n = 9999...999$ tem 2018 algarismos todos iguais a 9. Quantos algarismos 9 tem o número n^2?

Aula 2

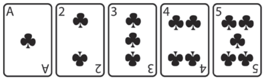
O Algoritmo da Divisão

Dentre as quatro operações aritméticas nos aprofundaremos na *divisão*. Você verá como essa operação, à primeira vista simples, guarda em si muitos aspectos interessantes e, quando analisada, faz surgir questões mais complexas. Praticamente todo o nosso curso de Teoria de Números será daqui para frente um estudo de conceitos e problemas que envolvem, direta ou indiretamente, a divisão.

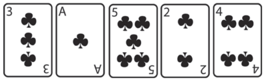
2.1 Ciclos

Existe uma infinidade de problemas práticos que podem ser resolvidos simplesmente empregando a operação de divisão. Em especial problemas que envolvam *ciclos*, muito comuns em olimpíadas.

Exercício Resolvido 2.1. Cinco cartas, inicialmente dispostas como na figura a seguir, serão embaralhadas. Em cada embaralhamento, a primeira carta passa a ser a segunda, a segunda passa a ser a quarta, a terceira passa a ser a primeira, a quarta passa a ser a quinta e a quinta passa a ser a terceira. Qual será a primeira carta após 2012 embaralhamentos?



Posição inicial



Posição após o primeiro embaralhamento

Resolução: Como usar a divisão para resolver esse problema? Primeiramente acompanhemos como ficarão ordenadas as cartas durante os primeiros embaralhamentos, de acordo com a regra do enunciado:

$$
\begin{aligned}
A-2-3-4-5 &\xRightarrow{1^{\underline{o}}\text{ embaralhamento}} 3-A-5-2-4\\
&\xRightarrow{2^{\underline{o}}\text{ embaralhamento}} 5-3-4-A-2\\
&\xRightarrow{3^{\underline{o}}\text{ embaralhamento}} 4-5-2-3-A\\
&\xRightarrow{4^{\underline{o}}\text{ embaralhamento}} 2-4-A-5-3\\
&\xRightarrow{5^{\underline{o}}\text{ embaralhamento}} A-2-3-4-5
\end{aligned}
$$

Assim, após 5 embaralhamentos voltamos à ordenação inicial: continuando os embaralhamentos só repetiremos essas configurações obtidas nos cinco primeiros, ou seja, *entramos em um ciclo de tamanho 5*. Isso significa que a análise para um número qualquer de embaralhamentos, *por maior que seja*, pode ser reduzida à análise desses cinco primeiros. É aqui que entra a divisão. Verifiquemos quantos ciclos de tamanho 5 "cabem" nos 2012 embaralhamentos: ora, para isso basta dividir 2012 por 5:

$$
\begin{array}{r|l}
2\,0\,1\,2 & 5 \\ \cline{2-2}
0\,1\,2 & 4\,0\,2 \\
2 &
\end{array}
$$

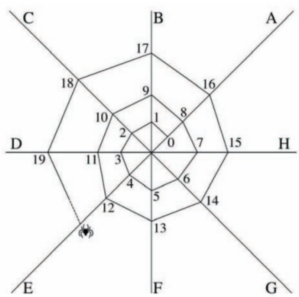
Assim, "cabem" 402 ciclos de tamanho 5 em 2012, restando ainda mais 2 embaralhamentos. Isso significa que, completados os 402 ciclos voltaremos à ordenação inicial e, fazendo os *dois* embaralhamentos do resto, chegamos à mesma ordenação que há após o *segundo* embaralhamento: $5-3-4-A-2$. Portanto, depois de 2012 embaralhamentos a primeira carta será a "5". □

Esquematizemos. Para resolver problemas que envolvam ciclos o primeiro passo, obviamente, é verificar se há de fato um ciclo, pois em alguns problemas ele não está explícito: você deve primeiramente analisar a situação para constatar isso (como é o caso do exercício acima). Depois disso devemos identificar o tamanho do ciclo (no exercício acima: 5) e o da sequência dada (os 2012 embaralhamentos). Então basta dividir o tamanho da sequência pelo tamanho do ciclo e analisar o resto dessa divisão.

Exercícios Propostos

1. Hoje é dia 03 de dezembro. Neste ano o dia 02 de março caiu numa quinta-feira. Que dia da semana é hoje?

2. A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura abaixo. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?



3. Na tabela a seguir, com seis colunas e diversas linhas, estão escritos, ordenadamente, os números 1, 2, 3, 4, ... Qual é a posição do número 1000 nessa tabela?

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	...			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

4. Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anelar é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e o polegar é o nono. Inverta a orientação novamente voltando para o dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar a contar dessa forma, indo e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?

5. Na sequência 9, 16, 13, 10, 7,... cada termo, a partir do segundo, é a soma de 7 com o algarismo das unidades do termo anterior. Qual é o 2009º termo da sequência?

2.2 O Algoritmo da Divisão

Vamos agora analisar mais detalhadamente a própria operação de divisão. Pede-se, p.ex., para dividir 973 por 8. Dados dois números (973 e 8), dividir um pelo outro significa descobrir quantas vezes um "cabe" dentro do outro. Efetuemos a conta segundo o método que você aprendeu na escola:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 9 & 7 & 3 & \;8 \\ \cline{5-5}
- & 8 & & & \;1\;2\;1 \\ \cline{2-2}
 & 1 & 7 & & \\
- & 1 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & - & & 8 & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}
$$

Assim, concluímos que o 8 cabe 121 vezes no 973. Há ainda uma sobra de 5, que é dita "sobra" porque não chega a completar os 8. Uma outra maneira de interpretar tal divisão é a seguinte. Temos 973 itens e queremos distribuí-los igualmente em 8 caixas: feita a distribuição constatamos que cada caixa fica com 121 itens e sobra ainda 5 itens que, por serem em menor quantidade que o número de caixa, não podem ser eles mesmos distribuídos.

A quantidade de itens a serem distribuídos (973) é chamado de *dividendo*. A quantidade de caixas (8) é o *divisor*. O quanto ficará em cada caixa (121) é o *quociente*. A sobra que não pôde ser distribuída (5) é o *resto*.

Repare em duas coisas que estão presentes numa divisão:

(i) *São dados de início* dois números: a quantidade de itens e a de caixas, ou seja, dividendo e divisor (973 e 8, no nosso exemplo). O que deve ser descoberto por meio do cálculo são quociente e resto.

(ii) O resto deve ser necessariamente *menor* do que o divisor.

Repare também que a descoberta que fizemos, por meio das contas de divisão, de que no 973 (dividendo) o 8 (divisor) cabe 121 (quociente) vezes sobrando ainda 5 (resto) é traduzida em linguagem matemática como $973 = 8 \times 121 + 5$. Ou seja, de modo genérico toda divisão pode ser escrita como:

$$\boxed{[\text{Dividendo}] = [\text{Divisor}] \times [\text{Quociente}] + [\text{Resto}]}$$

Todas essas observações estão condensadas no seguinte *teorema*[1].

[1] Este é o primeiro teorema do nosso curso. Em Matemática os "teoremas" e as "proposições" são afirmações que precisam ser justificadas, *demonstradas*. As "definições" são afirmações que são aceitas por convenção e os "axiomas" afirmações evidentes por si mesmas: nem as definições e nem os axiomas precisam ser demonstrados. Em última instância, a demonstração de todos os teoremas e proposições tem sua base em definições e axiomas. No nosso curso veremos todos esses tipos de verdades matemáticas. Todavia, só às vezes é que faremos a demonstração rigorosa dos teoremas e proposições usados aqui, pois geralmente

Teorema 2.1. (Algoritmo da Divisão)

Esse teorema pode ser formulado em duas versões:

(I) Suponha que sejam dados dois números naturais a e b, com $b \neq 0$. Então existem únicos naturais q e r tais que as duas coisas a seguir acontecem:

$$a = b \times q + r \ \text{ e } \ r < b.$$

Podemos formular isso de modo mais geral, incluindo *todos os números inteiros* (positivos ou negativos):

(II) Suponha que sejam dados dois números inteiros a e b, com $b \neq 0$. Então existem únicos inteiros q e r tais que as duas coisas a seguir acontecem:

$$a = b \times q + r \ \text{ e } \ 0 \leq r < |b|.$$ [1]

Tanto em (I) quanto em (II), a recebe o nome de *dividendo*, b de *divisor*, q de *quociente* e r de *resto*.

Assim, se os números dados forem ambos naturais, podemos usar a versão (I) do teorema. Se algum deles for negativo ou então forem inteiros quaisquer (sobre os quais não sabemos se são positivos ou negativos), devemos usar a versão (II).

O teorema nada mais é do que o algoritmo da divisão (método da chave) que você viu na escola, mas apresentado de um outro modo. A afirmação de que q e r são "únicos" significa que na divisão não existem dois ou mais quocientes, ou dois ou mais restos.

---

ela exige um formalismo que foge aos propósitos do curso. Para esse Teorema 2.1, p.ex., fornecemos explicações que o tornam bastante compreensível, mas *não* demos uma demonstração matemática em sentido estrito.

[1] As barras (| |) nas quais o b está inserido indicam que o estamos tomando *em módulo*. "Em módulo" significa: se $b \geq 0$, então $|b| = b$, se $b < 0$, então $|b| = -b$. Por exemplo, como $17 \geq 0$, então $|17| = 17$; e como $-13 < 0$, então $|-13| = -(-13) = 13$. Assim, o módulo de um número é sempre o seu valor não-negativo.

Exemplo 2.1. Suponha que sejam dados os números 324 e 7. Como ambos são naturais, usando a versão (I) do Teorema 2.1 podemos garantir *que existem* naturais q e r tais que:

$$324 = 7 \times q + r \;\text{ e }\; r < 7.$$

Agora, para saber *quais seriam* esses q e r, basta fazer a divisão de 324 por 7: q será o quociente da divisão e r o resto. Temos:

$$\begin{array}{r|l} 3\,2\,4 & 7 \\ \cline{2-2} 4\,4 & 4\,6 \\ 2 & \end{array}$$

Logo, $q = 46$ e $r = 2$. Ou seja, temos que $324 = 7 \times 46 + 2$ e $2 < 7$.

Exemplo 2.2. E se dividendo e divisor tivessem sido invertidos? Por exemplo, dados 7 e 324, encontre q e r tais que:

$$7 = 324 \times q + r \text{ e } r < 324.$$

Ora, nesse caso nem é preciso fazer conta. Basta olhar para a equação para perceber que a escolha certa é $q = 0$ e $r = 7$, pois de fato: $7 = 324 \times 0 + 7$ e $7 < 324$.

Exemplo 2.3. Agora olhemos o Teorema 2.1 de trás para frente. Suponha que nos seja informado que

$$3\,699\,592 = 249 \times 14\,854 + 199.$$

Como $199 < 249$, então podemos concluir que 199 é o resto e 14.854 é o quociente da divisão de 3.699.592 por 249.

Mas, não só isso. Reescreva a equação dada invertendo os números 249 e 14.854:

$$3.699.592 = 14.854 \times 249 + 199.$$

Então, como $199 < 14\,854$, também podemos concluir que 199 é o resto, e 249 é o quociente da divisão de 3.699.592 por 14.854.

Exemplo 2.4. Suponha que a e q sejam naturais tais que

$$a = 85 \times q + 89$$

Não podemos concluir que q seja o quociente da divisão de a por 85, pois o 89 que aparece na equação não pode ser o resto dessa divisão: 89 não é menor do que 85.

Exercícios Propostos

1. Dados $a = 1308$ e $b = 9$, encontre números q e r tais que $a = b \times q + r$ e $r < b$.

2. Dados $a = 9$ e $b = 1308$, encontre números q e r tais que $a = b \times q + r$ e $r < b$.

3. Dados $a = 1092$ e $b = 13$, encontre números q e r tais que $a = b \times q + r$ e $r < b$.

4. Dados $a = 0$ e $b = 1237$, encontre números q e r tais que $a = b \times q + r$ e $r < b$.

5. Por que no Teorema 2.1 foi imposta (tanto na versão (I) quanto na versão (II)) a condição de que b deve ser diferente de zero?

6. Sabemos que $251.509.314 = 987 \times 254.821 + 987$. Então podemos disso concluir que 254.821 é o quociente da divisão de 251.509.314 por 987? E podemos concluir que 987 é o quociente da divisão de 251.509.314 por 254.821?

7. Sabemos que a, b e q são naturais tais que $a = b \times q + r$. Diga qual é a condição sob a qual podemos afirmar que:

   (i) q é o quociente da divisão de a por b.

   (ii) b é o quociente da divisão de a por q.

   (iii) 163 é o resto da divisão de a por b.

2.3 Aplicações do Algoritmo da Divisão

Vamos agora a alguns exercícios cuja resolução usa o Teorema 2.1.

Exercício Resolvido 2.2. Ao dividir o número $39 + x$ por 23 obtemos resto 7. Qual é o menor valor inteiro positivo que podemos encontrar para x?

Resolução: Traduzindo a informação dada pelo enunciado no Teorema 2.1, temos que

$$39 + x = 23q + 7,$$

onde q é o quociente da divisão. Logo, isolando x na igualdade, obtemos:

$$x = 23q - 32.$$

Se $q \leq 1$, então x seria negativo, o que não queremos. Então, para obter o menor x positivo, basta escolher o caso onde $q = 2$. Assim,

$$x = 23 \times 2 - 32 = 14$$

é o valor que procuramos. □

Antes passarmos para o próximo exercício, vamos relembrar alguns dos principais tipos de fatoração (ou *introduzir*, caso você ainda não tenha visto esse conteúdo na escola[1]). As fatorações serão muito úteis para vários problemas de divisão.

- *Diferença de quadrados*: $a^2 - b^2 = (a - b) \times (a + b)$.
- *Trinômio quadrado perfeito*:

  (i) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$.

  (ii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

[1] As fatorações são estudadas mais a fundo no curso de *Álgebra*.

- *Agrupamento*: $ac - ad + bc - bd = a \times (c-d) + b \times (c-d) = (a+b) \times (c-d)$. A fatoração por agrupamento pode aparecer de diversos modos, esse é apenas um deles. A ideia principal aqui é sempre *por em evidência* o termo em comum às parcelas.

Exercício Resolvido 2.3. Suponha um natural $a > 2$. Mostre que $7 - 12a + 9a^2$ deixa resto 3 quando dividido por $3a - 2$.
Resolução: De acordo com o Teorema 2.1, para mostrar que $7 - 12a + 9a^2$ deixa resto 3 quando dividido por $3a - 2$, devemos mostrar que estas duas coisas acontecem:

(i) Existe um M inteiro tal que $7 - 12a + 9a^2 = (3a-2) \times M + 3$.

(ii) $3 < 3a - 2$.

Verifiquemos primeiramente que vale (ii):

$$\underbrace{2 < a}_{\text{pelo enunciado}} \xRightarrow[\text{os dois lados}]{\text{multiplicando por 3}} 6 < 3a \xRightarrow[\text{dos dois lados}]{\text{subtraindo 2}} 4 < 3a - 2$$

$$\xRightarrow[\text{como } 3<4]{} 3 < 3a - 2$$

Agora encontremos um M que satisfaça a condição (i). Note que:

$$\begin{aligned} 7 - 12a + 9a^2 &= (9a^2 - 12a + 4) + 3 \\ &= (3a-2)^2 + 3 \\ &\quad \text{(pela fatoração de trinômio quadrado perfeito)} \\ &= (3a-2) \times \underbrace{(3a-2)}_{=M} + 3. \end{aligned}$$

Assim, podemos tomar $3a - 2$ para ser o nosso M. Portanto, temos que $7 - 12a + 9a^2 = (3a-2) \times M + 3$. □

Por fim, apliquemos o Teorema 2.1 para resolver um problema prático.

Exercício Resolvido 2.4. Agapito possui uma coleção de selos e está procurando um jeito de organizá-los em um álbum. Se ele for colocando 8 selos por página, a última página não vazia do álbum ficará com 6 selos. E se for colocando 9 selos por página, a última página não vazia do álbum ficará com 7 selos. Qual é o tamanho da coleção de Agapito, sabendo que ela não chega a ter 100 selos?

Resolução: Vamos chamar de n a quantidade de selos. Se n for distribuído de 8 em 8, no final restarão 6 selos: isso significa simplesmente que o resto da divisão de n por 8 é 6. Logo, n é um número da forma $8q+6$. Além disso, se n for distribuído de 9 em 9, no final restarão 7 selos: logo, o resto da divisão de n por 9 é 7 e n é um número da forma $9q+7$.

Portanto, temos de encontrar o número n menor que 100 que seja tanto da forma $8q+6$ quanto da forma $9q+7$. Fazendo $q=0$, $q=1$ e assim por diante, listemos os números de cada uma dessas formas e vejamos qual número aparece em ambas as listas:

- Números da forma $8q+6$: $\underbrace{6}_{8\times 0+6}$, $\underbrace{14}_{8\times 1+6}$, 22, 30, 38, 46, 54, 62, $\boxed{70}$, 78, 86, 94.
- Números da forma $9q+7$: $\underbrace{7}_{9\times 0+7}$, $\underbrace{16}_{9\times 1+7}$, 25, 34, 43, 52, 61, $\boxed{70}$, 79, 88, 97.

Logo, $n=70$, ou seja, Agapito possui 70 selos em sua coleção. $\square$

Exercícios Propostos

1. Ao dividirmos o número $15+x$ por 39 obtemos resto 37. Quais são os possíveis valores de x entre 200 e 300?
2. Seja um inteiro $k>1$. Mostre que $25k^2+7$ deixa resto 11 na divisão por $5k+2$.
3. Sejam dados os inteiros $a>1$ e $b>2$. Mostre que o resto da divisão de $10+80a^2-63b^3-45b^2+112a^2b$ por $7b+5$ é 10.

4. Qual é o menor número positivo que deixa resto 3 quando dividido por 5, resto 4 quando dividido por 7 e resto 5 quando dividido por 8?

5. Faramir foi fazer uma compra no Supermercado Gondor. Quando foi ao caixa percebeu que se pagasse apenas com notas de R$10 receberia R$2 de troco e, se pagasse apenas com notas de R$20, receberia R$12 de troco. De quanto foi a compra de Faramir, sabendo que é algum valor entre R$80 e R$100?

Problemas Propostos

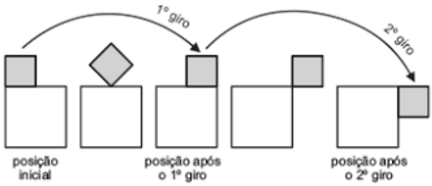
1. ● Uma professora tem 337 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos seus alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma?

2. ● Distribuímos os números inteiros positivos em uma tabela com cinco colunas, conforme o seguinte padrão:

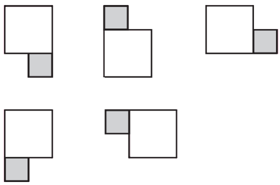
A	**B**	**C**	**D**	**E**
1				
2	3			
4	5	6		
7	8	9	10	
11	12	13	14	15
16				
17	18			
19	20	21		
22	23	24	25	
26	27	28	29	30
31				
32	33			
.				
.				
.				

Continuando a preencher a tabela desta maneira, qual será a coluna ocupada pelo número 2020?

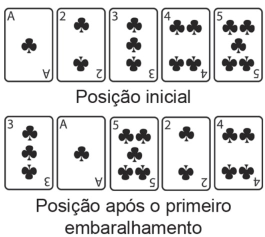
3. ● Um quadrado de lado 1 cm roda em torno de um quadrado



de lado 2 cm, como na figura acima, partindo da posição inicial e completando um giro cada vez que um de seus lados fica apoiado em um lado do quadrado maior. Qual das figuras abaixo representa a posição dos dois quadrados após o 2012º giro?



4. ● Almesinda tem cinco cartas marcadas com as letras A, B, C, D e E, empilhadas nessa ordem de cima para baixo. Ela embaralha as cartas pegando as duas de cima e colocando-as, com a ordem trocada, embaixo da pilha. A figura mostra o que acontece nas duas primeiras vezes em que ela embaralha as cartas. Se Almesinda embaralhar as cartas 2020 vezes, qual carta estará no topo da pilha?



5. ● No planeta Staurus, os anos têm 228 dias, divididos em 12 meses de 19 dias. Cada semana tem 8 dias: Zerum, Uni, Duodi, Trio, Quati, Quio, Seise e Sadi. Sybock nasceu num duodi, que foi o primeiro dia do quarto mês. Em que dia da semana ele festejará seu primeiro aniversário?

6. ● O primeiro número de uma sequência é 7. O próximo é obtido da seguinte maneira: calculamos o quadrado do número anterior $7^2 = 49$ e a seguir efetuamos a soma de seus algarismos e adicionamos 1, isto é, o segundo número é $4+9+1 = 14$. Repetimos este processo, obtendo $14^2 = 196$ e o terceiro número da sequência é $1+9+6+1 = 17$ e assim sucessivamente. Qual o 2002º elemento desta sequência?

7. ● No Calendário Jupiteriano, os meses são Julius, Uranius, Plutônius, Ílius, Terrius, Eráclitus e Raley. Os meses que começam com consoantes possuem 17 dias e os meses que começam com vogais têm 19 dias. O ano começa em Julius e segue a sequência mencionada, anteriormente, encerrando-se em Raley. Assim como no nosso calendário, o Jupiteriano possui uma semana com 7 dias (domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta e sábado). Diógenes, um menino Jupiteriano, nasceu em 11 de Plutônio de 1999, que foi em um domingo.

   a) Em que dia Diógenes completará 100 dias de vida?
   b) Em que dia da semana Diógenes completará 20 anos?

8. ● Às margens de um lago circular, existem pedras numeradas de 1 a 10, no sentido horário. O sapo Frog parte da pedra 1 e salta no sentido horário apenas nestas 10 pedras.

   a) Se Frog salta de 2 em 2 pedras, ou seja, ele vai da pedra 1 para a 3, da 3 para a 5 e assim por diante, após 100 saltos em que pedra estará?
   b) Se no primeiro salto, Frog vai para a pedra 2, no segundo para a pedra 4, no terceiro para a pedra 7 (ou seja, em

cada salto ele pula uma pedra a mais que no salto anterior), em que pedra Frog estará após 100 saltos?

9. ● Ambrósio pensou em um número, dividiu-o por 285 e obteve resto 77. Se ele dividir o número em que pensou por 57, qual é o resto que ele vai encontrar?

10. ● Um número n de dois algarismos é dividido pela soma de seus algarismos, obtendo resto r.

    a) Encontre um número n tal que $r = 0$.

    b) Mostre que r não pode ser maior que 15.

    c) Mostre que para qualquer r menor ou igual a 12, existe um n que deixa resto r ao dividi-lo pela soma de seus algarismos.

11. ● Firmina multiplica dois números inteiros positivos cuja diferença é 202, mas comete um erro e obtém um número 1000 unidades menor que o correto. Ao dividir o resultado de Firmina pelo menor dos números que deveria multiplicar, o quociente é 288 e o resto é 67. Quais os dois números que Firmina multiplicou?

12. ● Qual é o resto da divisão de $\sqrt{111111111 - 22222}$ por 9?

13. ● Os 535 alunos e os professores de uma escola fizeram um passeio de ônibus. Os ônibus, com capacidade para 46 passageiros cada, ficaram lotados. Em cada ônibus havia um ou dois professores. Em quantos ônibus havia dois professores?

14. ● Suponha que $a > 1$ e p é um inteiro. Mostre que $a^2 + a^2p + 6a - 9p + 13$ deixa resto 4 na divisão por $a + 3$.

15. ● O professor Godofredo tentou dividir a turma em grupos iguais, para propor uma atividade. Porém, se dividisse os alunos em grupos de 4 sobrariam 2. Se os dividisse em grupos de 5 um aluno ficaria de fora. Se a turma tem 30 meninas e elas estão em maioria, qual é o número de meninos na turma?

16. ● Carlinho e Carlito fizeram a OTOP (Olimpíada do TOPMAT). Começando a prova, Carlinho fez 11 questões por hora. Quando faltavam apenas 5 questões, ele usou mais uma hora para fazê-las e para preencher o gabarito. Já Carlito fez 12 questões por hora. Quando faltavam apenas 8 questões, ele ficou mais uma hora para fazê-las e para preencher o gabarito. Sabendo que os professores do TOPMAT não seriam cruéis a ponto de fazer uma prova com mais de 100 questões, responda: Quantas questões tinha a prova? Quanto tempo cada um levou para completá-la?

17. ● A soma de quatro números inteiros positivos consecutivos nunca pode ser igual a:

    a) 220
    b) 214
    c) 222
    d) 2 014
    e) 14

18. ● Numa divisão, aumentando o dividendo de 1989 e o divisor de 13, o quociente e o resto não se alteram. Qual é o quociente?

19. ● Faça o que se pede.

    a) Mostre que há *infinitos* números que deixam resto 1 na divisão por 2, resto 2 na divisão por 3 e resto 3 na divisão por 4.
    Observação: Uma maneira de provar em Matemática que há infinitos números que atendem a determinadas propriedades é mostrar que tais propriedades na verdade são obedecidas por uma *expressão geral* (uma expressão que contenha uma letra tal que essa letra varie em algum conjunto infinito). Por exemplo, podemos afirmar que existem infinitos múltiplos de 3 porque todo número da forma $3 \times k$ é um múltiplo de 3, para qualquer número k pertencente aos inteiros (ou seja, para k variando no conjunto dos números inteiros, que é um conjunto infinito).

    b) Encontre algum número entre 1 000 000 e 1 000 100 que deixe resto 2 na divisão por 5 e resto 3 na divisão por 7.

20. ● Encontre algum número que satisfaça *todas* as seguintes condições:

    - Deixe resto 99 na divisão por 100.
    - Deixe resto 100 na divisão por 101.
    - Deixe resto 101 na divisão por 102.
      (...) [E assim por diante, seguindo esse padrão]
    - Deixe resto 198 na divisão por 199.
    - Deixe resto 199 na divisão por 200.

Aula 3

Divisibilidade e Propriedades

Antes de passarmos ao tema principal desta aula – divisibilidade – vejamos uma consequência muito importante que pode ser tirada do Teorema 2.1 (pág. 32).

3.1 Os Inteiros sob a Perspectiva dos Divisores

Relembre o enunciado do Teorema 2.1: dados dois inteiros a e b *quaisquer* (com $b \neq 0$), sempre vão existir únicos inteiros q e r tais que $a = b \times q + r$ e $0 \leq r < |b|$.

Ora, se b (o divisor) pode ser um inteiro não nulo *qualquer*, podemos escolher, p.ex., $b = 7$. Assim, substituindo b por 7 no Teorema 2.1, concluímos que: dado um inteiro a *qualquer*, sempre vão existir únicos inteiros q e r tais que $a = 7 \times q + r$, com $0 \leq r < 7$. Ou seja: *todo número inteiro é um número da forma* $7q + r$*, com* $r = 0$*, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.* Isto é, todo inteiro pode ser escrito como um múltiplo de 7 mais um resto que está entre 0 e 6.

Mas, não há qualquer razão particular para termos escolhido $b = 7$. Podemos escolher, ao invés, $b = 5$. Então, pelo mesmo raciocínio, podemos concluir a partir do Teorema 2.1: *todo inteiro é um número da forma* $5q + r$, *com* $r = 0$, *1, 2, 3 ou 4.* Ou então escolher $b = 4$: *todo inteiro é da forma* $4q + r$, *com* $r = 0$, *1, 2 ou 3.* E assim por diante.

Exemplo 3.1. Mostremos que o quadrado de um inteiro só pode ser da forma $3k$ ou $3k + 1$, onde k é um inteiro – ou seja, que todos os quadrados perfeitos deixam resto 0 ou 1 na divisão por 3.

Conforme o raciocínio exposto acima, a partir do Teorema 2.1 podemos afirmar que todo número inteiro a é da forma

$$a = 3q + r, \text{ com } r = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

Então o quadrado de um inteiro será da forma

$$a^2 = (3q + r)^2 = 9q^2 + 6qr + r^2, \text{ com } r = 0, 1 \text{ ou } 2.$$

Analisemos o que acontece com a^2 de acordo com cada valor que pode ser assumido por r:

- Se $r = 0$, então $a^2 = 9q^2 + 6q \times 0 + 0^2 = 9q^2 = 3 \times \underbrace{3q^2}_{=k}$.
  Assim, tomando o inteiro $k = 3q^2$, temos que $a^2 = 3k$, ou seja, a^2 deixa resto 0 na divisão por 3.

- Se $r = 1$, então $a^2 = 9q^2 + 6q \times 1 + 1^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3 \times \underbrace{(3q^2 + 2q)}_{=k} + 1$.
  Assim, tomando o inteiro $k = 3q^2 + 2q$, temos que $a^2 = 3k + 1$, ou seja, a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

- Se $r = 2$, então $a^2 = 9q^2 + 6q \times 2 + 2^2 = (9q^2 + 12q + 3) + 1 = 3 \times \underbrace{(3q^2 + 4q + 1)}_{=k} + 1$.
  Assim, tomando o inteiro $k = 3q^2 + 4q + 1$, temos que $a^2 = 3k + 1$, ou seja, a^2 deixa resto 1 na divisão por 3.

Como os três casos acima são todos os possíveis, concluímos que o quadrado de um inteiro qualquer só pode ser da forma $3k$ ou $3k+1$, ou seja, só pode deixar resto 0 ou 1 na divisão por 3.[1]

Exercícios Propostos

Copiando passo a passo o raciocínio e a forma de demonstração usada no Exemplo 3.1, mostre que:

a) O quadrado de um inteiro só pode deixar resto 0 ou 1 na divisão por 4.

b) O quadrado de um inteiro é da forma $5k$, $5k+1$ ou $5k-1$ (onde k é um inteiro).

Ainda nesse tema (escrever um número inteiro a partir de um divisor qualquer), vamos agora ao caso que nos é mais familiar: no Teorema 2.1 vamos escolher o divisor $b = 2$. Então, *todo inteiro é um número da forma* $2q$ (deixa resto 0 na divisão por 2) *ou* $2q+1$ (deixa resto 1 na divisão por 2). No primeiro caso, o inteiro é dito *par*; no segundo caso, *ímpar*. A partir dessa definição, vamos demonstrar propriedades da relação entre pares e ímpares que você já conhece.

Exemplo 3.2. Mostremos que o quadrado de um ímpar é sempre um ímpar.

Seja a um número ímpar qualquer. Então, pela definição acima, existe um inteiro t tal que $a = 2t+1$. Logo,

$$a^2 = (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 1 = 2 \times \underbrace{(2t^2 + 2t)}_{=k} + 1$$

[1]O que se fez neste Exemplo 3.1 é um exemplo de *demonstração matemática.* De início você pode estranhar a linguagem simbólica e talvez ache a escrita incompreensível. Mas, se você reler a demonstração, prestando atenção em cada passo dado, verá que na verdade o raciocínio é muito simples. Para se habituar um pouco com esse tipo de linguagem, não deixe também de fazer os exercícios de demonstração desta aula.

Assim, escolhendo o inteiro $k = 2t^2 + 2t$, temos que existe um inteiro k tal que $a^2 = 2k + 1$. Portanto, a^2 é um número ímpar.

Exemplo 3.3. Mostremos agora que o produto entre um número par e um número ímpar é sempre um número par.

Seja a um número par qualquer e b um número ímpar qualquer. Então existem inteiros s e t tais que:

$$a = 2s \text{ e } b = 2t + 1.$$[1]

Logo, $a \times b = (2s) \times (2t + 1) = 4st + 2s = 2 \times \underbrace{(2st + s)}_{=k}$.

Assim, existe um inteiro k (a saber $k = 2st+s$) tal que $a \times b = 2k$. Portanto $a \times b$ (o produto de um par por um ímpar) é um número par.

Exercícios Propostos

1. *Usando apenas as definições de número par e número ímpar*, demonstre as seguintes propriedades:

   a) A soma de dois pares é sempre um par.
   b) A soma de dois ímpares é sempre um par.
   c) A soma de um par com um ímpar é sempre um ímpar.
   d) O produto entre dois ímpares é sempre um ímpar.
   e) O produto entre dois pares é sempre um par.
   f) O quadrado de um par é sempre um par (mas: tendo sido demonstrado o item e), este item f) ainda precisa ser demonstrado?).

[1] Atenção ao fato de usarmos aqui *duas letras diferentes*, s e t. Se usássemos uma só letra, p.ex. t, então teríamos $a = 2t$ e $b = 2t + 1$ e, assim, estaríamos comprometidos em que o ímpar b é o sucessor do par a. Logo, como queremos demonstrar a propriedade para números pares e ímpares *quaisquer* (não apenas para os sucessores), devemos distinguir as letras para que elas possam assumir valores independentes uma da outra.

2. Seja a um inteiro qualquer. Então o número $a \times (a+1)$ é par ou ímpar?

3. Explique por quê:

   a) Se a é par, então a^n é par *para todo número n natural.*

   b) Se a é ímpar, então a^n é ímpar *para todo número n natural.*

4. Seja n um número inteiro qualquer. Para os números abaixo assinale com (P) os que são *certamente par*, com (I) os que são *certamente ímpar* e com (D) os que podem ser tanto par quanto ímpar:

   ( ) $n^2 - n + 248$

   ( ) $n^2 + n + 12386$

   ( ) $n^{25} + n + 567$

   ( ) $n^{23} + 99999n^{234} - 23278$

   ( ) $n^{324} - n^{294} + 214563n$

   ( ) $234n^{43} + 75498n^9 + 231$

   ( ) $n^{2020} + 3678a + n$, onde a é um inteiro qualquer.

   ( ) $(n+1)(n+2)n^{oprm}$, onde o, p, r e m são naturais não nulos quaisquer.

   ( ) $(n+1)^{|n|} + 5555n$

   ( ) $(n+123456789)^{987654321} + 123456789 - n$

Vejamos agora como a análise de paridade (isto é, se um número é par ou ímpar), usando as propriedades acima, pode nos ajudar a resolver problemas à primeira vista muito difíceis e que parecem nada terem a ver com paridade.

Exercício Resolvido 3.1. Determine *todos* os números primos m e n tais que $0 < m < n$ e os três números

$$2m + n, m + 2n \text{ e } m + n - 18$$

sejam também primos.

Resolução: Os números primos serão estudados em aulas posteriores, mas não precisamos de nada além daquilo que é bem básico sobre o tema para resolver este problema, pois sua chave de solução é simplesmente a paridade!

Primeiramente, note que, se tomássemos $m = 2$, então o número $m + 2n$ seria par. Mas, conforme o enunciado, $m + 2n$ é primo. Como o único primo par positivo é o 2, então teríamos

$$m + 2n = 2 \xRightarrow{\text{como } m=2} 2 + 2n = 2 \Rightarrow 2n = 0 \Rightarrow n = 0$$

Porém, n não pode ser zero, pois n deve ser um número primo. Logo, como a escolha $m = 2$ nos levou a uma contradição, então devemos abandoná-la, ou seja, devemos ter que: $m \neq 2$.

E, se escolhêssemos $n = 2$, também entraríamos em contradição (verifique você mesmo isso: o raciocínio é análogo ao feito acima). Portanto, também $n \neq 2$.

Assim, m e n devem ser primos diferente de 2. Logo, têm de ser ambos ímpares. Portanto, $m + n$ é par é $m + n - 18$ é par. Como, pelo enunciado, $m + n - 18$ deve ser primo, então

$$m + n - 18 = 2 \Rightarrow m + n = 20$$

Agora, os únicos pares de primos positivos (m, n) que satisfazem $m + n = 20$, com $m < n$, são $(7, 13)$ e $(3, 17)$. Vejamos o que acontece com cada uma dessas duas possibilidades, levando em conta que $2m + n$ e $m + 2n$ devem ser ambos primos:

- Para $(m, n) = (7, 13)$: $2m + n = 2 \times 7 + 13 = 27$, que não é primo. Logo, esta possibilidade deve ser descartada.

- Para $(m, n) = (3, 17)$: $2m + n = 2 \times 3 + 17 = 23$, que é primo; e $m + 2n = 3 + 2 \times 17 = 37$, que também é primo. Logo, esta possibilidade é válida.

Portanto, os únicos primos m e n que satisfazem todas as condições do problema são os números 3 e 17. $\square$

3.2 Divisibilidade

Abordaremos agora a *multiplicidade*, noção com a qual você já está bastante acostumado, mas com um detalhamento e formalismo que provavelmente lhe são novos. Você verá como essa abordagem mais abstrata nos propiciará descobrir diversas propriedades de divisibilidade, muito úteis na resolução de problemas.

Definição 3.1. Nas condições do teorema 2.1 (pág. 32), caso o resto r seja igual a zero, ficamos apenas com:

$$a = b \times q$$

Nesse caso dizemos que:

- b divide a.
- a é divisível por b.
- b é um divisor de a.
- a é múltiplo de b.

Todas essas afirmações dizem a mesma coisa – que o resto da divisão de a por b é zero – e são denotadas por $b \mid a$.

Assim, podemos definir:

$$\boxed{b \mid a \text{ se e somente se existe um número inteiro } q \text{ tal que } a = b \times q.}$$

Naturalmente, nesse caso podemos dizer também que $q \mid a$, pois $a = q \times b$.

Quando b não divide a (ou seja, quando o resto da divisão de a por b *não* é zero) denotamos isso por $b \nmid a$.

Observação: há ainda mais um modo de definir divisibilidade, equivalente ao primeiro:

$$b \mid a \text{ se e somente se o número } \frac{a}{b} \text{ é um inteiro.}$$

Exemplo 3.4. Podemos afirmar que $7 \mid -21$, pois o resto da divisão de -21 por 7 é 0. Ou, dizendo de outro modo, $7 \mid -21$ porque -21 pode ser escrito como $-21 = 7 \times (-3)$, ou seja, existe um inteiro c tal que $-21 = 7 \times c$, a saber, $c = -3$. Por outro lado, $21 \nmid 7$, pois não existe nenhum inteiro c tal que $7 = (-21) \times c$.

Exemplo 3.5. Sejam a, b, c e d números inteiros. Então $(a + b) \mid (2ac - 3ad + 2bc - 3bd)$. Para provar isso, devemos de acordo com a Definição 3.1 achar algum inteiro M tal que

$$(2ac - 3ad + 2bc - 3bd) = (a + b) \times M$$

Para encontrá-lo, basta observar que:

$$\begin{aligned} 2ac - 3ad + 2bc - 3bd &= a \times (2c - 3d) + b \times (2c - 3d) \\ &= (a + b) \times \underbrace{(2c - 3d)}_{= M} \end{aligned}$$

Logo, tomando $(2c-3d)$ para ser o nosso M, temos que $(2ac-3ad+2bc-3bd) = (a+b)\times M$. Portanto, $(a+b) \mid (2ac-3ad+2bc-3bd)$.

Exemplo 3.6. $116 \nmid 24\,686\,422\,468\,642$. Para provar isso, note primeiramente que

- $24\,686\,422\,468\,642 = 2 \times 12\,343\,211\,234\,321$
- $116 = 4 \times 29$

Agora, se um número dividisse o outro, então existiria um inteiro k tal que

$$24\,686\,422\,468\,642 = 116 \times k \Rightarrow 2 \times 12\,343\,211\,234\,321 = 4 \times 29 \times k$$

$$\xRightarrow[\text{da igualdade}]{\div 2 \text{ ambos os lados}} \underbrace{12\,343\,211\,234\,321}_{\text{Um número ímpar}} = \underbrace{2 \times (29 \times k)}_{\text{Um número par}}$$

Assim, chegaríamos ao absurdo de um número par ser igual a um número ímpar. Portanto, não pode existir nenhum inteiro k tal que: $24\,686\,422\,468\,642 = 116 \times k$. Ou seja, $116 \nmid 24\,686\,422\,468\,642$.

Pelo Teorema 2.1, dados inteiros a e b, existem q e r tais que

$$a = b \times q + r \Rightarrow a - r = b \times q \Rightarrow b \mid (a - r).$$

Ou seja, numa divisão o divisor *sempre* divide o dividendo menos o resto. Atenção que essa observação será útil para resolver pelo menos um dos problemas ao final do capítulo.

Exercícios Propostos

1. *Usando a Definição 3.1* explique por que todos os números não nulos dividem o zero.

2. *Usando a Definição 3.1* explique por que não podemos admitir que o zero divida algum número não nulo.[1]

3. Assinale V (verdadeiro) ou F (falso) para as afirmações abaixo. Considere que todos os números representados por letras são inteiros não nulos.

   ( ) $11 \mid 99$.

   ( ) Existe um inteiro c tal que $99 = 11 \times c$.

   ( ) Existe um inteiro c tal que $11 = 99 \times c$.

   ( ) O resto da divisão de 99 por -11 é zero.

   ( ) -99 é um múltiplo de 11.

   ( ) -11 é um divisor -99.

   ( ) $\dfrac{99}{-11}$ é um número inteiro.

   ( ) 7684 é divisível por 12.

   ( ) $(a^2 - b^2)$ é um múltiplo de $(a - b)$.

   ( ) $(a + b) \nmid (a^2 - b^2)$.

[1] Mas, também não admitimos que o zero divida nem sequer ele mesmo! Por que será?

( ) $(b-a)$ não divide (a^2-b^2).

( ) $-2 \mid (18abc + 70fgh - 144t^2o^3p^4m^5a^6t^7)$.

( ) (m^2+p^2) é um divisor de $(m^2n - p^3q^5 - m^2pq^5 + np^2)$.

( ) $\dfrac{16\,872ab^2c}{37}$ não é um número inteiro.

( ) $\dfrac{4a^2+20a+25}{2a+5}$ é um número inteiro.

( ) Existe um inteiro k tal que $110m^{10}i^{20}n^{30}h^{40}o^{50}c^{60}a^{70} = 22 \times k$.

( ) Existe um inteiro m tal que $51 = 10 \times poti \times m$.

4. Existe algum inteiro N tal que:

   a) $222\,222\,222\,222 = 2\,008 \times N$?

   b) $10! = 512 \times N$?[1]

5. Maria tem 210 cartões numerados de 1 a 210.

   a) Quantos desses cartões têm um número que é múltiplo de 3?

   b) Quantos desses cartões têm um número par que não é múltiplo de 3?

6. Vivi, Titi e Lili estão em fila, não necessariamente nessa ordem, e gritam sucessivamente, cada uma, um múltiplo de 3:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

   Vivi foi a primeira a gritar um número maior que 2003 e Lili a primeira a gritar um número de quatro algarismos. Quem gritou o número 666? E o 888?

[1] Para a definição do símbolo "!" consulte a nota ao Problema 7 da Aula 1.

Em muitos problemas de divisão, é mais conveniente trabalhar com a definição de divisibilidade do que com o método da chave. Vejamos.

Exercício Resolvido 3.2. Mostre que 123 456 123 456 é divisível 1 000 001 e calcule quanto vale a divisão.
Resolução: Fazer aqui a divisão pelo método da chave seria loucura! Tentemos, ao invés, reescrever o número como um produto. Assim, se conseguirmos encontrar um número M tal que

$$123\,456\,123\,456 = M \times 1\,000\,001,$$

então, pela Definição 3.1, poderemos concluir que

$$1\,000\,001 \mid 123\,456\,123\,456.$$

Além disso, já ganharemos que o próprio M é o valor da divisão de um pelo outro. Note que:

$$\begin{aligned} 123\,456\,123\,456 &= 123\,456\,000\,000 + 123\,456 \\ &= 123\,456 \times 10^6 + 123\,456 \\ &= 123\,456 \times (10^6 + 1) \\ &= \underbrace{123\,456}_{\text{O } M \text{ que procurávamos}} \times 1\,000\,001. \end{aligned}$$

Portanto, $1\,000\,001 \mid 123\,456\,123\,456$ e

$$123\,456\,123\,456 \div 1\,000\,001 = 123\,456.$$

□

Exercícios Propostos

1. Mostre que 1 232 136 963 é divisível por 100 003 e calcule quanto vale a divisão.

2. Mostre que $2^{2020} + 2^{2019} + 2^{2018}$ é divisível por 7 e calcule quanto vale a divisão.

3.3 Propriedades da Divisibilidade

Partindo apenas da Definição 3.1 conseguimos provar diversas propriedades da divisibilidade. Listamos na proposição abaixo as principais.

Proposição 3.1. Sejam A, B, C e D números inteiros quaisquer, diferentes de zero. Então valem as seguintes propriedades:

(i) Se $A \mid B$ e $B \mid C$, então $A \mid C$.

(ii) Se $A \mid B$ e $C \mid D$, então $AC \mid BD$.

(iii) Se $A \mid B$ e $A \mid C$, então $A \mid (B + C)$.

(iv) Se $A \mid B$, então $A \mid kB$, qualquer que seja o inteiro k.

(v) Se $A \mid B$ e $A \mid C$, então $A \mid (mB + nC)$, quaisquer que sejam os inteiros m e n.

(vi) Suponha que $A \mid B$. Então $A \mid C$ se e somente se $A \mid (B + C)$. Ou seja: se um número divide uma parcela de uma soma, então ele divide a outra parcela se e somente se divide a soma toda.

Demonstração

Vamos demostrar as propriedades (v) e (vi).

Prova de (v): A propriedade (v) poderia ser demonstrada a partir das propriedades (iii) e (iv) (percebe como?). Mas, faremos a prova partindo diretamente da Definição 3.1. Por hipótese, sabemos que $A \mid B$ e $A \mid C$. Então, pela Definição 3.1, existem inteiros s e t tais que:

$$B = A \times s$$

$$C = A \times t.$$

Vamos agora multiplicar os dois lados da primeira equação por um inteiro m qualquer e os dois lados da segunda por um inteiro n qualquer. Obtemos:

$$m \times B = A \times s \times m$$

$$n \times C = A \times t \times n$$

Agora, somando as duas equações termo a termo, temos que:

$$m \times B + n \times C = A \times s \times m + A \times t \times n = A \times \underbrace{(s \times m + t \times n)}_{=K}.$$

Logo, existe um K inteiro (a saber, $K = s \times m + t \times n$) tal que $mB + nC = A \times K$. Portanto, $A \mid (mB + nC)$, quaisquer que sejam os inteiros m e n.

Prova de (vi): A nossa hipótese inicial é de que $A \mid B$. Temos que provar que $A \mid C$ *se e somente se* $A \mid (B + C)$. A expressão "se e somente se" significa que a proposição tem de valer nos dois sentidos, ou seja:

(1) Se $A \mid C$, então $A \mid (B + C)$.

(2) Se $A \mid (B + C)$, então $A \mid C$.

Assim, na verdade temos de provar *duas* coisas: as afirmações (1) e (2).

Prova da afirmação (1): A hipótese é de que $A \mid C$. Mas, sabemos também (pela hipótese inicial) que $A \mid B$. Ora, se $A \mid B$ e $A \mid C$, então pela propriedade (iii) podemos concluir que $A \mid (B + C)$.

Prova da Afirmação (2): A hipótese é de que $A \mid (B + C)$. Mas, sabemos também que $A \mid B$. Então, a propriedade (iv) nos garante que $A \mid kB$, *qualquer que seja o inteiro* k. Podemos escolher $k = -1$: logo, $A \mid (-1)B$, ou seja, $A| - B$. Ora, temos que $A| - B$ e $A \mid (B + C)$. Então, pela propriedade (iii), $A \mid \underbrace{[-B + (B + C)]}_{=C}$.

Portanto, $A \mid C$. ■

Exemplo 3.7. Mostremos que o único divisor positivo comum entre um número e o seu sucessor é o 1.

Seja n um inteiro qualquer, e seja a um outro inteiro divisor positivo tanto de n quanto do sucessor de n: assim, $a \mid n$ e $a \mid (n+1)$. Então, pela propriedade (v), $a \mid 1$. Como o único divisor positivo de 1 é ele mesmo, então $a = 1$.

Exemplo 3.8. Suponha que m e n sejam inteiros tais que $19 \mid (3m+7n)$. Mostremos que $19 \mid (43m+75n)$. Como $19 \mid (3m+7n)$, então, pela propriedade (iv), $19 \mid 8 \times (3m+7n)$. Logo:

$$19 \mid (24m+56n). \tag{3.1}$$

E como, obviamente, $19 \mid 19$, então, novamente pela propriedade (iv), $19 \mid 19 \times (m+n)$. Logo:

$$19|(19m+19n). \tag{3.2}$$

Assim, juntado (3.1) e (3.2) e usando a propriedade (iii), temos que:

$$19 \mid \underbrace{(24m+56n)+(19m+19n)}_{=43m+75n}.$$

Portanto, $19 \mid (43m+75n)$.

Exercícios Propostos

1. Demonstre as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv) da Proposição 3.1.

2. Sejam a e b inteiros. Mostre que:

   a) Se $7 \mid (3a+2b)$, então $7 \mid (4a-2b)$.
   b) Se $3 \mid (a+7b)$, então $3 \mid (a+b)$.
   c) Se $7 \mid (a+3b)$, então $7 \mid (13a+11b)$.
   d) Se $17 \mid (3a+2b)$, então $17 \mid (10a+b)$.

3.4 Mais Algumas Propriedades Importantes

Sejam A, B e C inteiros. Agora suponha, em primeiro lugar, que $A \mid B \times C$. Será que podemos disso concluir que $A \mid B$ ou

$A \mid C$? Resposta: não! *Por que* não? Em Matemática, quando queremos mostrar que uma afirmação é falsa, um dos recursos mais usados é fornecer um exemplo em que ela falha: é o que chamamos de *contraexemplo*. Pois bem, para fornecer um contraexemplo à afirmação "Se $A \mid B \times C$, então $A \mid B$ ou $A \mid C$", devemos encontrar valores específicos para A, B e C tais que $A \mid B \times C$, mas $A \nmid B$ e $A \nmid C$.[1] Para isso, basta escolher $A = 6$, $B = 10$ e $C = 3$. Então temos que $6 \mid (10 \times 3 = 30)$, mas $6 \nmid 10$ e $6 \nmid 3$.

Em segundo lugar, suponha que $A \mid C$ e $B \mid C$. Então podemos disso concluir que $A \times B \mid C$? Novamente não! Como contraexemplo tome $A = 2$, $B = 4$ e $C = 4$: então, $2 \mid 4$, $4 \mid 4$, mas $(2 \times 4 = 8) \nmid 4$.

Logo, ambas as afirmações são falsas. Todavia, *elas podem se tornar verdadeiras* desde que assumamos determinadas hipóteses. É o que nos mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2. Sejam A, B e C inteiros não nulos. Então vale o seguinte:

(i) Se $A \mid B \times C$ *e o único divisor positivo que A e B têm em comum é o 1*[2], então $A \mid C$.

---

[1] Pois, de acordo com a linguagem lógica adotada pela Matemática, uma afirmação do tipo "Se ..., então ..." (chamada de "implicação") só é falsa quando o que é dito antes do "então" (chamado de "antecedente" da implicação) é verdadeiro e o que é dito depois do "então" (o "consequente" da implicação) é falso. *Em todos outros casos*, e por mais estranho que isso pareça, a afirmação é verdadeira. Por exemplo, a afirmação "Se 3 é um número ímpar, então $3 + 1$ também é ímpar" é falsa, porque o antecedente ("3 é um número ímpar") é verdadeiro e o consequente ("$3 + 1$ também é ímpar") é falso. Mas, a afirmação "Se 3 é um número par, então $3 + 1$ é um número irracional" é verdadeira, pois o antecedente ("3 é um número par") e o consequente ("$3 + 1$ é um número irracional") são ambos falsos: esse tipo de afirmação é dita "vacuamente verdadeira", pois ela é verdadeira do ponto de vista formal, mas não diz nada de que se possa aproveitar. Achou confuso? Então saiba que, do ponto de vista lógico, a afirmação "Se os seres humanos são anões voadores, então os gatos soltam fogo pelo nariz" é verdadeira!

[2] Essa condição é equivalente a dizer que A e B *não têm nenhum fator primo em comum*, ou ainda, que $mdc(A, B) = 1$. Você estudará fatoração em primos e mdc (máximo divisor comum) em aulas posteriores.

(ii) Se $A \mid C$ e $B \mid C$ *e o único divisor positivo que* A *e* B *têm em comum é o 1*, então $A \times B \mid C$.

Você entenderá melhor por que essas afirmações são verdadeiras nas aulas sobre primos.

Exemplo 3.9. Suponha que nos tenha sido informado que $239 \mid 88\,888\,888\,888\,888$. Então, sem fazer muitas contas, poderemos concluir que $239 \mid 11\,111\,111\,111\,111$. Vejamos por quê.

Note que

$$88\,888\,888\,888\,888 = 8 \times 11\,111\,111\,111\,111 = 2^3 \times 11\,111\,111\,111\,111.$$

Desse modo, a informação de início fica assim:

$$239 \mid 2^3 \times 11\,111\,111\,111\,111.$$

Agora note que, por um lado, os únicos divisores de 2^3 são potências de 2 e, por outro, como 239 é ímpar, ele não pode ter entre os seus divisores nenhuma potência de 2 exceto $2^0 = 1$. Logo, o único divisor positivo que 2^3 e 239 têm em comum é o 1. Portanto, pela propriedade (i) podemos concluir que $239 \mid 11\,111\,111\,111\,111$.

Problemas Propostos

1. ● Maria escolheu um número inteiro. Ela somou a esse número os três números ímpares imediatamente inferiores e os dois números pares imediatamente superiores a ele e obteve 1414 como resultado. Qual é o número que Maria escolheu?

2. ● Em Portugal, o dia 4 de outubro de 1582 foi o último dia do calendário *juliano*, que foi substituído pelo calendário adotado atualmente, o calendário *gregoriano*. O dia seguinte foi definido como 15 de outubro de 1582, ou seja, não houve os dias 5 a 14 de outubro de 1582.

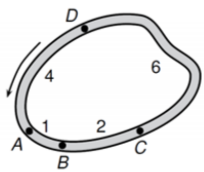
   A única diferença entre os calendários é que, no calendário juliano, todos os anos múltiplos de 4 eram bissextos; no calendário gregoriano, os anos que são múltiplos de 100, mas não de 400, não são bissextos. Assim, 1900 seria um ano bissexto no calendário juliano, mas não no calendário gregoriano.

Se hoje é dia 18 de Abril de 2020, que dia seria se não tivéssemos mudado de calendário?

3. ● Devido a um defeito de impressão, um livro de 600 páginas apresenta em branco todas as páginas cujos números são múltiplos de 3 ou de 4. Quantas páginas estão impressas?

4. ● Entre os números naturais de 1 até n, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

5. ● A figura a seguir representa o traçado de uma pista de corrida. Os postos A, B, C e D são usados para partidas e chegadas de todas as corridas. As distâncias entre postos vizinhos, em quilômetros, estão indicadas na figura e as corridas são realizadas no sentido indicado pela flecha. Por exemplo, uma corrida de 17 quilômetros pode ser realizada com partida em D e chegada em A.



   a) Quais são os postos de partida e chegada de uma corrida de 14 quilômetros?
   b) E para uma corrida de 100 quilômetros, quais são esses postos?
   c) Mostre que é possível realizar corridas com extensão igual a qualquer número inteiro de quilômetros.

6. ● Sabemos que a diferença dos quadrados de dois números inteiros consecutivos é 2000. Então podemos afirmar que:

(a) Os dois inteiros são menores do que 100.

(b) Os dois inteiros são menores do que 1000, porém maiores do que 99.

(c) Os dois inteiros são menores do que 10000, porém maiores do que 999.

(d) Os dois inteiros são menores do que 100000, porém maiores do que 9999.

(e) Não existem esses dois números.

7. ● Alguns números inteiros positivos, não necessariamente distintos, estão escritos na lousa. A soma deles é 515 e o produto é 1024. Qual é o menor desses números?

8. ● A professora de João comprou 96 balas para repartir igualmente entre seus alunos, sem que sobrassem balas. No dia da distribuição todos os alunos foram à escola, exceto João. A professora distribuiu igualmente as balas entre os alunos presentes, mas sobraram 5 balas. Quantos alunos tem a turma de João?

9. ● Um ônibus transporta 31 estudantes, paranaenses e catarinenses, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os paranaenses, 2/5 são homens e, entre os catarinenses, 3/7 são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?

10. ● Se n for um número ímpar, a soma de n números naturais consecutivos é sempre divisível por n? E se n for par?

11. ● Um algarismo é *afilhado* de um número natural se ele é o algarismo das unidades de algum divisor desse número. Por exemplo, os divisores de 56 são 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 e 56, logo, os afilhados de 56 são 1, 2, 4, 6, 7 e 8.

   a) Quais são os afilhados de 57?

   b) Ache um número que tenha 7 e 9 como afilhados, mas não 3. Quais são os afilhados desse número?

c) Explique porque 2 e 5 são afilhados de qualquer número que tenha 0 entre seus afilhados.

d) Explique porque 8 é afilhado de qualquer número que tenha 0 e 9 entre seus afilhados.

12. ● Mostre que o número $\sqrt{2004 \times 2002 \times 1998 \times 1996 + 36}$ é múltiplo de 133 333 e determine o valor de

$$\sqrt{2004 \times 2002 \times 1998 \times 1996 + 36} \div 133\,333.$$

13. ● No início de uma brincadeira, Maria tinha sete pedaços de papel. Na primeira rodada da brincadeira, ele pegou alguns destes pedaços e cortou cada um deles em sete pedaços, que foram misturados aos pedaços de papel que não foram cortados nessa rodada. Na segunda rodada, ele novamente pegou alguns pedaços e cortou cada um deles em sete pedaços, que foram misturados aos demais papéis. Continuando dessa maneira, ao final de alguma rodada, Maria poderá ter exatamente 2009 pedaços de papel?

14. ● O professor João aplicou uma prova para seus cinco alunos e, após corrigi-las, digitou as notas em uma planilha eletrônica que calcula automaticamente a média das notas à medida que elas são digitadas. João notou que após digitar cada nota a média calculada pela planilha era um número inteiro. Se as notas dos cinco estudantes são, em ordem crescente, 71, 76, 80, 82 e 91, qual foi a última nota que João digitou?

15. ● Se a *n-ésima* OBM é realizada em um ano que é divisível por n, dizemos que esse ano é super-olímpico. Por exemplo, o ano 2001, em que foi realizada a 23ª OBM, é super-olímpico pois $2001 = 87 \times 23$ é divisível por 23. Determine todos os anos super-olímpicos, sabendo que a OBM nunca deixou de ser realizada desde sua primeira edição, em 1979, e supondo que continuará sendo realizada todo ano.

16. ● Existem dois números naturais consecutivos tais que as somas de seus algarismos são ambas divisíveis por 7?

17. ● Cada um dos naturais a, b, c e d é divisível por $ab - cd$, que também é um número natural. Prove que $ab - cd = 1$.

18. ● São escolhidos 26 números entre os números 1, 2,..., 50. Prove que um dos números é divisível por algum dos outros.

19. ● É possível encontrar 10 números naturais diferentes entre si tais que o produto de dois *quaisquer* deles seja divisível pela soma de todos os 10 números?

20. ● Maria brinca de escrever o número 2015 como a soma de três números, todos com três algarismos. Ela sempre os escreve em ordem não decrescente, como, por exemplo, $670 + 671 + 674 = 2015$ e $175 + 920 + 920 = 2015$. Note que, no segundo exemplo, o número 920 aparece duas vezes como parcela. Se ela escrevesse todas as somas possíveis, quantos números apareceriam duas vezes como parcela?

Aula 4

Critérios de Divisibilidade

Depois de uma aula cheia de propriedades e demonstrações como a Aula 3, esta aqui será mais prática, voltada à resolução de problemas, principalmente aqueles que envolvem *critérios de divisibilidade.* Antes deles, porém, vejamos algumas consequências do Teorema 2.1 (pág. 32) que podem ajudar na resolução de problemas de divisibilidade.

4.1 Algumas Consequências do Algoritmo da Divisão para a Divisibilidade

Suponha que você queira dividir um número n qualquer por 6. Então, pelo Teorema 2.1 sabemos que vão existir um quociente q e um resto r tais que:

$$n = 6 \times q + r \text{ e } 0 \leq r < 5.$$

Assim, embora não saibamos exatamente qual é o resto r da divisão (pois não sabemos qual é o número n), sabemos que este resto é 0, 1, 2, 3 ou 4. Desse modo, *podem aparecer 5 restos diferentes na divisão por 5.*

Usando o mesmo raciocínio, podemos concluir que podem aparecer 11 restos diferentes na divisão por 11: $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$; 38 restos diferentes na divisão por 38: $\{0, 1, 2, \ldots, 37\}$; e assim por diante. Generalizando o raciocínio:

Seja n um número natural qualquer. Então podem aparecer exatamente n restos diferentes na divisão por n: 0, 1, 2, ..., $n-1$.

Usemos este fato para resolver o próximo exercício.

Exercício Resolvido 4.1. Prove que, se você tiver um conjunto de 11 números naturais quaisquer, têm de existir dois desses números cuja diferença é divisível por 10.

Resolução: Para os desavisados esse exercício pode parecer excessivamente difícil. No entanto, usando o fato destacado acima, ele se torna até simples.

Consideremos um conjunto qualquer com 11 números naturais. Fazendo a divisão de cada um dos números do conjunto por 10, aparecerá algum resto que não sabemos qual é. Todavia, *sabemos que só podem aparecer 10 restos distintos na divisão desses números por 10.* Ou seja, são 11 números que podem deixar no máximo 10 restos diferentes: logo, *certamente vão existir pelo menos dois desses números que deixam o mesmo resto*[1].

Chamemos de m e n esses números que deixam o mesmo resto r na divisão por 10 (repare que não sabemos *qual é* o resto em questão, apenas que ele *é o mesmo*). Assim, podemos escrever:

$$m = 10q_1 + r$$

$$n = 10q_2 + r,$$

onde q_1 e q_2 são os respectivos quocientes das divisões. Logo,

$$m - n = (10q_1 + r) - (10q_2 + r) = 10q_1 - 10q_2 = 10(q_1 - q_2).$$

[1] Essa é uma conclusão bastante intuitiva, mas que pressupõe na verdade um princípio matemático, o *Princípio da Casa dos Pombos*. O seu curioso enunciado é o seguinte: "se tivermos n caixas e nelas colocarmos $n+1$ pombos, então haverá pelo menos uma caixa com dois ou mais pombos". No nosso exercício, as "caixas" são os 10 possíveis restos na divisão por 10 e os "pombos" são os 11 números do conjunto. No curso de *Combinatória* você terá uma aula inteira dedicada a esse princípio.

Portanto, $m - n$ é divisível por 10, ou seja, existem dois elementos do conjunto (a saber, m e n) cuja diferença é divisível por 10. $\square$

***

Observemos agora o seguinte. Dado n um natural qualquer, vamos dividi-lo por 3. Então existem as seguintes possibilidades:

(i) O resto da divisão é zero e, assim, $3 \mid n$.

(ii) O resto da divisão é 1 e, assim, podemos escrever:

$$n = 3q + 1 \xRightarrow[\text{em ambos os lados}]{\text{somando 2}} n + 2 = 3q + 3 = 3(q + 3).$$

Portanto, $3 \mid n + 2$.

(iii) O resto da divisão é 2 e, assim, podemos escrever:

$$n = 3q + 2 \xRightarrow[\text{em ambos os lados}]{\text{somando 1}} n + 1 = 3q + 3 = 3(q + 3).$$

Portanto, $3 \mid n + 1$.

Assim, concluímos que n, $n+1$ ou $n+2$ é divisível por 3, qualquer que seja o natural n. Ou seja: *dados três números consecutivos quaisquer, exatamente um deles é divisível por 3.* Ora, podemos generalizar essa conclusão[1]:

Dados n números inteiros consecutivos, exatamente um deles é divisível por n.

Sabendo disso, façamos o próximo exercício.

Exercício Resolvido 4.2. Prove que $n^3 - n$ é divisível por 6, qualquer que seja o n inteiro.

Resolução: Chamando $n^3 - n$ de N, note que:

$$N = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1).$$

[1] A demonstração não será feita aqui, mas tente perceber por que essa generalização é verdadeira a partir do argumento da quantidade de restos distintos e do raciocínio empregado acima para o caso da divisibilidade por 3.

Assim, N é produto de três números consecutivos. Pela observação acima, podemos garantir que um desses números é divisível por 2 e outro é divisível por 3. Logo, $2 \mid N$ e $3 \mid N$. Como o único divisor positivo comum entre 2 e 3 é o 1 então, pela Proposição **??** (ii) (Aula 3), $(2 \times 3 = 6) \mid N$. □

Exercícios Propostos

1. Suponha que seja dado um conjunto de n números naturais quaisquer. Explique por que podemos sempre garantir que existem dois deles cuja diferença é divisível por $n - 1$.

2. Mostre que, dados 5 inteiros consecutivos quaisquer, exatamente um deles é divisível por 5 (use o mesmo raciocínio empregado acima para provar o caso em que são três inteiros consecutivos).

3. Mostre que $n^{114} - n^{38}$ e $n^3 + 3n^2 + 2n$ são ambos divisíveis por 6, qualquer que seja o n inteiro.

4. O número $2014 \times 2015 \times 2016 \times 2017 \times 2018 \times 2019 \times 2020$ é divisível por 210?

5. Seja n um inteiro e considere $N = n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3)$. Usando um raciocínio análogo ao do Exercício Resolvido 4.1.2, podemos garantir que $2 \mid N$ e $3 \mid N$ e, assim, concluir que $(2 \times 3 = 6) \mid N$. Por outro lado, também podemos garantir que $2 \mid N$ e $4 \mid N$: porém, *não* podemos disso concluir que $(2 \times 4 = 8) \mid N$. Por quê?

4.2 Critérios de Divisibilidade

Os critérios de divisibilidade são um dos conteúdos mais interessantes da Teoria de Números: com eles é possível conferir se um número dado (por maior que seja) é ou não divisível por um outro número, e isso por simples inspeção de alguns detalhes, sem necessidade de efetuar a conta de divisão.

Você provavelmente já viu esse conteúdo na escola. Nós o apresentaremos usando a notação que você aprendeu aqui para divisibilidade.

Proposição 4.1. (Critérios de Divisibilidade). Seja N um inteiro qualquer. Então valem as seguintes propriedades:

- $2 \mid N$ se e somente se 2 divide o último algarismo de N (ou seja, o último algarismo de N for par).

- $3 \mid N$ se e somente se 3 divide a soma dos algarismos de N.

- $4 \mid N$ se e somente se 4 divide o número formado pelos dois últimos algarismos de N.

- $5 \mid N$ se e somente se o último algarismo de N é 0 ou 5.

- $7 \mid N$ se e somente se a diferença entre o número formado excluindo o último algarismo de N e o dobro desse último algarismo é divisível por N.

- $8 \mid N$ se e somente se 8 divide o número formado pelos três últimos algarismos de N.

- $9 \mid N$ se e somente se 9 divide a soma dos algarimos de N.

- $11 \mid N$ se e somente se 11 divide a soma e diferença alternada dos algarimos de N, da direita para a esquerda.

Exemplo 4.1. Preste atenção à expressão "se e somente se" que aparece no enunciado de cada critério. Ela significa que as condições dadas são *necessárias e suficientes.* Por exemplo, no critério do 9, por um lado, *é necessário* que 9 divida a soma dos algarimos do número N: se não dividir tal soma, então $9 \nmid N$. Por outro lado, *é suficiente* que 9 divida a soma dos algarismos de N: para ver se divide N, *basta* verificar se divide tal soma.

Assim, se tomarmos $N = 12\,345\,678$, então pelo simples fato de que $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$ e $9 \mid 36$ podemos garantir que $9 \mid N$. E se tomarmos $N = 23\,456\,789$, então pelo simples fato de que $2+3+4+5+6+7+8+9 = 44$ e $9 \nmid 44$ podemos garantir que $9 \nmid 23\,456\,789$.

Exemplo 4.2. Vamos esclarecer o critério do 11. Tome o número $N = 538.171.359$. Coloquemos alternadamente sinais de mais e de menos antes dos algarimos de N, mas indo da direita para a esquerda: $+9-5+3-1+7-1+8-3+5$. É exatamente isso que chamamos de "soma e diferença alternada dos algarimos de N, da direita para a esquerda". Assim, pelo critério, $11 \mid N$ se e somente se $11 \mid +9-5+3-1+7-1+8-3+5$. Mas, $+9-5+3-1+7-1+8-3+5 = 22$ e $11 \mid 22$. Logo, $11 \mid N$.

Exemplo 4.3. Vamos agora esclarecer o critério do 7. Seja $N = 58982$. O número formado excluindo o último algarismo de N é 5898 e o dobro do último algarismo é 4. Assim, $7 \mid N$ se e somente se $7 \mid (5898 - 4 = 5894)$. Como é difícil de visualizar se $7 \mid 5894$, devemos aplicar mais uma vez o critério, repetindo o processo. Tome 589 (que é 5894 sem o último algarismo) e 8 (o dobro do último algarismo de 5 894). Então $589 - 8 = 581$. Também não é imediato se $7 \mid 581$. Aplicando uma terceira vez o critério, tome 58 (581 sem o último algarismo) e 2 (o dobro do último algarismo de 581). Logo, $58 - 2 = 56$ e $7 \mid 56$. Portanto, pela aplicação sucessiva do critério do 7, podemos concluir que $7 \mid N$.

Como você pode perceber, diferentemente dos outros critérios o do 7 não ajuda muito: para decidir se um número é divisível por 7 geralmente é mais fácil fazer a conta de divisão mesmo...

Exemplo 4.4. Tome $N = 63\,617\,400$. Como o último algarismo de N é 0, então $2 \mid N$ e $5 \mid N$. Como $4 \mid 00$ (o número formado pelos dois últimos algarimos de N), então $4 \mid N$. Como $8 \mid 400$, então $8 \mid N$. Como $6+3+6+1+7+4+0+0 = 27$ e $3 \mid 27$ e $9 \mid 27$, então $3 \mid N$ e $9 \mid N$. Como $0-0+4-7+1-6+3-6 = -11$ e $11 \mid -11$, então $11 \mid N$. Portanto, N é divisível por 2, 3, 4, 5, 8, 9 e 11. Disso podemos concluir que $6 \mid N$, $10 \mid N$ e $(5\times8\times9\times11 = 3960) \mid N$, mas *não podemos concluir que* N é divisível por $2\times3\times4\times5\times8\times9\times11$. Você lembra por quê?

Exercícios Propostos

1. Na Proposição 4.2.1, até o número 11 só não enunciamos os critérios de divisibilidade por 6 e 10. Não o fizemos porque eles podem ser facilmente deduzidos dos outros critérios. Sendo assim, enuncie e justifique os critérios por 6 e 10.

2. Verifique se os seguintes números são múltiplos de 11:

   a) 1 358 016.
   b) 147 852 369.
   c) 1 234 567 812 345 678 123 456.

Os critérios de divisibilidade facilitam tanto a nossa vida, que dificilmente você encontrará uma questão de olimpíada que possa ser resolvida pela mera aplicação direta deles: tal questão seria simples demais. Geralmente, você usará os critérios como *parte* da resolução, precisando recorrer também a outros raciocínios e conhecimentos sobre divisibilidade.

Exercício Resolvido 4.3. O número de seis dígitos $ab2016$ é múltiplo de 99. Determine o valor dos dígitos a e b.
Resolução: A resolução para esse problema será um pouco longa, mas, acompanhando-a com calma, você perceberá que ela não é tão complicada.

Como $(99 = 9 \times 11) \mid ab2016$, então $9 \mid ab2016$ e $11 \mid ab2016$ (qual das propriedades de divisibilidade da Proposição 3.1 da pág. 56 estamos usando para concluir isso?). Assim, *por um lado*, pelo critério de divisibilidade do 9 sabemos que

$$9 \mid a+b+2+0+1+6 \Rightarrow 9 \mid (a+b)+9 \xRightarrow[\text{pág. 56}]{\text{Pela Proposição 3.1 (vi)}} 9 \mid (a+b).$$

Agora, como a e b são dígitos, ou seja, só podem assumir valores entre 0 e 9, e como $a \neq 0$ (caso contrário, $ab2016$ seria um número de 5, não de 6 dígitos), então podemos concluir que $1 \leq a+b \leq 18$.

Logo, como $9 \mid (a+b)$ e $1 \leq (a+b) \leq 18$, então existem duas possibilidades:

$$a+b=9 \text{ ou } a+b=18. \qquad (*)$$

Por outro lado, pelo critério do 11 sabemos que

$$11 \mid 6-1+0-2+b-a \Rightarrow 11 \mid (b-a+3).$$

E como

$$1 \leq a \leq 9 \text{ e } 0 \leq b \leq 9 \Rightarrow -9 \leq b-a \leq 8$$

$$\xRightarrow[\text{na desigualdade}]{\text{somando 3}} -6 \leq b-a+3 \leq 11$$

Logo, como $11 \mid (b-a+3)$ e $-6 \leq (b-a+3) \leq 11$, então existem duas possibilidades:

$$b-a+3=0 \text{ ou } b-a+3=11 \Rightarrow$$

$$-a+b=-3 \text{ ou } -a+b=8. \qquad (**)$$

Combinando as duas possibilidades para $a+b$ em (*) e as duas para $-a+b$ em (**), existem um de total quatro possibilidades, expressas em cada um dos quatro sistemas de equações abaixo:

- $\begin{cases} a+b=9 \\ -a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=3 \text{ e } b=6.$

- $\begin{cases} a+b=9 \\ -a+b=6 \end{cases} \Rightarrow 2b=15$ (o que é impossível, pois b deve ser um número inteiro).

- $\begin{cases} a+b=18 \\ -a+b=\ \ 3 \end{cases} \Rightarrow 2b=21$ (impossível).

- $\begin{cases} a+b=18 \\ -a+b=\ \ 6 \end{cases} \Rightarrow b=12$ (impossível, pois $0 \leq b \leq 9$).

Portanto, o único caso possível é para $a = 3$ e $b = 6$. □

Exercícios Propostos

1. O número de 5 dígitos $a184b$ é múltiplo de 110. Determine o valor dos dígitos a e b.

2. Sabe-se que o número $a2b$ é múltiplo de 15. Descubra todos os valores possíveis para a e b.

3. Explique por que não existem dígitos a e b tais que o número $a1234b$ seja divisível por 330.

4. Explique por que não existe um dígito a tal que o número $a1234\ldots20192020$ (construído colocando-se depois do a os números de 1 a 2020 um ao lado do outro) seja múltiplo de 33.

Problemas Propostos

1. ● (OBM 2004) Ao somar cinco números consecutivos em sua calculadora, Esmeraldinha encontrou um número de 4 algarismos: $200*$. O último algarismo não está nítido, pois o visor da calculadora está arranhado, mas ela sabe que ele não é zero. Qual é esse algarismo?

2. ● (OBM 2013) Dalvenilson (melhor chamá-lo só de "D"...) estava caindo de sono durante a aula de Matemática, que era sobre critérios de divisibilidade. Ele cochilou na hora que o professor estava explicando sobre o critério do 7. Por isso, para fazer um exercício proposto sobre o tema, D decidiu usar o critério do 3. Para quantos números inteiros positivos menores que 100 esse método incorreto de D indicou um número que é de fato múltiplo de 7?

3. ● (OBM 2004) Qual é o algarismo da unidade dos números abaixo?

   (a) $789\,789\,789 \times 567\,567\,567 \times 345\,345\,345 \times 123\,123\,123$.

   (b) $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 97 \times 99$.

4. ● Determine o maior e o menor número múltiplo de 6 formado por seis algarismos. Depois determine o maior e o menor número múltiplo de 6 formado por seis algarismos *distintos*.

5. ● (OBM 2001) No conjunto $\{101, 1\,001, 10\,001, \ldots, 1\,000\,000\,000\,001\}$, cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:

   (A) é igual 11.

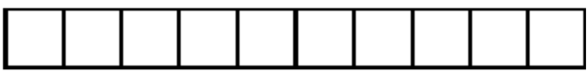
   (B) é igual a 4.

   (C) é menor do que 3.

   (D) é maior do que 4 e menor do que 11.

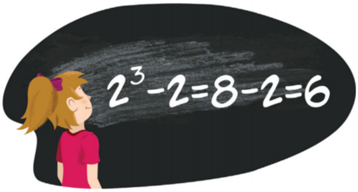
   (E) é 3.

6. ● (OBM 1998) Coloque em cada quadradinho, no desenho abaixo, os algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5, de forma que cada um deles apareça pelo menos uma vez e que o número formado seja o maior possível e múltiplo de 9.



7. ● (OBM 2001) Qual é o último algarismo da soma de 70 números inteiros positivos consecutivos?

8. ● (OBMEP 2017) Florzinha faz o seguinte cálculo com números inteiros positivos: ela escolhe um número, eleva esse número ao cubo e subtrai desse cubo o próprio número.



(a) Qual é o resultado do cálculo de Florzinha com o número 3?

(b) Qual é o número que deve ser escolhido por Florzinha para que o resultado do cálculo seja 1320?

(c) Explique por quê, para qualquer número que Florzinha escolher, o resultado final do cálculo será sempre um múltiplo de 6.

9. ● Dizemos que um número *pintou o sete* se a soma de seus algarismos for divisível por sete. Por exemplo, 7, 25 e 849 pintaram o sete. Os dois menores números que pintaram o sete são 7 e 16.

   a) Encontre oito números consecutivos, dos quais dois pintaram o sete.

   b) Encontre doze números consecutivos, tais que nenhum deles tenham pintado o sete.

   c) Mostre que qualquer sequência de treze números consecutivos contém, pelo menos, um número que pintou o sete.

10. ● Coloque algarismos no lugar dos asteriscos de modo que o número $32{*}35.717{*}$ seja divisível por 72.

11. ● Acerca da divisibilidade por 11:

   a) Encontre o maior número que utilize os algarismos 0 a 9 exatamente uma vez cada e que seja divisível por 11.

   b) Encontre o menor número assim, sem começar em 0.

c) Qual é o menor inteiro positivo múltiplo de 11 para o qual a soma e diferença alternada de seus algarismos (pelo critério do 11) não resulta em 0?

12. ● Ainda sobre a divisibilidade por 11:

a) O número N é formado colocando os números de 10 a 99 um ao lado do outro. Assim,

$$N = 101112131415...9899.$$

N é divisível por 11?

b) Existe algum natural n tal que o número

$$\underbrace{123345567789}_{n \text{ vezes } 123345567789}123345567789...123345567789$$

seja divisível por 11?

13. ● (OPRM 2018) Sejam os números da sequência infinita: 6, 66, 666, 6666, 66666, 666666, ... Podemos então afirmar:

a) Todos os números, com exceção do primeiro, são múltiplos de 11.
b) Nenhum deles é múltiplo de 12.
c) Existe pelo menos um quadrado perfeito entre eles.
d) Não existe nenhum múltiplo de 11^2.
e) Nenhum deles é múltiplo de 9.

14. ● Um número é dito *palíndromo* se sua leitura da direita para a esquerda for igual à da esquerda para a direita. Por exemplo, os números 23 432 e 18 781 são palíndromos. Quantos números palíndromos de quatro algarismos são divisíveis por 9?

15. ● O *múltiplo binário* de um número natural é o menor múltiplo do número formado apenas pelos algarismos 0 e 1. Por exemplo, o múltiplo binário de 2, bem como de 5, é 10; já o múltiplo binário de 3 é 111 e o de 110 é ele mesmo.

a) Qual é o múltiplo binário de 20?
b) Qual é o múltiplo binário de 9?
c) Qual é o múltiplo binário de 45?
d) Qual é o menor número natural cujo múltiplo binário é 1110?

16. ● (OBM 2007) Mostre que para todo número natural n, $n^5 - n$ é múltiplo de 30.

17. ● (OBMEP 2016) Delinelson escreveu no quadro-negro dois números cuja soma é igual a 1357. Ele observou que um desses números poderia ser obtido apagando o algarismo das unidades do outro. Qual é esse algarismo?

18. ● Na adição abaixo, letras iguais representam o mesmo algarismo e letras diferentes, algarismos diferentes. Encontre o número $ABCDE$.

$$\begin{array}{cccccc} & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ & & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ & & & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ & & & & \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ + & & & & & \mathrm{E} \\ \hline & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{A} \end{array}$$

19. ● (OBM 2010) Seja N o menor número inteiro positivo que multiplicado por 33 resulta em um número cujos algarismos são todos iguais a 7. Determine N.

20. ● (OBMEP 2016) Na figura, as letras A e B representam os possíveis algarismos que tornam o produto dos números $2A5$ e $13B$ um múltiplo de 36.

a) Em todos os possíveis resultados para o produto desses números, o algarismo das unidades é o mesmo. Qual é esse algarismo?
b) Quais são os possíveis valores de B?

c) Qual é o maior valor possível para esse produto?

21. ● (OBM 2016) Na conta de multiplicação abaixo, os algarismos 2, 3, 5 e 7 são representados pelas letras A, B, C e D, não necessariamente nesta ordem. Determine o número $ABCD$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{A} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ & \times & & \mathrm{C} & \mathrm{C} \\ \hline \mathrm{D} & \mathrm{B} & \mathrm{B} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{array}$$

22. ● Considere a lista de números a_1, a_2, ..., onde $a_n = 111111...1$ (3^n algarismos 1), ou seja, $a_1 = 111$ (três uns), $a_2 = 111111111$ (nove uns), $a_3 = 111...1$ (vinte e sete uns), e assim por diante.

a) Mostre que a_1 é múltiplo de 3 mas não de 9.
b) Mostre que a_2 é múltiplo de 9 mas não de 27.
c) Mostre que a_3 é múltiplo de 27 mas não de 81.

23. ● Leia o diálogo entre os números 13 e 16:

Os números 16 e 13 são *amigos quadráticos*, pois, por um lado, $16^2 = 256$ e $2 + 5 + 6 = 13$ e, por outro lado, $13^2 = 169$ e $1 + 6 + 9 = 16$. Responda o que se pede justificando as respostas:

a) Os números 17 e 19 são amigos quadráticos?
b) Caso um número seja amigo quadrático de si mesmo, ele é dito *egoísta quadrático*. Por que os números 0 e 1 são egoístas quadráticos? Encontre um outro número (além do 0 e do 1) que seja egoísta quadrático.

c) Caso um número não possua nenhum amigo quadrático e também não seja um egoísta quadrático, ele é dito *solitário quadrático*. Dentre os números naturais, quantos solitários quadráticos existem entre 100 e 999 (incluindo 100 e 999)?

d) Existem também os *colegas quadráticos*. Dois números são colegas quadráticos se a soma dos algarismos do quadrado de um número é igual à soma dos algarismos do quadrado do outro. Por exemplo, os números 4 e 5 são colegas quadráticos porque a soma dos algarismos de $4^2 = 16$ é 7 e a soma dos algarismos de $5^2 = 25$ também é 7. Os números 13 e 17 são colegas quadráticos? E os números 508 e
$\sqrt{1 + 6060060006 \times 3030030004 - 2020020002 \times 9090090009}$?

e) Beremiz, excepcional matemático que nunca errava as contas, deparou-se com o seguinte número escrito numa parede:

$$811\mathbf{X}7013\mathbf{Y}321512412\mathbf{Z}$$

Os algarismos marcados com X, Y e Z estavam apagados. Para decifrá-los, Beremiz dispunha apenas das seguintes informações:

- Os números YZX e ZYX não são solitários quadráticos;
- O número XYZ é colega quadrático do 12.

Depois de pensar um pouco, Beremiz afirmou: *"Este número na parede é certamente um múltiplo de 30"*. Como é que Beremiz descobriu isso?

24. ● É possível encontrar um número da forma 11...1100...00 que seja divisível por 2003?

Aula 5

Os Números Primos

Existe uma classe muito nobre de números que, em certo sentido, origina todos os outros: a classe dos *números primos*. Eles são chamados de “primos” justamente porque vêm *por primeiro*, antes dos demais números, no sentido em que todos os inteiros são o produto de primos. Por exemplo,

$$12 = 2^2 \times 3.$$
$$4725 = 3^3 \times 5^2 \times 7.$$
$$12\,155 = 5 \times 11 \times 13 \times 17,$$

onde 2, 3, 5, 11, 13 e 17 são números primos.

Os primos são como átomos de cuja composição surgem todos os números. Então, para explicitar a “estrutura atômica” de um número, devemos fazer sua *decomposição* ou *fatoração* em primos. Cada primo em questão é chamado de *fator* do número decomposto: assim, no exemplo acima, 5, 11, 13 e 17 são os fatores de 12 155.

Dessa forma, podemos dividir os números inteiros em duas classes: a dos *primos* e a dos *compostos* - ou seja, dos que surgem da *composição* de primos.

5.1 Uma Definição Matemática

O que fornecemos até agora foi uma *descrição intuitiva* dos números primos e compostos. Mas na matemática não paramos na intuição: devemos também elaborar uma definição exata e abstrata do assunto. Essa definição deve ser a mais enxuta possível, e usar apenas conceitos definidos previamente.

Podemos atender a essas exigências definindo “número composto” com base apenas na noção de divisibilidade, já definida na Aula 3:

Definição 5.1. Um número é *composto* se possui ao menos um divisor positivo diferente de 1 e dele mesmo.

Ou, de forma equivalente:
Um inteiro a é composto se e somente se existem inteiros b e c tais que:

$$a = \pm b \cdot c \qquad \text{e} \qquad 1 < b, c < a,$$

onde o sinal $+$ ou $-$ vai depender de a ser positivo ou negativo. Os números b e c, que dividem a, são chamados também de *fatores* de a.

Já o número primo, enquanto átomo, é *indivisível*, ou seja, não é divisível por nenhum número positivo diferente de 1 e dele mesmo.
Observação. E como fica o número 1? Como seu único divisor positivo é ele mesmo, certamente não é composto. Podemos concluir então que é primo? Essa parece uma conclusão não só lógica, como também intuitiva: ora, se os primos são os números que “vêm por primeiro”, então o 1 é “muito primo”! Porém, na matemática costuma-se excluir o 1 da categoria dos primos: o 1 não é nem composto nem primo... O motivo para isso é apresentado na próxima seção.

Exercício Resolvido 5.1. (OPRM 2018) Dois números inteiros positivos a e b, com $a < b$, são ditos primos de segundo grau se $b^2 - a^2$ é um número primo. Quanto vale a diferença entre dois números primos de segundo grau?

Resolução. Como $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, então ele possui dois divisores: $b-a$ e $b+a$. Mas $b^2 - a^2$ é primo, então seus únicos divisores são o 1 e ele mesmo. Como $b-a$ é um desses divisores, então $b-a=1$ ou $b-a=b^2-a^2$.

Se $b-a=b^2-a^2$, então $b+a$, o outro divisor, deve ser 1: o que não é possível, pois a e b são inteiros positivos, logo $b+a>1$. Portanto, $b-a=1$, ou seja, a diferença entre dois primos de segundo grau é 1.

Exercícios de Reflexão

1. Sejam a, b e c inteiros tais que $a = b\cdot c$. Podemos disso concluir que a é um número composto?

2. Sejam a, b e c inteiros, com $b, c \neq 1$, tais que $a = b\cdot c$. Podemos disso concluir que a é um número composto?

3. Sejam a, b e c inteiros, com $b, c \neq a$, tais que $a = b\dot{c}$. Podemos disso concluir que a é um número composto?

Exercícios de Fixação

1. (OBM 2001) Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5?

2. Existem inteiros positivos a e b tais que $a^2 + b^2 + 2ab$ seja um número primo?

3. Sejam a, b, c e d inteiros positivos tais que $ab - cd + ac - bd = 37$. Quanto valem $a-d$ e $b+c$?

5.2 Os Números que Originam Todos os Outros

Vamos agora traduzir para a linguagem matemática a observação de que os primos são átomos dos quais todos os inteiros são compostos.

Teorema 5.1. (Teorema Fundamental da Aritmética) Seja a um número inteiro qualquer diferente de 0, 1 e -1. Então, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$ e inteiros positivos $n_1, n_2, \cdots n_t$ tais que $a = \pm p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$. Além disso, essa fatoração é única.

Você deve achar esse teorema bastante abstrato, mas na matemática as coisas são assim mesmo... Vamos ilustrá-lo com um exemplo. O teorema vale para *qualquer número inteiro a*. Vamos escolher $a = 4725$. De acordo com o teorema, devem existir primos positivos $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$ (ou seja, ordenados do menor para o maior) e inteiros positivos $n_1, n_2, \cdots n_t$ (as potências dos respectivos primos) tais que $4725 = +p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$. Quais são esses números? Ora, vimos que $4725 = 3^3 \times 5^2 \times 7$: então $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ e $p_3 = 7$ (não existe um "p_4", pois na fatoração só aparecem 3 primos distintos: então $t = 3$); além disso, $n_1 = 3$ (pois n_1 é o expoente do $p_1 = 3$), $n_2 = 2$ (o expoente do $p_2 = 5$) e $n_3 = 1$ (o expoente do $p_3 = 7$).

O essencial no teorema são duas coisas: (i) todos os inteiros podem ser fatorados como o produto de primos; (ii) só há um modo de fazer isso: é o que chamamos de *unicidade* da fatoração.

Por esse item (ii) você consegue advinhar por que os matemáticos não incluem o 1 entre os primos, conforme dito acima? Suponha que o 1 fosse considerado um número primo. Então, por exemplo, poderíamos escrever $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$ e $10 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 5$: assim, haveria dois modos distintos de fatorar o 10, o que contradiz a unicidade da fatoração.

Exemplo. Sejam a, x, y e z inteiros tais que $a = 21x$ e $a = 2yz$. Quanto valem a, x, y e z?

Como $a = x \cdot 3 \cdot 7$ e $a = 2 \cdot y \cdot z$, então, pela unicidade da fatoração em primos de a, necessariamente $x = 2$, $y = 3$ e $z = 7$.

Por conseguinte, $a = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$.

Exercício Resolvido 5.2. Os números a e b são inteiros positivos que satisfazem $96a^2 = b^3$. Qual é o menor valor possível de a?

Resolução. A fatoração em primos do 96 é $96 = 2^5 \cdot 3$. Logo, temos que:

$$2^5 \cdot 3 \cdot a^2 = b^3.$$

Se fizéssemos a fatoração de b, encontraríamos todos os fatores de b^3 elevados à potência 3 ou a algum múltiplo de 3. Então, pela unicidade da fatoração, também todos os expoentes de $2^5 \cdot 3 \cdot a^2$ devem estar elevados a algum múltiplo de 3. Com base nisso vamos descobrir os fatores de a (de modo que ele seja o menor número possível).

O número a deve conter algum fator 2 para que, juntado à potência 2^5, obtenhamos uma potência múltipla de 3. Se a contivesse apenas um fator simples 2, então a^2 teria 2^2: mas $2^5 \cdot 2^2 = 2^7$, e 7 não é múltiplo de 3. Agora, se a contiver 2^2, então a^2 conterá 2^4: $2^5 \cdot 2^4 = 2^9$, e 9 é múltiplo de 3. Portanto, podemos tomar o fator 2^2 para a.

Além disso, tomando o fator 3, temos que a^2 contém 3^2, que, juntado ao 3 de $2^5 \cdot 3 \cdot a^2$, forma 3^3.

Logo, o menor número a a ser escolhido é $a = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Exercícios de fixação

1. De acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$ e inteiros positivos $n_1, n_2, \cdots n_t$ tais que $2020 = \pm p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$. Quais são esses números?

2. De acordo com o Teorema Fundamental da Aritmética, existem primos positivos $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$ e inteiros positivos $n_1, n_2, \cdots n_t$ tais que $-219\,912 = \pm p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$. Quais são esses números?

3. Os números a e b são inteiros positivos tais que $319a^3 = b^2$. Qual é o menor valor possível de a?

4. (OBM 2009 - Modificado) Sejam m e n inteiros positivos satisfazendo $15m = 20n$. Quais são os possíveis valores para m e n?

5. Os números a e b são inteiros positivos que satisfazem $56a^3 = 75b^2$. Quais são os menores valores possíveis para a e b?

5.3 Quantos Primos Existem?

Você já sabe que $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ são primos. Também existem primos maiores, que você provavelmente não conhece. Veja na tabela abaixo todos os números primos até 1000:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Assim, existem no total 168 primos entre 1 e 1000. Alguns matemáticos gostaram da ideia de descobrir novos números primos, e encontraram 135 primos entre 1001 e 2000. Avançando ainda mais, encontraram 106 primos entre 10001 e 11000. E mais ainda: 81 primos entre 100001 e 101000. Assim, na medida em que avançamos ao longo dos inteiros, a quantidade de primos num intervalo de mesmo tamanho (no caso, de 1000 números) vai se tornando cada vez menor.

Se avançarmos muito (mas muito mesmo...), em algum momento vamos nos deparar com um intervalo de 1000 números que não contém nenhum primo [1], mas o fato é que eles *nunca* cessarão de apare-

[1] Existe uma prova matemática para isso, a qual infelizmente não teremos espaço para apresentar aqui.

cer, pois *existem infinitos números primos*. Mas como podemos ter certeza disso? Contando todos os primos existentes? Certamente não, pois se são infinitos nem sequer podem ser contados! Ao invés disso, devemos procurar por uma *demonstração*, que é o artifício matemático para tornar possível a verificação sobre fatos do infinito.

Para isso, adotemos a seguinte estratégia. Vamos imaginar que só há uma quantidade *finita* de primos: se, com base nisso, chegarmos a alguma afirmação absurda ou contraditória, então saberemos que esse nosso ponto de partida imaginado está errado, ou seja, que não pode haver uma quantidade apenas finita de primos - logo, eles são infinitos.

Vamos imaginar então que exista uma quantidade finita n de primos [2]. Vamos chamar de p_1 o primeiro primo (ou seja, $p_1 = 2$), de p_2 o segundo primo ($p_2 = 3$), e assim por diante, até chegar ao n-ésimo primo p_n (que seria o último número primo). Tomando o produto de todos esses n números primos, a que chamaremos de P, temos que $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$.

Por outro lado, consideremos o número $Q = P + 1$. Logo, $1 = Q - P$. Fazendo a fatoração em primos de Q, encontraremos algum fator p. Veja que $p \mid Q$. Por outro lado, como p é um primo e P é o produto de todos os primos existentes, então p estará em algum lugar no meio de $P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$: portanto, $p \mid P$. Então, $p \mid Q$ e $p \mid P$. Assim, conforme pripriedade de divisibilidade vista na Aula 3, podemos concluir que $p \mid Q - P$. Mas $Q - P = 1$: então $p \mid 1$. Como o único divisor positivo do 1 é o próprio 1, então $p = 1$. Mas isso contradiz o fato de que p é um número primo!

Portanto, aquilo que imaginamos no início - que existe uma quantidade apenas finita de primos - tem de estar errado! Logo, existem na verdade infinitos números primos.

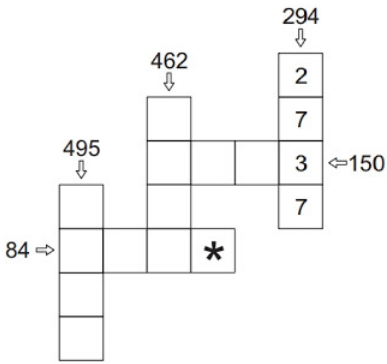
[2] n poderia ser um número muito grande, mas o que importa aqui é o fato de que a contagem de primos teria fim - ainda que levasse muito tempo ...

Problemas Propostos

1. ● Qual é o *menor* natural divisível por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10?

2. ● Se a e b são números naturais tais que $a^2 - b^2 = 2019$, quais são os possíveis valores para a e b?

3. ● (OBMEP 2019) As casas abaixo devem ser preenchidas com números primos. Em cada linha ou coluna, o produto dos números deve ser igual ao número indicado pela seta. A coluna indicada pelo 294 já está preenchida. Qual é o número que deve ser escrito na casa indicada pela estrelinha (★)?



4. ● (OBM 2006) Sejam a, b e c inteiros e positivos. Entre as opções abaixo, a expressão que não pode representar o número 24 é:

   (a) $a \cdot b^3$
   (b) $a^2 \cdot b^3$
   (c) $ac \cdot bc$
   (d) $a \cdot b^2 \cdot c^3$
   (e) $ab \cdot bc \cdot ca$.

5. ● (OBMEP 2014) Ana Maria apertou as teclas

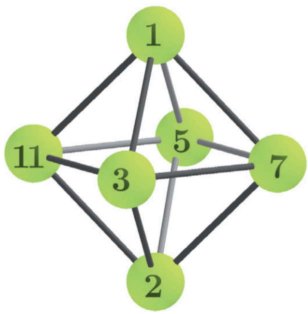
1	9	×	1	0	6	=

de sua calculadora e o resultado 2014 apareceu em seu visor. Em seguida, ela limpou o visor e fez aparecer novamente 2014 com uma multiplicação de dois números naturais, mas, desta vez, apertando seis teclas em vez de sete. Qual foi esta segunda multiplicação?

6. ● (OBM 1997) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. Qual é o algarismo das centenas de N?

7. ● A soma de quatro inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? E a soma de três inteiros positivos consecutivos? Justifique sua resposta.

8. ● (OBMEP 2017) Um objeto foi constuído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura:



Uma formiguinha caminha pelas varetas, caminhando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio

$$3 \to 1 \to 3 \to 2 \to 3 \to 11 \to 1$$

ela obtém $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 11 \times 1 = 594$.

a) Descreva um passeio no qual a formiguinha obtenha, ao final, o número 45.

b) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.

c) Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.

d) Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter, ao final, o número 30?

9. ● (OBM 2000) Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?

10. ● (OBM 2000) Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

11. ● Dizemos que dois números naturais formam um par perfeito quando a soma e o produto desses dois números são quadrados perfeitos. Por exemplo, 5 e 20 formam um par perfeito, pois $5 + 20 = 25 = 5^2$ e $5 \times 20 = 100 = 10^2$. Será que 122 forma um par perfeito com algum outro número natural?

12. ● (OBM 2008) Cinco inteiros positivos a, b, c, d e e maiores que 1 satisfazem as seguintes condições:

    - $a(b + c + d + e) = 128$
    - $b(a + c + d + e) = 155$
    - $c(a + b + d + e) = 203$
    - $d(a + b + c + e) = 243$
    - $e(a + b + c + d) = 275$

    Quanto vale a soma $a + b + c + d + e$?

13. ● Suponha que desejamos encontrar todos os inteiros não negativos x e y que satisfazem a equação $7x + 11y = 154$. Se usarmos apenas que $7x \leq 154$ implica $x \leq 22$ e testarmos as possibilidades, faremos 23 testes de casos! Por outro lado, podemos reescrever a equação como $11y = 154 - 7x = 7(22 - x)$. Veja que 11 divide $7(22-x)$, mas não possui fatores em comum com o 7. Consequentemente 11 é um divisor de $22 - x$. Como $22 - x \leq 22$, basta testar $x = 0$, $x = 11$ ou $x = 22$ para encontrarmos as três soluções $(x, y) = (0, 14), (11, 7)$ ou $(22, 0)$ com apenas três testes de casos. Encontre todos os pares (m,n) de inteiros não negativos que satisfazem a equação

$$5m + 8n = 120.$$

14. ● Responda:

    a) Mostre que não é possível separar os números do conjunto A = 1, 2, 3,..., 10 em dois conjuntos em que o produto dos números em cada um deles é o mesmo.

    b) Qual o menor número de elementos que precisamos retirar do conjunto A de modo que os elementos restantes possam ser divididos em dois conjuntos cujo produto de seus elementos sejam iguais? Mostre que números devem ser retirados e como separar os dois conjuntos.

15. ● (OBM 2002) O produto de um milhão de números naturais é igual a um milhão. Qual é o maior valor possível para a soma desses números?

16. ● Responda.

    a) De quantas formas é possível escrever o número 105 como diferença de dois quadrados perfeitos?

    b) Mostre que não é possível escrever o número 106 como diferença de dois quadrados perfeitos.

17. ● Se o produto de dois números inteiros for igual a $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$, então sobre a soma desses dois números podemos afirmar que:

    (a) pode ser divisível por 3
    (b) pode ser divisível por 5
    (c) pode ser divisível por 8
    (d) pode ser divisível por 49
    (e) não pode ser divisível por nenhum dos números 3, 5, 8 e 49.

18. ● Determine se o número $\underbrace{11\cdots1}_{2016 \text{ vezes}}2\underbrace{11\cdots1}_{2016 \text{ vezes}}$ é um número primo ou um número composto.

19. ● José arrancou algumas folhas consecutivas de um livro com páginas numeradas com inteiros consecutivos e escritos em ambos os lados de cada folha. A soma dos números das páginas arrancadas é 344.

    a) Determine a fatoração em números primos do número 344.
    b) Encontre a soma do primeiro e do último número dentre os que foram escritos nas páginas arrancadas.
    c) Qual a quantidade de páginas arrancadas?

20. ● (OBM 2015) Existem quantos números inteiros positivos tais que ao dividir 2032 por n temos resto 17?

21. ● Há muitos anos, um professor que não queria dar aula, ordenou que seus alunos calculassem a soma dos números de 1 até 100. Um aluno muito esperto, chamado Gauss, descobriu um jeito muito simples de realizar a tarefa descobrindo a fórmula: $1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Como esta história já tem muito tempo, hoje os desafios dados aos alunos pedem tarefas mais elaboradas.

a) Verifique que todo número primo maior que 3 deixa resto 1 ou 5 na divisão por 6

b) Verifique que a soma dos números primos que são maiores que 1 e menores que 1000 é menor que 166338.

22. ● Encontre todos os pares de inteiros positivos (x, y) tais que $x < y$, x e y são primos entre si e $2000(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})$ seja um número inteiro ímpar.

23. ● Determine quantos conjuntos de números inteiros consecutivos existem, com pelo menos 2 elementos, em que a soma de todos os seus elementos é igual a 100.

24. ● (OBM 2003) Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é poderoso se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

Aula 6

Números Primos e Divisibilidade

Na Aula 2, dissemos que Teoria de Números é basicamente um curso sobre a operação da divisão. Nesse sentido, o que aprendemos na aula passada sobre a fatoração em primos servirá justamente para o aprofundamento em questões de divisibilidade.

Mas, para isso, devemos a partir de agora focar na estrutura atômica dos números, ou seja, na sua composição em primos: olhemos para os números em sua forma fatorada. Assim, quando se deparar com o 120 você deve enxegar o $2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ou quando topar com o 1617 deve ter em vista o $3 \cdot 7^2 \cdot 11$.

Nós estamos no ano de $2^2 \cdot 5 \cdot 101$ (ou quem sabe quando você estará lendo este texto: Em $43 \cdot 47$? Ou talvez em $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$?), estudando uma bela disciplina, com mais de $2^3 \cdot 5^2 \cdot 19$ anos de história!

6.1 Quantidade de Divisores

Uma primeira consequência da fatoração em primos é que todas as combinações de potências dos fatores de um número (desde que não excedam a do respectivo fator) são divisores dele. Por exemplo, como $550 = 2 \cdot 5^2 \cdot 11$, então são divisores do 550 todas as seguintes combinações entre potências dos fatores 2, 5 e 11:

- $2^0 \cdot 5^0 \cdot 11^0 = 1$
- $2^1 \cdot 5^0 \cdot 11^0 = 2$
- $2^0 \cdot 5^1 \cdot 11^0 = 5$
- $2^1 \cdot 5^1 \cdot 11^0 = 10$
- $2^0 \cdot 5^0 \cdot 11^1 = 11$
- $2^1 \cdot 5^0 \cdot 11^1 = 22$
- $2^0 \cdot 5^2 \cdot 11^0 = 25$
- $2^1 \cdot 5^2 \cdot 11^0 = 50$
- $2^0 \cdot 5^1 \cdot 11^1 = 55$
- $2^1 \cdot 5^1 \cdot 11^1 = 110$
- $2^0 \cdot 5^2 \cdot 11^1 = 275$
- $2^1 \cdot 5^2 \cdot 11^1 = 550.$

Mas veja que, p.ex., $2^2 \cdot 5^0 \cdot 11^0 = 4$ não é divisor do 550, pois a potência do fator 2 excede a que aparece na fatoração do 550. A mesma coisa acontece para $2^0 \cdot 5^3 \cdot 11^0 = 125$ em relação ao fator 5.

Perceba como foram construídas as combinações acima para cada fator:

- fator 2: expoente $1 \to 2$ possibilidades: 2^0, 2^1;
- fator 5: expoente $2 \to 3$ possibilidades: 5^0, 5^1; 5^2;
- fator 11: expoente $1 \to 2$ possibilidades: 11^0, 11^1.

Ou seja, temos duas possibilidades para o expoente do 2, três para o do 5 e 2 para o do 11: combinadas, elas dão um total de $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ possibilidades, isto é, 12 divisores positivos do 550. Note que chegamos a esse resultado por simples aplicação do princípio multiplicativo (lembra dele, das aulas de Combinatória?).

Assim, para descobrir a quantidade de divisores de um número basta fazer sua fatoração, e então considerar os expoentes dos fatores: tal quantidade será o produto das possibilidades de expoente para cada fator. Vejamos um outro exemplo. Para $13230 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 \cdot 7^2$, temos:

- fator 2: expoente 1 $\rightarrow$ 2 possibilidades: 2^0, 2^1;
- fator 3: expoente 3 $\rightarrow$ 4 possibilidades: 3^0, 3^1, 3^2, 3^3;
- fator 5: expoente 1 $\rightarrow$ 2 possibilidades: 5^0, 5^1;
- fator 7: expoente 2 $\rightarrow$ 3 possibilidades: 7^0, 7^1, 7^2.

Combinando essas possibilidades pelo princípio multiplicativo, no total temos $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ possíveis divisores do 13230.

Repare também que as possibilidades para cada fator são o número que aparece no expoente da fatoração mais 1: no exemplo acima, o fator 2 está elevado a 1, então há $= 1 + 1 = 2$ possibilidades; o 3 está elevado a 3, então há $3 + 1 = 4$ possibilidades. Desse modo, uma vez fatorado o número, fica bastante simples descobrir quantos divisores ele tem. Por exemplo, como $67760 = 2^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1 \cdot 11^2$, então ele possui $(4 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 60$ divisores.

Agora vamos generalizar esse raciocícinio:

Seja a um inteiro e $a = \pm p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$ a sua fatoração em primos. Então a quantidade de divisores positivos de a é

$$(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdots (n_t + 1).$$

Exercício Resolvido 6.1. (OBM 2008) Quantos números inteiros positivos menores que 500 têm exatamente 15 divisores inteiros positivos?

Resolução: *Dado um inteiro*, vimos como é simples encontrar a quantidade de divisores que ele possui: basta aplicar a fórmula acima. Mas também podemos usar a fórmula para raciocinar do modo inverso: *dada uma quantidade de divisores*, podemos analisar quais números a possuem. Para isso vamos escrever o 15 no mesmo formato da fórmula acima. Existem duas possibilidades para o inteiro a, a depender dos possíveis modos de escrever o 15:

(i) $15 = (14+1) \Rightarrow n_1 = 14$, e a só possui um único fator primo: neste caso, pela fórmula acima o número a que procuramos é $a = p_1^{n_1} = p_1^{14}$, onde p_1 é um primo;

(ii) $15 = 3 \cdot 5 = (2+1) \cdot (4+1) \Rightarrow n_1 = 2, n_2 = 4$, e a possui dois fatores primos: neste caso, $a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} = p_1^2 \cdot p_2^4$, onde p_1 e p_2 são primos.

Existem infinitos números primos que poderiam ser colocados no lugar de p_1 e p_2 nos itens acima, de modo que existem infinitos inteiros a com exatamente 15 divisores. Mas, conforme o enunciado, realizamos nossa busca apenas entre os inteiros positivos menores que 500. O menor inteiro com o formato de (i) é $a = 2^{14} > 500$, portanto não nos interessa. Com relação ao formato de (ii), podemos obter os seguintes números:

- $a = 3^2 \cdot 2^4 = 144$;
- $a = 2^2 \cdot 3^4 = 324$;
- $a = 5^2 \cdot 2^4 = 400$.

Esses são os menores inteiros positivos com o formato de (ii). O próximo seria $a = 7^2 \cdot 2^4 = 784 > 500$. Logo, os três inteiros listados são os únicos que atendem às condições do enunciado.

Exercícios de fixação

1. Calcule quantos divisores positivos cada um dos números abaixo possui:

   (a) 100:

   (b) 199:

   (c) 2020:

   (d) 7875:

   (e) 304 920:

2. Seja a um inteiro que possui 18 divisores positivos. O que podemos concluir sobre a?

3. Quantos números inteiros positivos menores que 600 têm exatamente 10 divisores positivos?

4. (OBM 2011) Quantos números inteiros positivos menores que 30 têm exatamente quatro divisores positivos?

6.2 Máximo Divisor Comum (mdc)

Nesta aula, vamos abordar ainda dois conceitos muito profícuos em Teoria de Números: mdc (Máximo Divisor Comum) e mmc (Mínimo Múltiplo Comum). Tais conceitos relativamente simples ajudarão a nos apronfundarmos na análise dos números inteiros, na sua estrutura e nas relações que guardam entre si.

Sejam a e b números inteiros não nulos quaisquer. Então o *Máximo Divisor Comum* entre a e b (denotado por $mdc(a, b)$), como o próprio nome diz, indica o maior dos números entre aqueles que dividem tanto a quanto b. Por exemplo, dados os números 30 e 70, vamos calcular o $mdc(30, 70)$. Temos:

- Divisores do 30: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, 3, $\boxed{5}$, 6, $\boxed{10}$, 15, 30; [1]

[1] Na verdade listamos apenas os divisores *positivos* do 30 e do 70. Mas evidentemente nenhum divisor negativo poderá ser o *maior* divisor comum entre dois números. Por conta disso, só consideramos aqui os números positivos.

- Divisores do 70: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{5}$, 7, $\boxed{10}$, 14, 35, 70.

Os divisores comuns entre 30 e 70 são: 1, 2, 5 e 10. O *maior (máximo)* entre eles é o 10. Logo, $mdc(30, 70) = 10$.

Mais um exemplo. Sejam dados os números 6 e 55. Temos:

- Divisores do 6: $\boxed{1}$, 2, 3 e 6;

- Divisores do 55: $\boxed{1}$, 5, 11, 55.

O único divisor comum entre 6 e 55 é o 1, então automaticamente ele também será o maior dos divisores: $mdc(6, 55) = 1$.

E se perguntássemos pelo $mdc(360, 2352)$? Usando o método acima, teríamos de listar todos os divisores desses números, selecionar aqueles que estão em ambas as listas e tomar o maior. Mas, como $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$ e $2352 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 7^2$, teríamos de fazer listas com $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 24$ e $(4+1) \cdot (1+1) \cdot (2+1) = 30$ divisores, respectivamente... Para nossa sorte, não precisamos de todo esse trabalho, existindo um modo bem mais simples de calcular o *mdc*, e que usa justamente a fatoração em primos.

Calculemos então $mdc(360, 2352)$ por esse outro método. O primeiro passo é fatorar 360 e 2352 em primos:

- $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$;

- $2352 = 2^4 \cdot 3^1 \cdot 7^2$.

Agora selecionemos os fatores primos em comum: 2 e 3. Então $mdc(360, 2352) = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2}$. O expoente n_1 deve ser o *menor* dos expoentes do 2 nas fatorações de 360 e 2352, e o n_2, o menor dos expoentes do 3. Como o expoente do 2 na fatoração do 360 é 3 e na do 2352 é 4, então $n_1 = 3$, e como os expoentes do 3 são 2 e 1, então $n_2 = 1$. Logo,

$$mdc(360, 2352) = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} = 2^3 \cdot 3^1 = 24.$$

Generalizando:

Sejam a e b inteiros. Então $mdc(a, b) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$, onde:

- $p_1, p_2, \cdots, p_s$ são os primos que aparecem na fatoração de *ambos* os números (a e b);
- e $n_1, n_2, \cdots, n_s$ são cada um deles o *menor* expoente dos respectivos fatores em a e b.

Vejamos mais um exemplo. Para calcular o $mdc(10\,032\,750, 819\,819)$, o nosso único trabalho é fatorar os números em questão:

- $10\,032\,750 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13$;
- $819\,819 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13^2$.

Agora podemos concluir que $mdc(10\,032\,750, 819\,819) = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 13 = 5733$.

Observação: Podemos falar também no *mdc* de mais de dois números. Por exemplo, vamos calcular o $mdc(24, 160, 240)$:

- $24 = 2^3 \cdot 3$;
- $160 = 2^5 \cdot 5$;
- $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

O único fator que aparece *em todos os três números* é o 2, e o menor expoente entre as três ocorrências é o 3. Logo, $mdc(24, 160, 240) = 2^3 = 8$.

Exercício Resolvido 6.2. Miguel Ângelo é um renomado pintor. Para a sua próxima obra ele fará um fundo quadriculado, com quadrados iguais cujos lados medem um número inteiro (em centímetros). A tela mede 120 cm $\times$ 84 cm. Qual é a menor quantidade possível de quadrados que Miguel Ângelo pode colocar?

Resolução. Os quadrados têm de caber um número inteiro de vezes tanto na altura da tela (que mede 120 cm) quanto na largura (de 84 cm): então, o lado do quadrado deverá ser um divisor comum de

120 e 84. Além disso, como queremos a menor quantidade possível de quadrados, eles deverão ter lado medindo o *maior* valor possível: o lado será o *máximo* divisor comum entre 120 e 84.

Como $mdc(120, 84) = 12$ (confira!), então o quadrado terá lado 12. Assim, a área do quadrado é de 12×12. Como a área da tela é de 120×84, Miguel Ângelo pode colocar na tela um mínimo de $\dfrac{120 \times 84}{12 \times 12} = 70$ quadrados.

Exercícios de Fixação

1. Calcule:

   (a) $mdc(70, 110)$.

   (b) $mdc(819, 275)$.

   (c) $mdc(37, 3330)$.

   (d) $mdc(2020, 2022)$.

   (e) $mdc(167, 887)$.

2. Calcule:

   (a) $mdc(3, 123\,456\,789)$.

   (b) $mdc(348\,473\,341\,981, 3)$.

   (c) $mdc(99, 100)$.

   (d) $mdc(4, 378\,378\,298\,319\,338)$.

   (e) $mdc(330, 289\,150\,281\,309\,319\,740)$.

Exercícios de Reflexão

1. Sejam p e q números primos diferentes. Quais as possibilidades para $mdc(p, q)$?

2. Seja n um inteiro qualquer. Quais as possibilidades para $mdc(n, n + 1)$?

3. Seja p um primo e a um inteiro qualquer. Quais as possibilidades para $mdc(a, p)$?

4. Seja k um inteiro qualquer. Quais as possibilidades para $mdc(2, 2k)$? E para $mdc(2, 2k + 1)$?

Vamos listar agora algumas propriedades que podem nos ajudar muito em problemas de *mdc* e de divisibilidade (e que talvez *lhe* ajudem também na resolução dos problemas propostos ao final da aula...).

A primeira é bastante intuitiva, já as outras duas nem tanto. Todas elas podem ser demonstradas, mas não faremos isso aqui, pois precisariamos de alguns conceitos e ferramentas metemáticas que você ainda não aprendeu.

Proposição 6.1. Sejam a, b e c inteiros quaiquer, não nulos. Então vale:

i) $mdc(a, b) = mdc(a, -b) = mdc(-a, b) = mdc(-a, -b)$;

ii) $mdc(a, b) = mdc(a, a + b)$;

iii) Se $c \mid a \cdot b$ e $mdc(c, a) = 1$, então $c \mid b$.

Exemplo. Sejam $a = 123\,456\,789$ e $b = 123\,452\,829$. Vamos calcular $mdc(a, b)$:

$$\begin{aligned} mdc(a, b) &\underbrace{=}_{\text{por i)}} mdc(a, -b) \\ &\underbrace{=}_{\text{por ii)}} mdc(a, a - b) \\ &= mdc(a, 123\,456\,789 - 123\,452\,829) \\ &= mdc(a, 3960). \end{aligned}$$

Mas $3960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 11$. Agora basta verificar quais desses fatores aparecem em $a = 123\,456\,789$, usando os critérios de divisibilidade.

Como a não termina em número par, então não é divisível por 2, ou seja, não possui nenhum fator 2; como não termina nem em 0 nem em 5, não possui fator 5; como $9-8+7-6+5-4+3-2+1=5$ não é múltiplo de 11, não possui fator 11; e, por fim, como $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ é divisível por 9, então a também é divisível, logo, possui o fator 9. Portanto, $mdc(a,b)=9$.

Exercícios de fixação

1. Calcule $mdc(202\,020\,212\,022, 202\,020\,212\,200)$.

2. Sejam a e b inteiros, com a ímpar. Sabendo que $6 \mid a \cdot b$, usando a propriedade III podemos garantir que $6 \mid b$? E sabendo que $2048 \mid a \cdot b$, podemos garantir que $2048 \mid b$?

6.3 Mínimo Múltiplo Comum (mmc)

Vamos agora a um conceito simétrico ao do máximo divisor comum: o *mínimo múltiplo comum (mmc)*. Sejam a e b inteiros não nulos quaisquer. Então $mmc(a,b)$ indica o menor número positivo múltiplo tanto de a quanto de b.

Por exemplo, dados os números 10 e 12, vamos calcular $mmc(10,12)$. Para isso listemos os múltiplos de cada um dos números:

- Múltiplos de 10: 10, 20, 30, 40, 50, $\boxed{60}$, $\cdots$;
- Múltiplos do 12: 12, 24, 36, 48, $\boxed{60}$, $\cdots$.

Nós paramos de listar quando encontramos o *primeiro* número em comum nas duas listas: 60. Logo, $mmc(10,12)=60$.

Assim como para o mdc, existe uma maneira mais elegante (e menos trabalhosa) de calcular o mmc, e que também usa a fatoração em primos. Vamos ilustrá-la calculando $mmc(7500,126)$. O primeiro passo é fatorar os números em questão:

- $7500 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^4$;

- $126 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^1$.

Agora selecionamos os primos que aparecem na fatoração do 60 *ou* do 126 (não precisa ser em ambos): 2, 3, 5 e 7. Então $mmc(7500, 126) = 2^{n_1} \cdot 3^{n_2} \cdot 5^{n_3} \cdot 7^{n_4}$. O valor dos expoentes n_1, n_2, n_3 e n_4 deve ser o *maior* dentre os que aparecem nos respectivos primos da fatoração de 60 e 126: assim, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$ e $n_4 = 1$. Observe que o 5 só aparece na fatoração do 7500: então o seu expoente no *mmc* é o mesmo dessa fatoração. A mesma coisa vale para o 7 (que só está na fatoração do 126). Portanto, $mmc(7500, 126) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^1 = 157\,500$.

Generalizando:

Sejam a e b inteiros. Então $mmc(a, b) = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_s^{n_s}$, onde:

- $p_1, p_2, \cdots, p_s$ são os primos que aparecem na fatoração de a *ou* de b;
- $n_1, n_2, \cdots, n_s$ são cada um deles o *maior* expoente dos respectivos fatores em a e b.

Vamos a mais um exemplo. Para calcular $mmc(7986, 5929)$, o nosso único trabalho é o da fatoração:

- $7986 = 2 \cdot 3 \cdot 11^3$;
- $5929 = 7^2 \cdot 11^2$.

Agora podemos concluir que $mmc(7986, 5929) = 2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11^3 = 391\,314$.

Observação: Assim como para o *mdc*, também aqui podemos falar no *mmc* de mais de dois números. Por exemplo, para calcular $mmc(6, 10, 28)$, basta estender o método acima:

- $6 = 2 \cdot 3$;
- $10 = 2 \cdot 5$;
- $28 = 2^2 \cdot 7$.

Então concluímos que: $mmc(6, 10, 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$.

Exercício Resolvido 6.3. Três carros andam a velocidades constantes numa pista circular. Eles partem simultaneamente de um mesmo ponto A. O primeiro carro dá uma volta completa na pista a cada 10 minutos, o segundo a cada 15 minutos, e o terceiro a cada 25 minutos. Após 5 horas da partida, quantas vezes eles se reencontram no ponto A?

Resolução. Note que o primeiro carro voltará ao ponto A 10 minutos após o início; e então novamente 20 minutos após o início; e assim por diante: ou seja, voltará ao ponto A em todos os instantes múltiplos de 10. Pelo mesmo raciocínio, o segundo carro voltará ao ponto A em todos os instante múltiplos de 15, e o terceiro, em todos os instantes múltiplos de 25.

Assim, a *primeira* vez em que eles se reencontram todos no ponto A será no primeiro instante que é múltiplo comum de 10, 15 e 25: isto é, em $mmc(10, 15, 25) = 150$ minutos (= 2,5 horas). Depois disso, eles se reencontram mais uma vez 2,5 horas depois, ou seja, $2,5 + 2,5 = 5$ horas após o início. Logo, após 5 horas da partida, eles se reencontram 2 vezes no ponto A.

Exercícios de Fixação

1. Calcule:

   (a) $mmc(28, 42)$.

   (b) $mmc(150, 200)$.

   (c) $mmc(275, 1573)$.

   (d) $mmc(100, 200)$.

   (e) $mmc(114\,444, 250\,263)$.

2. Calcule:

   (a) $mmc(9, 20202021)$.

   (b) $mmc(1234554321, 11)$.

   (c) $mmc(385939201, 2)$.

(d) $mmc(1980, 9\,082\,848\,060)$.

(e) $mmc(727, 863)$.

Exercícios de Reflexão

1. Sejam p e q números primos quaisquer. Então quais são os possíveis valores para $mmc(p, q)$?

2. Sejam a e b inteiros tais que $a \mid b$. Quanto vale $mmc(a, b)$?

3. Seja n um inteiro qualquer. Quanto vale $mmc(n, n + 1)$?

4. Seja p um primo e a um inteiro qualquer. Quais as possibilidades para $mmc(a, p)$?

5. Sejam a e b inteiros tais que $mdc(a, b) = 1$. Quanto vale $mmc(a, b)$?

6. Sejam a e b inteiros tais que $mdc(a, b) = a \cdot b$. Quanto vale $mmc(a, b)$?

Problemas Propostos

1. ● (OPRM 2019) Índio Jones, o maior arqueólogo do mundo, fez uma escavação e descobriu a tumba de um faraó. Mas para destravar a porta da tumba, havia o seguinte problema a ser resolvido:

   - x = maior potência de 2 de 5760 na decomposição em primos;
   - y = soma dos algarismos de $mmc(x, 9)$;
   - $z = mdc(mmc(x, 9), 27)$.

   Jones faltou às aulas de Matemática e não consegue descobrir o código. Qual seria a combinação (x, y, z) certa para que Jones consiga entrar na tumba?

(a) $(2,5,9)$.

(b) $(7,9,9)$.

(c) $(7,5,9)$.

(d) $(7,9,8)$.

(e) $(2,9,9)$.

2. ● (OBM 2016) Dona Maria fez uma grande pizza para seus filhos no Dia das Mães, mas não tinha certeza se a visitariam dois, três ou cinco filhos. Ela quer deixar a pizza dividida em pedaços iguais antes da chegada dos filhos e faz questão de que aqueles que vierem comam a mesma quantidade de pizza. Qual é o menor número de pedaços em que ela deve dividir a pizza?

3. ● (OBM 2014) Qual é o menor inteiro positivo com exatamente 2014 divisores positivos?

4. ● (OBM 2012) Qual é o menor número ímpar que possui exatamente 10 divisores positivos incluindo o 1 e o próprio número?

5. ● Um prédio tem três escadas diferentes, todas começando na base do prédio e terminando no topo. Uma escada tem 104 degraus, outra tem 117 degraus, e a outra tem 156 degraus. Sempre que os degraus das três escadas estão na mesma altura, há um andar. Quantos andares tem o prédio?

6. ● Quais são os seis números positivos de dois algarismos cujo máximo divisor comum é o maior possível?

7. ● (OBM 2007) Determine a quantidade de divisores do número $23^5 - 23$.

8. ● (OBMEP 2006) Para curar uma infecção dentária de Bento, o Dr. Tiradentes prescreveu o tratamento descrito na receita abaixo.

Receita Para o Sr. Bento:

1. Remédio verde: 1 comprimido de 6 em 6 horas, tomar com um copo de água cheio – 5 caixas de 12 comprimidos.

2. Remédio azul: 1 comprimido de 5 em 5 horas, tomar com um copo de água cheio – 5 caixas de 13 comprimidos.

   Atenção: Na coincidência de horários dos dois remédios, tomar os dois comprimidos apenas com um copo de leite cheio. Marcar nova consulta após terminar a medicação.

Dr. Tiradentes, Ouro Preto, 21 de abril de 1785

Bento iniciou o tratamento às 6 horas da manhã do dia 22 de abril de 1785, tomando um comprimido verde e um azul. Quantos copos de água e quantos de leite Bento tomou por causa do tratamento?

9. ● Os 50 primeiros números naturais atravessarão um corredor que contém 50 portas numeradas de 1 a 50, todas elas inicialmente trancadas. O primeiro a atravessar será o número 1, o segundo será o número 2, em seguida o número 3 e assim por diante, até o número 50 que será o último a atravessar. Ao atravessar o corredor, o número n carregará consigo as chaves das portas numeradas com múltiplo de n. Assim, por exemplo, o número 1 carregará as chaves de todas as portas, enquanto que o número 2 carregará somente as chaves das portas com numeração par e o número 25 carregará somente as chaves das portas numeradas com 25 e 50. Durante o seu percurso, cada número usa as chaves que possui para trancar as portas que estiverem abertas e destrancar aquelas que estiverem fechadas.

   a) Quais serão as portas destrancadas pelo número 15?

   b) Mostre que, depois do número 50 ter percorrido o corredor, a porta de número 10 ficará destrancada enquanto que a porta de número 9 ficará trancada.

c) Depois do número 50 ter percorrido o corredor, quais serão as portas destrancadas?

10. ● (OBM 2013) Abel guardou suas economias num cofre. Para não esquecer a senha do cofre, ele resolve guardar as seguintes pistas:

    - É um número maior que 3001;
    - Tem 6 divisores;
    - É múltiplo de 5.

    Abel sabe que sua senha é o menor número que satisfaz todas as pistas. Qual é a senha do cofre de Abel?

11. ● Quando Pedro quebrou seu cofrinho de porco, não tinha mais do que 100 moedas. Ela dividiu as moedas em pilhas com duas moedas cada, mas sobrou uma moeda. Aconteceu a mesma coisa quando Pedro dividiu as moedas em pilhas com 3 moedas, com 4 moedas e com 5 moedas. Sempre sobrava uma moeda. Quantas moedas havia no cofrinho?

12. ● (OBMEP 2015) Uma tabela com linhas e colunas numeradas de 1 a 100 foi preenchida da seguinte forma:

    - na linha 1, todas as casas foram preenchidas com 1;
    - na linha 2, as casas pertencentes a colunas de número par foram preenchidas com 1 e as demais, com 0;
    - na linha 3, as casas pertencentes a colunas múltiplas de três foram preenchidas com 1 e as demais, com 0;
    - continuando, cada uma das demais linhas da tabela foi preenchida com o algarismo 1 nas casas de colunas múltiplas do número correspondente à linha, e com 0 nas demais.

	COLUNAS								
LINHAS	1	2	3	4	5	6	...	99	100
1	1	1	1	1	1	1	...	1	1
2	0	1	0	1	0	1	...	0	1
3	0	0	1	0	0	1	...	1	0
4	0	0	0	1	0	0	...	0	1
5	0	0	0	0	1	0	...	0	1
6	0	0	0	0	0	1	...	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
99	0	0	0	0	0	0	...	1	0
100	0	0	0	0	0	0	...	0	1

a) Qual é o algarismo que foi escrito na linha 7 e coluna 21?

b) Qual é a soma dos algarismos da linha 23?

c) Qual é a soma dos algarismos da coluna 98?

d) Em quais colunas a soma dos algarismos é ímpar? Explique sua resposta.

13. ● (OBM 2010) Para quantos inteiros n o número $\dfrac{n}{100-n}$ é também inteiro?

14. ● (OBM 2007) Qual é o máximo divisor comum entre os números $1221, 2332, 3443, 4554, \cdots, 8998$?

15. ● (OBM 2002) Quantos números inteiros positivos menores que 900 são múltiplos de 7 e terminam em 7?

16. ● (OBM 2013) Determine o maior divisor comum de todos os números de 9 algarismos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

17. ● (OBM 2012) Em 2012 estamos realizando a edição 34 da OBM, e $mdc(2012, 34) = 2$). Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc entre o ano e a edição da OBM realizada no ano em questão?

18. ● Considere o número $n = 2^7 \cdot 3^4$.

    a) Determine o número de divisores positivos de n^2.
    b) Quantos divisores de n^2 são maiores que n?
    c) Quantos divisores de n^2 são maiores que n e não são múltiplos de n?

19. ● (OBM 2010) Quatro números inteiros positivos $a < b < c < d$ são tais que o *mdc* entre quaisquer dois deles é maior do que 1, mas $mdc(a, b, c, d) = 1$. Qual é o menor valor possível para d?

20. ● (OPRM 2018) Quantos divisores pares e quantos divisores ímpares o número $20! - 18!$ possui?[2]

21. ● Os cidadãos de Poliglótia podem conversar em 2000 línguas. Cada língua é falada por mais da metade dos cidadãos. Prove que é possível escolher 10 cidadãos que podem, coletivamente, falar todas as 2000 línguas. Em outras palavras, se cada uma das 10 pessoas escolhidas escrever uma lista das línguas que conhece, essas 10 listas juntas incluirão todas as 2000 línguas.

22. ● (OBM 2001) Qual é o menor quadrado perfeito cujos quatro últimos dígitos são 2001?

23. ● (OBM 2016) Uma lista de números de dois dígitos é *legal* se, a partir de seu segundo termo, a quantidade de divisores positivos de cada um é maior que a do número que o precede na lista e, além disso, pelo menos um de seus dígitos é maior que um dos dígitos do número que o precede. Qual é o tamanho máximo de uma lista legal?

[2]Consulte a Aula 1 para relembrar a definição do simbolo '!'.

Aula 7

Congruência

Em muitos problemas de matemática olímpica, a única coisa que nos interessa é o *resto* da divisão, não o quociente. Por exemplo, você se lembra dos problemas de ciclo da Aula 2? Lá nós dividíamos a quantidade dada pelo tamanho do ciclo para encontrar o resto, e assim descobrir onde a sequência parava. A quantidade de vezes em que o ciclo se repetia, indicada pelo quociente da divisão, geralmente não era uma informação que usávamos na resolução.

Existe em Teoria de Números um modo muito elegante de se ocupar apenas do resto de uma divisão (deixando de lado o quociente): a *congruência*. Diferentemente dos assuntos das aulas anteriores, esse é um tema que você provavelmente nunca viu na escola, então você pode estranhá-lo de início... Todavia, congruência é só um outro modo de olhar para algo que você já sabe: a roupagem é nova, mas o tema é antigo. Ou, dito de outro modo: é uma ferramenta nova para tratar um tema já conhecido. Além do mais, quando se familiarizar com a notação (a coisa que você mais estranhará!) e com as propriedades, verá como congruência facilita, e *muito*, a nossa vida: alguns problemas que pareciam desafiadores ficarão fáceis, até sem graça de tão fáceis ...

7.1 O que é Congruência?

A congruência é um conceito que relaciona dois números que têm algo em comum: *o mesmo resto na divisão por determinado número*. Por exemplo, 7 e 16 deixam resto 1 na divisão por 3: assim, 7 e 16 são "iguais" nesse aspecto, e então dizemos que eles são *congruentes*. Mas não basta dizer simplesmente que "7 e 16 são congruentes": eles não deixam o mesmo resto na divisão por 5, por exemplo. Desse modo, 7 e 16 são congruentes em relação ao 3, mas não ao 5. Para deixar claro que eles deixam o mesmo resto especificamente na divisão por 3 (não por um número qualquer), diremos que *"7 e 16 são congruentes módulo 3"*.

Pela mesma ideia, podemos afirmar que *9 e 14 são congruentes módulo 5*, pois ambos deixam resto 4 na divisão por 5; e também que *7 e 21 são congruentes módulo 7*, pois ambos deixam resto 0 na divisão por 7. Já 12 e 15 não são congruentes módulo 4, pois deixam restos diferentes na divisão por 4. Generalizando:

Definição 7.1. Sejam a e b inteiros quaisquer, e m um inteiro fixo não nulo. Dizemos que *a é congruente a b módulo m* se a e b deixam o mesmo resto na divisão por m. Usaremos a notação $a \equiv b \pmod{m}$ para indicar esse fato.

Quando a e b *não* deixarem o mesmo resto na divisão por m, diremos que eles não são congruentes módulo m, e indicaremos isso por $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Assim, $7 \equiv 16 \pmod{3}$, mas $7 \not\equiv 16 \pmod{5}$. Também: $9 \equiv 14 \pmod{5}$, mas $9 \not\equiv 14 \pmod{3}$.

Note que se segue diretamente da definição que *todo número é congruente ao seu resto* na divisão por determinado número. Por exemplo, como o resto da divisão de 23 por 7 é 2, então $23 \equiv 2 \pmod{7}$.

Para fixar o conceito de congruência e a sua notação, não deixe de fazer o próximo exercício.

Exercícios de Fixação

1. Para cada uma das afirmações abaixo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

   a) ( ) $21 \equiv 35 \pmod 2$.

   b) ( ) $545 \equiv 5 \pmod{12}$.

   c) ( ) $17 \equiv 13 \pmod 4$.

   d) ( ) $3789 \equiv 0 \pmod 9$.

   e) ( ) $353 \equiv 1002 \pmod{11}$.

   f) ( ) 75 é congruente a 285 módulo 6.

   g) ( ) $585 \equiv 1285 \pmod{13}$.

   h) ( ) $5686 \equiv 14020 \pmod{14}$.

   i) ( ) $585 \not\equiv 1285 \pmod{13}$.

2. Para cada uma das afirmações abaixo, assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

   a) ( ) $201\,202\,203\,206 \not\equiv 301\,302\,303\,305 \pmod 2$.

   b) ( ) $192\,283\,364\,291\,111 \equiv 287\,225\,444\,829\,123 \pmod 3$.

   c) ( ) $392\,354\,000\,192\,360 \equiv 889\,332\,100\,121\,816 \pmod 4$.

   d) ( ) $8\,684\,017\,353 \equiv 214\,358\,881 \pmod{11}$.

   e) ( ) $201\,382\,190\,321\,121 \not\equiv 190\,888\,293\,000\,123\,122 \pmod{10}$.

   f) ( ) $202\,382\,888\,219\,329 \equiv 477\,333\,188\,321\,100\,319 \pmod{10}$.

   g) ( ) $100\,323\,122\,149 \equiv 123\,349 \pmod{100}$.

   h) ( ) $291\,333\,900\,323 \equiv 222\,989\,211\,222\,198\,231\,323 \pmod{1000}$.

Exercícios de Reflexão

1. Sejam a e b dois inteiros quaisquer. Então podemos *sempre garantir* que $a \equiv b \pmod 1$?

2. Seja a um inteiro qualquer, e $m \neq 0$ um inteiro fixo. Então podemos *sempre garantir* que $a \equiv a \pmod m$?

3. Sejam a, b inteiros quaisquer, e $m \neq 0$ um inteiro fixo. Se $a \equiv b \pmod{m}$, então necessariamente $b \equiv a \pmod{m}$?

4. Sejam a e b dois inteiros tais que $a \neq b$, e $m \neq 0$ um inteiro fixo. Então podemos afirmar que $a \not\equiv b \pmod{m}$?

7.2 Propriedades e Mais Propriedades...

Os matemáticos têm o extraordinário poder de transformar problemas desafiadores (alguns até impossíveis, aparentemente ...) em outros, equivalentes mas de resolução muito mais simples. A teoria das congruências é uma de suas estratégias. Mas para que você mesmo possa usá-la a seu favor, é preciso primeiramente aprender *como* usá-la, conhecendo suas características, suas propriedades.

Vamos apresentar primeiramente um resultado equivalente à definição de congruência. Ele nos será muito útil para demonstrar propriedades importantes, e que nos ajudarão na resolução de problemas olímpicos. A prova do teorema está no final da aula.

Teorema 7.1. Sejam a, b inteiros quaisquer, e $m \neq 0$ um inteiro fixo. Assim,

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{se e somente se} \quad m \mid (a - b).$$

Partindo desse teorema, podemos demonstrar as seguintes propriedades:

Proposição 7.1. Sejam a, b, c e d inteiros quaisquer, e $m > 0$ um inteiro fixo. Então valem as seguintes propriedades:

(i) $a \equiv a \pmod{m}$.

(ii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$.

(iii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

(iv) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então:

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$, e

- $a - c \equiv\ b - d \pmod{m}$.

(v) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + c \pmod{m}$.

(vi) Se $a + c \equiv b + c \pmod{m}$, então $a \equiv b \pmod{m}$.

(vii) Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.

(viii) Se $a \equiv b \pmod{m}$, então $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, para todo inteiro positivo n.

Demonstração da propriedade (iv). Pelo Teorema 7.1 temos que:

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid a - b.$$

$$c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow m \mid c - d.$$

Agora, como $m \mid a - b$ e $m \mid c - d$, então (por propriedade de divisibilidade vista na aula 3) $m \mid (a-b)+(c-d)$. Mas $(a-b)+(c-d) = (a+c)-(b+d)$: portanto $m \mid (a+c)-(b+d)$. Logo, novamente pelo teorema acima, concluímos que $a + c \equiv b + d \pmod{m}$. $\square$

Tente você mesmo demonstrar a segunda parte da propriedade (iv) e também as demais propriedades, ou ao menos procurar compreender por que elas são verdadeiras. Para isso você precisará basicamente da definição de congruência e do Teorema 7.1. Veja também que você pode usar as propriedades já demonstradas para demonstrar as posteriores: por exemplo, para demonstrar a propriedade (v) você pode usar a (i) e a (iv).

Você notou que todas essas propriedades são as mesmas que já ocorrem para a igualdade (=)? Substitua o sinal de $\equiv$ pelo de $=$ nos itens (i) - (viii) para verificar isso. Por exemplo, também para a igualdade é válida a propriedade (viii): Se $a + c = b + c$, então $a = b$. Assim, a operação de congruência é bastante análoga a da igualdade, e até por conta disso usamos uma notação parecida ($\equiv$) para representá-la.

Atenção! Embora $=$ e $\equiv$ sejam operações análogas, com muitas propriedades em comum, elas não funcionam sempre do mesmo modo. Por exemplo, a partir da igualdade $x \cdot 2 = 5 \cdot 2$, podemos cancelar o 2 de ambos os lados e concluir que $x = 5$. Porém, essa conclusão não é valida numa congruência: sabemos, por exemplo, que $3 \cdot 2 \equiv 6 \cdot 2 \pmod 6$ (pois $3 \cdot 2$ e $6 \cdot 2$ deixam o mesmo resto na divisão por 6: zero), mas $3 \not\equiv 6 \pmod 6$.

Todavia, mesmo nesse caso podemos provar que existe para a congruência uma propriedade mais ou menos análoga ao do cancelamento do produto na igualdade: se m é um inteiro fixo não nulo, e a, b e c são inteiros quaisquer, *tais que* $mdc(c, m) = 1$, então, sim, vale que $ac \equiv bc \pmod m$ implica $a \equiv b \pmod m$[1].

7.3 Agora sim: Transformando o Difícil em Fácil!

Finalmente estamos em condições de usar as congruências para tranformar problemas bastante complicados em outros, bem mais simples!

Por exemplo, se quisermos descobrir qual é o resto da divisão de $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207$ por 6, o que podemos fazer? Talvez o seu primeiro impulso seja o de fazer a conta $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207$, e então dividir o resultado por 6 para obter o resto. Mas essa definitivamente não é a melhor estratégia...

Ao invés disso, você já pode usar o que aprendeu: congruência! Ora, perguntar pelo resto da divisão de $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207$ por 6 é o *mesmo* que perguntar pelo número entre 0 e 5 (pois deve ser o *resto* na divisão por 6) ao qual $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207$ é congruente módulo 6. Em outras palavras: basta encontrar o número r $(0 \leq r \leq 5)$ tal que $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207 \equiv r \pmod 6$.

Veja que, na divisão por 6:

[1] Será que você consegue demonstrar essa afirmação? Pense um pouco, e use propriedades de divisibilidade apresentadas na Aula 6.

$$\begin{aligned}
3025 \text{ deixa resto } 1 \rightarrow \quad 3025 &\equiv 1 \pmod 6\,; \\
46886 \text{ deixa resto } 2 \rightarrow 46886 &\equiv 2 \pmod 6\,; \\
7406 \text{ deixa resto } 2 \rightarrow \quad 7406 &\equiv 2 \pmod 6\,; \\
5071 \text{ deixa resto } 1 \rightarrow \quad 5071 &\equiv 1 \pmod 6\,; \\
1207 \text{ deixa resto } 1 \rightarrow \quad 1207 &\equiv 1 \pmod 6\,.
\end{aligned}$$

Então, usando a propriedade (vii) em $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207$, temos que:

- $3025{\cdot}46886{\cdot}7406 \equiv 1{\cdot}2{\cdot}2 \pmod 6 \Rightarrow 3025{\cdot}46886{\cdot}7406 \equiv 4 \pmod 6$;
- $5071 \cdot 1207 \equiv 1 \cdot 1 \pmod 6 \Rightarrow 5071 \cdot 1207 \equiv 1 \pmod 6$.

Agora, pela propriedade (iv):

$$3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207 \equiv 4 - 1 \pmod 6\,.$$

Portanto, $3025 \cdot 46886 \cdot 7406 - 5071 \cdot 1207 \equiv 3 \pmod 6$. Ou seja, o número em questão deixa resto 3 na divisão por 6.

Perceba como operar com congruências é bastante simples: basta trocar o número dado por um número ao qual ele é congruente.

Vamos a mais alguns exemplos:

Exemplo 7.1. Qual é o resto da divisão de $5^{2020} + 2021 \cdot 2022 \cdot 2023$ por 4?

Resolução. Observe que:

$$\begin{aligned}
5 \equiv 1 \pmod 4 &\xRightarrow[\text{por (viii)}]{} 5^{2020} \equiv 1^{2020} \pmod 4 \\
&\xRightarrow[1^{2020} = 1]{} 5^{2020} \equiv 1 \pmod 4\,,
\end{aligned}$$

e

$$\left.\begin{array}{l} 2021 \equiv 1 \pmod 4 \\ \\ 2022 \equiv 2 \pmod 4 \\ \\ 2021 \equiv 3 \pmod 4 \end{array}\right. \xRightarrow[\text{por (vii)}]{} 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \equiv \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{=6} \pmod 4.$$

Então, pela propriedade (iv):

$$5^{2020} + 2021 \cdot 2022 \cdot 2023 \equiv \underbrace{1+6}_{=7} \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4.$$

Portanto, o resto da divisão de $5^{2020} + 2021 \cdot 2022 \cdot 2023$ por 4 é 3.

$\square$

Exemplo 7.2. Qual é o resto da divisão de 45^{2021} por 23?

Resolução. Devemos encontrar um r $(0 \leq r \leq 22)$ tal que $45^{2021} \equiv r \pmod{23}$.

Nesse caso, substituir 45 pelo seu resto na divisão por 23 não é a melhor estratégia: o resto é 22, e ficaríamos com $45^{2021} \equiv 22^{2021} \pmod{23}$, o que não ajuda muito... Ao invés disso, vamos usar o Teorema 7.1. Temos que:

$$23 \mid \underbrace{45 - (-1)}_{=46} \Rightarrow 45 \equiv -1 \pmod{23}.$$

Agora sim encontramos um número conveniente para substituir o 45. Temos:

$$45^{2021} \equiv \underbrace{(-1)^{2021}}_{=-1} \pmod{23}.$$

Mas $23 \mid -1 - 22$, então $-1 \equiv 22 \pmod{23}$. Logo,

$$45^{2021} \equiv 22 \pmod{23}.$$

Portanto, o resto da divisão de 45^{2021} por 23 é 22.

$\square$

Observação. Perceba que quando um número aparece elevado a uma potência muito alta (como é o caso do 45 no exercício anterior), a primeira saída é verificar se ele é congruente a 1 ou a -1: se for esse o caso, torna-se bastante simples calcular a potência. Mas caso ele não atenda a essa condição, podemos ainda tentar reescrever a potência, de modo a encontrar uma outra base congruente a 1 ou a -1. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 7.3. Qual é o resto da seguinte divisão?

$$(8^{1111} + 50! - 2^{111} \cdot 533\,111\,123\,583\,927\,183\,928) \div 9.$$

Resolução. Temos que:

- $8 \equiv -1 \pmod 9 \Rightarrow 8^{1111} \equiv \underbrace{(-1)^{1111}}_{=-1} \pmod 9$.
- $50! \equiv 0 \pmod 9$ (pois $50!$ contém o fator 9 e, assim, $9 \mid 50!$).
- Como $2^{111} = 2^{3\cdot 37} = (2^3)^{37} = 8^{37}$ e $8 \equiv -1 \pmod 9$, então
$$2^{111} \equiv \underbrace{(-1)^{37}}_{=-1} \pmod 9\,.$$
- Para descobrir o resto da divisão de $533\,111\,123\,583\,927\,183\,928$ por 9, não é necessário efetuar essa divisão. Basta notar que a soma de seus algarismos é $5+3+3+1+1+1+1+2+3+5+8+3+9+2+7+1+8+3+9+2+8 = 82$. Como o antecessor desse número terá o 7 na casa das unidades, a soma dos seus algarismos é 81, ou seja: o antecessor é divisível por 9. Assim, $533\,111\,123\,583\,927\,183\,928$ deve deixar resto 1 na divisão por 9:
$$533\,111\,123\,583\,927\,183\,928 \equiv 1 \pmod 9\,.$$

Então:

$$8^{1111} + 50! - 2^{111} \cdot 533\,111\,123\,583\,927\,183\,928$$
$$\equiv \underbrace{-1 + 0 - (-1)\cdot 1}_{=0} \pmod 9\,.$$

Então o resto da divisão do número em questão por 9 é zero.

$\square$

Vamos agora mudar um pouco a perspectiva dos problemas.

Exemplo 7.4. Qual é o último algarismo do número $9^{4444}+11^{1234}$?

Resolução. Perceba que o último algarismo de um número nada mais é do que o resto da sua divisão por 10. Então, basta encontrar um r $(0 \leq r \leq 9)$ tal que $9^{4444} + 11^{1234} \equiv r \pmod{10}$. Temos que:

- $9 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 9^{4444} \equiv \underbrace{(-1)^{4444}}_{=1} \pmod{10}$;
- $11 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 11^{1234} \equiv \underbrace{1^{1234}}_{=1} \pmod{10}$.

Logo,

$$9^{4444} + 11^{1234} \equiv 1 + 1 \pmod{10} \equiv 2 \pmod{10}.$$

Ou seja, o último algarismo de $9^{4444} + 11^{1234}$ é 2.

$\square$

Observação. Seguindo o raciocínio desse último exemplo, para encontrar os *dois* últimos algarismos de um número, basta descobrir o resto de sua divisão por 100; para encontrar os *três* últimos, procuramos pelo resto de sua divisão por 1000; e assim por diante.

Por fim, vamos a um exemplo de demonstração.

Exemplo 7.5. Seja $n \geq 1$ um inteiro qualquer. Mostre que $7 \mid (2^{3n} - 1)$.

Resolução. Ora, dizer que $7 \mid (2^{3n} - 1)$ é o mesmo que dizer que $2^{3n} - 1$ deixa resto 0 na divisão por 7, ou seja: que $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$. Então é isso que devemos mostrar.

Note que

$$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n \quad \text{e} \quad 8 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Então:

$$2^{3n} - 1 \equiv \underbrace{1^n - 1}_{=0} \pmod{7}.$$

Portanto, $2^{3n} - 1 \equiv 0 \pmod 7$.

$\square$

Exercícios de Fixação

1. Descubra qual é o resto da divisão:

   (a) De 4^{100} por 3.

   (b) De 4^{100} por 5.

   (c) De $1246 \times 3369 \times 6275$ por 8.

   (d) De $2016 \times 2017 \times 2018 \times 2019 \times 2020$ por 13.

   (e) De 2^{50} por 7.

   (f) De $17^{1010} \times 6325$ por 18.

   (g) De 41^{2020} por 7.

   (h) De $50! - 1$ por 4.

   (i) De $2048 \cdot 451$ por 7.

   (j) De $2021 \cdot 2016 + 10032 \cdot 20037 - 100041 \cdot 198043$ por 5.

   (k) De $20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 + 12! - 251$ por 6.

   (l) De $9\,382\,738\,222\,777\,189\,111 \times 2^{555} - 18!$ por 3.

2. Responda:

   (a) (OBM 2003) Qual é o último algarismo de $9862^{10} - 9862^{8}$?

   (b) Quais são os dois últimos algarismos de $352\,901^{999} + 223\,987\,311^{888}$?

   (c) Quais são os três últimos algarismos de $232\,601 \times 456\,777\,020 - 746\,888\,001^{999}$?

3. Seja $n \geq 1$ um inteiro arbitrário. Mostre que:

   (a) $8 \mid (3^{2n} - 1)$.

   (b) $65 \mid (4^{3n} - 1)$.

Para finalizar, vamos demonstrar o Teorema 7.1.

Teorema 7.1. Sejam a, b inteiros quaisquer, e $m \neq 0$ um inteiro fixo. Assim,

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ se e somente se } m \mid (a-b).$$

Demonstração. Trata-se aqui de uma afirmação do tipo “se e somente se”. Conforme já comentamos na Aula 3, para prová-la devemos mostrar que as duas implicações valem:

(i) se $a \equiv b \pmod{m}$, então $m \mid (a-b)$;

(ii) se $m \mid (a-b)$, então $a \equiv b \pmod{m}$.

Prova de (i). A nossa hipótese é que $a \equiv b \pmod{m}$. Pela definição de congruência, isso significa que a e b deixam o mesmo resto na divisão por m. Vamos chamar esse resto de r. Então, podemos escrever:

$$a = m \cdot q_1 + r$$

$$b = m \cdot q_2 + r,$$

onde q_1 e q_2 são os quocientes das divisões de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned} a - b &= (m \cdot q_1 + r) - (m \cdot q_2 + r) \\ &= m \cdot q_1 - m \cdot q_2 \\ &= m(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a - b = m(q_1 - q_2).$$

Portanto, $m \mid (a-b)$.

Prova de (ii). A hipótese agora é que $m \mid (a-b)$. Efetuando as divisões de a e de b por m, obtemos restos a que chamaremos de r_1 e r_2, respectivamente. Assim, podemos escrever:

$$a = m \cdot q_1 + r_1$$

$$b = m \cdot q_2 + r_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a - b &= (m \cdot q_1 + r_1) - (m \cdot q_2 + r_2) \\ &= (m \cdot q_1 - m \cdot q_2) + (r_1 - r_2) \\ &= m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a - b = m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Mas sabemos que $m \mid (a - b)$. Então,

$$m \mid m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Como $m \mid m(q_1 - q_2)$ e $m \mid m(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$, então (conforme propriedade de divisibilidade vista na Aula 3) $m \mid r_1 - r_2$.

Por outro lado, como r_1 e r_2 são os *restos* das divisões por m, então $0 \leq r_1 < m$ e $0 \leq r_2 < m$. Logo, $0 \leq r_1 - r_2 < m$ (caso $r_1 \geq r_2$) ou $-m < r_1 - r_2 \leq 0$ (caso $r_1 \leq r_2$).

Assim:

- $m \mid r_1 - r_2$;
- $0 \leq r_1 - r_2 < m$ ou $-m < r_1 - r_2 \leq 0$.

Como não é possível que m divida um número positivo menor do que ele ou um número negativo maior do que ele, a única possibilidade é que $r_1 - r_2 = 0$. Portanto, $r_1 = r_2$, ou seja, a e b têm o mesmo resto na divisão por m: $a \equiv b \pmod{m}$.

$\square$

Problemas Propostos

1. ● (OPRM 2019) Qual é o resto da divisão $2018^{2019} \div 2017$?

2. ● (OBM 1998) Sabe-se que o número $1234a6$ é divisível por 7. Então quanto vale o algarismo a?

3. ● (OBM 2012) Para homenagear a Copa do Mundo e as Olimpíadas no Brasil, Esmeralda, a prefeita da cidade Gugulândia, decidiu que seria feriado em sua cidade no dia x do mês de número y, onde x é o último algarismo do número 2016^{2014} e y é o resto de 2014^{2016} na divisão por 11. Assim, esse feriado será no dia:

   (a) 8 de março.
   (b) 6 de janeiro.
   (c) 4 de janeiro.
   (d) 6 de abril.
   (e) 6 de março.

4. ● Qual é o último dígito de 777^{777}?

5. ● Determine o resto na divisão:

   a) De $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times 2011 + 21$ por 8.
   b) De $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{19}$ por 4.
   c) De $1^5 + 2^5 + \cdots + 100^5$ por 4
   d) De $1 + 2^{2000} + 3^{2000} + \cdots + 2000^{2000}$ por 7.

6. ● (OPRM 2019) Qual é o último algarismo da soma de 70 números inteiros positivos consecutivos?

7. ● (OBM 2011) Se multiplicarmos todos os inteiros positivos menores que 2011 que não são múltiplos de 5, qual será o algarismo das unidades do número obtido?

8. ● (OBM 2015) Dizemos que dois anos coincidem se têm a mesma quantidade de dias e os dias da semana de todos os seus dias coincidem. O ano de 2015 coincide com 2009; qual é o próximo ano que coincide com 2015?

   Lembre-se de que os anos múltiplos de 4 no século XXI (com exceção de 2100) são bissextos e têm 366 dias; os demais anos têm 365 dias.

9. ● (OPRM 2018) Efetuando a divisão de 2018^{2018} por 6 obtemos como resto:

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 5

10. ● Qual é o resto da divisão de 7848^{7848} por 6?

11. ● Determine quais números naturais n entre 2001 e 2007 tornam o número $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ não divisível por 5.

12. ● Qual é o resto da divisão de 4^{100} por 7?

13. ● Os 2019 armários dos 2019 alunos de uma escola são numerados com os quadrados dos 2019 primeiros naturais positivos, ou seja, o primeiro armário tem o número $1^2 = 1$, o segundo armário tem o número $2^2 = 4$, o terceiro armário tem o número $3^2 = 9$, e assim até o último armário que tem o número $2019^2 = 4\,076\,361$.

    a) Quantos algarismos foram utilizados para pintar os cem primeiros armários?

    b) Somando todos os números dos armários, qual o algarismo das unidades deste resultado?

14. ● (OBM 2012) Qual é a maior potência de 2 que divide $2011^{2012} - 1$?

15. ● Qual é o resto de $36^{36} + 41^{41}$ na divisão por 77?

16. ● (OBM 2012) Fernando escreveu uma sequência de números 123456123456123456... Quantas vezes no mínimo ele deve repetir o 123456 de modo que o número se torne múltiplo de 77?

17. ● (OBM 2006 - modificado) Todos os inteiros de 1 a 2006 são escritos num quadro. Então, cada um destes números é substituído pela soma de seus algarismos. Estas substituições são realizadas repetidas vezes até que tenhamos 2006 números

com 1 algarismo cada. Dos números que restaram no quadro, qual aparece mais vezes: o 1 ou o 2? Justifique.

Dica: note que um número e a soma de seus algarismos têm o mesmo resto na divisão por 9.

18. ● Joãozinho escreveu os números de 1 até 100000 no quadro, depois foi trocando cada número pela soma de seus algarismos e repetiu este processo até obter uma lista de 100000 números de um algarismo. Por exemplo, começando pelo número 7234 obtemos $7 + 2 + 3 + 4 = 16$ e $1 + 6 = 7$.

    a) Que número ficou no lugar do número 98765?

    b) Quantas vezes aparece o número 8 na lista final?

    c) Qual é o número que mais vezes se repete?

19. ● (OBM 2009) Sejam m e n dois inteiros positivos primos entre si. O Teorema Chinês dos Restos afirma que, dados inteiros i e j com $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$, existe exatamente um inteiro a, com $0 \leq a < m \cdot n$, tal que o resto da divisão de a por m é igual a i e o resto da divisão de a por n é igual a j. Por exemplo, para $m = 3$ e $n = 7$, temos que 19 é o único número que deixa restos 1 e 5 quando dividido por 3 e 7, respectivamente.

    Assim, na tabela a seguir, cada número de 0 a 20 aparecerá exatamente uma vez.

Restos por 7 / **Restos por 3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0							
1						19	
2							

Qual a soma dos números das casas destacadas em cinza?

20. ● Determine o número de inteiros positivos n menores que 100 de modo que a fração $\dfrac{8n+5}{5n+8}$ não seja irredutível.

    Observação: Uma fração é chamada de irredutível quando o máximo divisor comum (MDC) entre o seu numerador e o seu denominador é igual a 1.

Aula 8

Bases Numéricas

E nossa última aula será sobre um dos mais básicos temas da matemática: o nosso modo de representar os números. Talvez você nunca tenha parado para pensar nesse assunto. Talvez ele lhe pareça óbivo demais, a você que está tão acostumado a usar símbolos numéricos e a fazer contas com eles - seja na aula de matemática, seja no seu dia a dia.

Mas o fato é que "0", "1", "2", ..., "9" são apenas símbolos, e o significado que atribuímos a eles quando combinados (em "11" ou em "987", por exemplo) é apenas uma convenção, algo que poderia ser diferente. Poderíamos usar outro símbolo para representar aquela quantidade que chamamos de "2". Ou combinar os símbolos de outro modo, de acordo com uma outra regra, pela qual "11" não indica o que habitualmente reconhecemos por "11".

Ficou confuso? É o que acontece quando nos metemos a questinar sobre os temas aparentemente mais simples: então o que é fácil fica difícil...

O nosso modo de representar os números é apenas um entre outros, e a confusão surge quando adentramos nesses outros modos (onde "11" não é 11!). Na última seção da aula, brincaremos de nos confundir. Mas por ora, vamos esclarecer o que é a nossa habitual maneira de pensar os números, o nosso *sistema numérico*.

8.1 “11” vale 11!

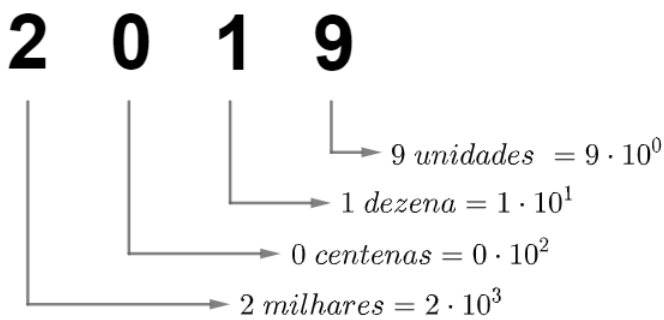
A primeira observação a ser feita sobre nosso sistema numérico é a sua genial flexibilidade e concisão: com apenas 10 símbolos (“0”, “1”, “2”, ..., “9”) podemos representar *qualquer* quantidade, por maior que seja. Isto é, com uma quantidade *finita* (e bem pequena) de símbolos conseguimos representar *infinitas* quantidades.

Esses símbolos são justapostos de acordo com determinadas regras. Em primeiro lugar, a *posição* de cada símbolo é determinante para o seu significado. Por exemplo, os símbolos “1” e “9” em “19” têm significados diferentes daqueles em “91”. Em “19”, “1” significa *uma dezena* e “9” significa *nove unidades*; enquanto que em “91”, “1” significa *uma unidade*, e “9” *nove dezenas.* Tal característica faz do nosso sistema numérico um sistema *posicional.*

Em segundo lugar, essas posições nada mais são do que *potências de dez* que progridem ordenadamente:

- a posição mais à esquerda é a da potência zero (10^0);
- uma casa à direita, vêm em ordem a da potência 1 (10^1);
- em seguida, a da potência do 2 (10^2);

e assim por diante. Então, em “2019”, por exemplo, temos:



Logo,

$$2019 = 9 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3.$$

Ou, em ordem decrescente das potências:

$$2019 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0.$$

Dessa forma, *todo* número natural é uma soma de múltiplos de potências de 10. Os números que multiplicam as potências são justamente aquilo que chamamos de "dígitos" ou "algarismos" $(0, 1, 2, \cdots 9)$. Vamos expressar essa conclusão de maneira matemática, abstrata:

Definição 8.1. (Expansão Decimal.) Seja $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ um número natural qualquer, onde $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ são os seus dígitos. Então temos que

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Por exemplo,

- $11 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$;
- $382\,920 = 3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$.

Chamamos tal representação do número de sua *expansão decimal*. Como todo número é assim representado a partir de potências de *10*, então 10 é a *base* do nosso sistema numérico, ou seja, esse sistema tem uma *base decimal*.

Vejamos como a expansão decimal pode nos ajudar na resolução de problemas.

Exercício Resolvido 8.1. Determine todos os números de três algarismos iguais a 20 vezes a soma de seus algarismos.

Resolução. Vamos chamar de abc o número a ser determinado, onde a, b e c são os seus dígitos. Pela expansão decimal, temos que:

$$abc = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0 = 100a + 10b + c.$$

Por outro lado, conforme o enunciado,

$$abc = 20(a + b + c) = 20a + 20b + 20c.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c &= 20a + 20b + 20c \\ \Longrightarrow 80a - 10b &= 19c \\ \Longrightarrow 10(8a - b) &= 19c. \end{aligned}$$

Para que $19c$ seja múltiplo de 10, c deve ser múltiplo de 10; mas, por outro lado, $c < 10$, pois c é um algarismo. Portanto, devemos ter que $c = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 10(8a - b) &= 19 \cdot 0 = 0 \\ \Longrightarrow 8a - b &= 0 \\ \Longrightarrow b &= 8a. \end{aligned}$$

Se $a = 1$, então $b = 8$. Se $a > 1$, $b > 10$, o que não vem ao caso, já que b é um dígito. Além disso, $a \neq 0$, pois caso contrário o número abc teria menos de três dígitos. Logo, a única possibilidade é: $a = 1$, $b = 8$ e $c = 0$. Ou seja, o único número que atende às condições do enunciado é o 180.

$\square$

Exercícios de Fixação

1. Faça a expansão decimal dos seguintes números:

   (a) 2021.

   (b) 987 654 321.

2. Qual é a potência de 10 que multiplica o algarismo 9 na expansão decimal do número $911\ldots11$ (o algarismo 1 aparece 1111 vezes)?
3. Determine todos os números de dois algarismos iguais ao quíntuplo da soma dos seus algarismos.
4. Determine todos os números de três algarismos iguais a 16 vezes a soma dos seus algarismos.

8.2 Magia Matemática

Agora uma pausa para um show de ilusionismo! Os professores do POTI receberam um poder especial, e agora podem advinhar a sua idade e o número do seu endereço! Para a mágica acontecer, siga as intruções (mas escondido, para que não vejamos!):

- Escreva o número de seu endereço.
- Multiplique-o por 2.
- Some 42.
- Multiplique o resultado por 50.
- Subtraia o ano do seu nascimento.
- Subtraia 50.
- Some o número de aniversários que você já fez este ano, isto é, 0 ou 1.
- Subtraia 30.

Então nós prevemos que os dois últimos algarismos do resultado são a sua idade e o restante é o número do seu endereço. Acertamos?? Como será que fizemos isso?

Reuna-se agora com os seus colegas, e confira se a advinhação funciona mesmo. A maioria de vocês deve ter 13 ou 14 anos (de modo que fica sem graça advinhar a idade), então, para ficar mais interessante, substitua a sua idade pela idade da pessoa de quem você mais gosta.[1]

Em seguida:

1. Desvende o truque de advinhação.

2. Explique por que ele só funciona se estivermos no ano de 2021.

3. Que adaptações poderíamos fazer para que o truque funcione em 2030?

4. Como poderíamos generalizar o truque, para ele funcionar *em qualquer ano*?

8.3 Afinal, quanto vale 11??

Chegou a hora de bagunçar a sua cabeça! Sabia que 1010 vale 10, que $110+10 = 8$, e que $11 \cdot 11 = 1001$?! Será que nós enlouquecemos, ou essas afirmações podem ser *de certo modo* verdadeiras?

A escolha que fazemos em representar as quantidades através de potências de 10 é inteiramente arbitrária do ponto de vista matemático. Por que, então, não escolhemos outras potências, por exemplo, o 2? O que foi dito na Definição 8.1 funciona igualmente bem para potências de 2: poderíamos representar qualquer número como uma soma de potências de 2.

Teríamos assim um outro sistema numérico, de base 2 (e não 10): o famoso *sistema binário*, usado sobretudo na computação. Para a base 10, eram necessários dez símbolos, porque a partir do 10 todos os números são combinações dos números anteriores. Analogamente, para a base binária só precisaremos de dois símbolos: 0 e 1. Qual então a quantidade representada por "1010" nessa base? Ora, podemos fazer a expansão desse número de modo inteiramente

[1] Nós adaptamos esse truque do livro *Incríveis Passatempos Matemáticos*, de Ian Stewart.

análogo ao da expansão decimal, apenas trocando as potências de 10 por potências de 2:

$$1010 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 0 + 2 + 0 = 10.$$

Portanto, aquela quatidade que, na base decimal, é expressada por "10", na base binária é indicada por "1010". Mais um exemplo. Vamos converter o número 11100101 da base 2 para a base 10:

$$\begin{aligned} 11100101 &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 128 + 64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 \\ &= 229. \end{aligned}$$

Mas e se quiséssemos ir pelo caminho *inverso*: converter um número na base decimal para a binária? Para isso existe um método [2]. Vamos exemplificá-lo com o 45. Para tranformá-lo para a base 2, o primeiro passo é fazer a divisão de 45 por 2; depois pegamos o quociente e dividimos ele próprio por 2; a seguir dividimos o quociente dessa segunda divisão por 2; e assim, por diante, *até que apareça o quociente zero*. Veja como fica:

$$\begin{array}{cccccccc}
45 & \underline{\lfloor 2} & & & & & & \\
\mathbf{1} & 22 & \underline{\lfloor 2} & & & & & \\
 & \mathbf{0} & 11 & \underline{\lfloor 2} & & & & \\
 & & \mathbf{1} & 5 & \underline{\lfloor 2} & & & \\
 & & & \mathbf{1} & 2 & \underline{\lfloor 2} & & \\
 & & & & \mathbf{0} & 1 & \underline{\lfloor 2} & \\
 & & & & & \mathbf{1} & 0 &
\end{array}$$

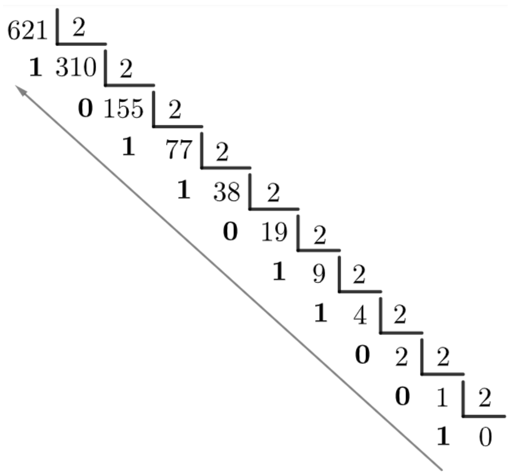
O 45 na base 2 é formado pelos restos das divisões, começando pelo último e indo até o primeiro: 101101.

[2] A justificativa para ele é um pouco complicada, e por isso não a apresentaremos aqui.

Vamos tirar a prova real, fazendo a expansão binária:

$$\begin{aligned} 101101 &= 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 \\ &= 32 + 0 + 8 + 4 + 0 + 1 \\ &= 45. \end{aligned}$$

Vejamos como fica o 621 na base 2. Pelo método, temos:



Logo, o 621 na base 2 é: 1001101101.

Ora, se falamos na base 2, podemos falar ainda em muitas outras bases: base 5, base 8, base 12, base 20 e, se alguém quiser se aventurar, até base 2021! Então o raciocínio para converter os números dessa outra base para a 10, ou vice-versa, é o mesmo do exposto acima para a base 2. O único porém é que para bases maiores que 10 será necessário inventar outros símbolos, além dos 10 algarismos usuais (e aquele excêntrico que insiste em usar a base 2021 terá de inventar 2011 símbolos novos...). Por exemplo, na base 11 poderíamos usar o símbolo extra \$ para representar a quantidade 10, de modo que os algarismos nessa base seriam: 0, 1, 2, ..., 9, \$.

E afinal de contas, quanto vale 11?

Exercícios de Reflexão

1. Seria possível uma base 1? Explique.
2. Converta para a base decimal os seguintes números:
   (a) 10110110011 expresso na base 2.
   (b) 222001102 expresso na base 3.
   (c) 1623655 expresso na base 7.
   (d) 9783\$2% expresso na base 12, onde \$ = 10 e % = 11.
3. Quanto vale 11 nas seguintes bases?
   (a) Base 2.
   (b) Base 5.
   (c) Base 8.
   (d) Base 11.
   (e) Base 2021.
4. Como se representa o valor 11 da base decimal nas seguintes bases?
   (a) Base 2.
   (b) Base 5.
   (c) Base 8.
   (d) Base 11.
   (e) Base 2021.
5. Diga em que ano você nasceu nas bases do exercício anterior.
6. Responda, na base binária:
   (a) Quantos gols fez Paulinho, do Atlético Acreano, pelo Campeonato Acrano de 1991? (Dica: ele foi artilheiro do campeonato!)

(b) Qual é o recorde mundial de encantamento de minhocas no World Worm Charming Championship?

(c) Qual é a altura do Pikachu, em centímetros?

(d) Quantas visualizações tem o vídeo mais famoso da Galinha Pintadinha no seu canal oficial do YouTube?

7. O número 10011011111011000011010011000010001, expresso na base binária, é par ou ímpar? Enuncie um critério de divisibilidade por 2 na base binária.

8. Efetue as contas nas bases indicadas (tente fazer *direto*, sem converter os números para a base decimal).

   (a) $11011 + 1001$, base 2.

   (b) $243 + 1102$, na base 5.

   (c) $10001 \cdot 11$, na base 2.

   (d) $27843 \cdot 388$, na base 9.

Problemas Propostos

1. ● (OBMEP 2017) Vânia preencheu os quadradinhos da conta abaixo com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Ela usou todos os algarismos e obteve o maior resultado possível. Qual foi esse resultado?

$$\square\square\square + \square\square - \square\square\square$$

2. ● Digamos que o peso de um número seja a soma de seus algarismos. Qual é o menor número que pesa 2000?

3. ● (OBM 2004) Qual é o maior valor da soma dos algarismos da soma dos algarismos de um número de três algarismos?

4. ● (OBM 2006) Se um número de dois dígitos é 5 vezes a soma de seus dígitos, então o número formado pela troca dos dígitos é a soma dos dígitos multiplicada por qual número?

5. ● Quantos são os números de três algarismos iguais a 10 vezes a soma de seus algarismo?

6. ● Um professor do POTI descobriu um novo número de mágica! Luanna se voluntariou para o grande truque. Ela jogou três dados, sem que eles pudessem ser vistos. O professor então disse: "Multiplique o número da face de cima do primeiro dado por 2 e adicione 5. Depois multiplique o resultado por 5 e some o número do segundo dado. Finalmente, multiplique o resultado por 10 e some o número do terceiro dado". Ana informou o resultado: "Setecentos e sessenta e três". O professor logo disse, empolgado: "Então as faces de cima dos dados são...". Quais são esses números? Desvende o truque.

7. ● (OBM 1998) Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

8. ● Márcia está numa loja comprando um gravador que ela queria há muito tempo. Quando o caixa registra o preço ela exclama: "Não é possível, você deve ter registrado o número ao contrário e trocou a ordem de dois algarismos, pois lembro que, na semana passada, custava menos do que 50 reais!". Responde o caixa: "Sinto muito, mas ontem todos os nossos artigos foram aumentados em 20%". Qual é o novo preço desse gravador?

9. ● (OBM 2014) O número de 5 dígitos $xy26z$, em que cada uma das letras representa um dígito, é divisível por 8, 9 e 11. Qual o valor de x?

10. ● (OBMEP 2013) Um número de três algarismos tem as seguintes propriedades:

- quando trocamos o algarismo das unidades com o das dezenas, ele aumenta em 18 unidades;
- quando trocamos o algarismo das dezenas com o das centenas, ele aumenta em 180 unidades.

Quantas unidades aumentará esse número se trocarmos o algarismo das unidades com o das centenas?

11. ● Dado um número com seis algarismos $abcdef$ tal que $abc - def$ é divisível por 7, prove que o número propriamente dito também é divisível por 7.

12. ● Pense em dois números com 2 algarismos; multiplique seu primeiro número por 4; some 7 ao produto; multiplique o resultado por 25; some seu segundo número e, finalmente, some 125. Diga ao professor o seu resultado e ele lhe dirá seus dois números originais. Como ele sabe?

13. ● Um número inteiro positivo esconde outro número quando, apagando alguns de seus algarismos, aparece o outro. Por exemplo, o número 123 esconde os números 1, 2, 3, 12, 13 e 23, mas não esconde 32, 123 e 213.

    (a) Qual é o maior número de três algarismos escondido por 47239?
    (b) Qual é o menor número que esconde simultaneamente 2009 e 9002?
    (c) Ache um múltiplo de 2009 que esconde 2009 e cujo algarismo das unidades é 3.

14. ● Vladimir escolheu três algarismos a, b e c tais que $a > b > c > 0$ e com eles formou os números abc, cba e cab. Note que abc não é o produto de a, b e c, mas sim o número de algarismos a, b e c. Por exemplo, se $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, abc será o número 123. Depois de escolher estes três algarimos a, b e c, Vladimir percebeu que um dos números formados era igual à soma dos outros dois. Encontre os números formados por Vladimir.

15. ● Se $A = \underbrace{111...111}_{\text{2m vezes}}$ e $B = \underbrace{444...444}_{\text{2m vezes}}$, verifique que a soma $A+B+1$ é um quadrado perfeito para qualquer inteiro positivo m.

16. ● Podemos determinar a quantidade de algarismos da representação decimal de um número inteiro positivo determinando a maior potência de 10 que não é maior que ele. Mais precisamente, um número inteiro N possui k algarismos em sua representação decimal quando $10^{k-1} \leq N < 10^k$. Por exemplo, 2016 possui 4 algarismos, pois $10^3 \leq 2016 < 10^4$. Em alguns problemas, é importante achar a quantidade de algarismos envolvidos no resultado de operações aritméticas.

    (a) Determine a quantidade de algarismos do produto $111111 \cdot 1111111111$, em que o primeiro fator possui 6 algarismos e o segundo possui 10 algarismos.

    (b) Os números 2^{2016} e 5^{2016} são escritos um ao lado do outro para formar um único número N que possui uma quantidade de algarismos que é a soma das quantidades de algarismos dos dois números. Por exemplo, se fizéssemos isso com 2^3 e 5^3 iríamos obter o número 8125, que possui 4 algarismos. Determine a quantidade de algarismos de N.

17. ● Seja $m = 999...99$ o número formado por 77 dígitos iguais a 9 e seja $n = 777...77$ o número formado por 99 dígitos iguais a 7. Qual o número de dígitos de $m \cdot n$?

18. ● É dado um número com três algarismos tal que o primeiro e o último algarismos diferem por pelo menos 2. Encontramos a diferença entre esse número e o número escrito com os mesmos algarismos, mas em ordem inversa. Depois somamos o resultado ao número com os mesmos algarismos, mas em ordem inversa. Prove que essa soma é igual a 1089.

19. ● Estão escritos seis algarismos no quadro. É possível arrumá-los de modo que a diferença entre a soma dos três primeiros e a soma dos três últimos seja menor do que 10?

20. ● (OBM 2012) No planeta *Hexaterra*, a base mais usada é a hexadecimal, base 16, ao invés da base decimal, mais usada na terra. Para compensar a diferença de dígitos entre a base 10 e a base 16, usamos letras como dígitos: A, B, C, D, E e F (escritas em ordem crescente). Assim, por exemplo, denotando $(AB)_{16}$ como o número de dois dígitos AB na base 16, temos que $(AB)_{16} = 10 \cdot 16 + 11 \cdot 1 = 176$ e $(F0E)_{16} = 15\text{Ö}16^2 + 0 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = 3854$. Determine *na base 10* o valor da soma:

$$(1)_{16}+(2)_{16}+\cdots+(D)_{16}+(E)_{16}+(F)_{16}+(10)_{16}+\cdots+(100)_{16}.$$

21. ● Sejam a e b dois dígitos diferentes de zero, não necessariamente diferentes entre si. O número de dois dígitos ab é chamado de curioso, se ele for um divisor do número ba, que é formado pela troca da ordem dos dígitos de ab. Ache todos os números curiosos.

22. ● Uma noite, Wanderson sonhou com dois números de três algarismos: abc e def, de modo que a soma $abc+def+abcdef$ coincidia com a soma de todos os números de três algarismos. Note que abc não é o produto dos algarismos a, b e c, e sim o número de três algarismos a, b e c. O mesmo vale para os outros números.

    (a) Calcule a soma de todos os números de três algarismos.

    (b) Mostre que o sonho de Wanderson é um sonho impossível.

23. ● Prove que cada número natural pode ser escrito como a soma de diversas potências diferentes de dois. Ou seja, qualquer número natural pode ser escrito como uma soma de números do conjunto $\{1, 2, 4, 8, 16, \cdots\}$, com cada potência de 2 sendo usada no máximo uma vez. Por exemplo, $100 = 64 + 32 + 4$.

24. ● Um número de seis algarismos é "premiado" se a soma de seus primeiros três algarismos for igual à soma de seus três últimos algarismos. Por exemplo, 342 531 é premiado, pois $3 + 4 + 2 = 5 + 3 + 1$.

    (a) Quais são o maior e o menor número premiado com seis algarismos distintos?

    (b) Mostre que a soma de todos os números premiados com seis algarismos distintos é divisível por 1001.

25. ● (OBM 2004) Um número de 4 algarismos $abcd$ é chamado de *legal* quando a soma dos números formados pelos dois primeiros e pelos dois últimos algarismos é igual ao número formado pelos algarismos centrais (ou seja, $ab + cd = bc$). Por exemplo, 2307 é um número legal pois $23 + 07 = 30$.

    (a) Qual é o menor número legal maior do que 2307?

    (b) Quantos são os números legais de 4 algarismos?

Referências Bibliográficas

1. DORICHENKO, S. *Círculo Matemático, Problemas Semana-a-Semana.* Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

2. FEITOSA, S. *Curso de Teoria de Números - Nível 2.* Polos Olímpicos de Treinamento Intensivo. Disponível em: `https://poti.impa.br/index.php/site/material`.

3. FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Círculos Matemáticos, A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

4. MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números: Uma Introdução à Matemática.* São Paulo: Edusp, 2006.

5. STEWART, I. *Incríveis Passatempos Matemáticos.* Rio de Janeiro: Zahar, 2010.

6. TAHAN, M. *O Homem que Calculava.* Rio de Janeiro: Record, 2003.