

*Aritmética*  
*POTI/TOPMAT UFPR*  
*Nível 1*

*3<sup>a</sup> edição*

*2024*

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE FORMAÇÃO EM  
MATEMÁTICA OLÍMPICA

Coordenador Geral: Prof. Dr. José Carlos Corrêa Eidam

Coordenadores: Fernanda de Oliveira de Jesus  
Leonardo Knelsen  
Mahmut Telles Cansiz

Site: <http://poti.ufpr.br/>

E-mail: [poti@ufpr.br](mailto:poti@ufpr.br)

Capa: Luciana Laroca

Impressão: Imprensa UFPR

Curitiba, janeiro de 2024.

---

# Apresentação

Prezado Estudante,

É com grande satisfação que apresentamos a terceira edição do material de treinamento do POTI/TOPMAT - Programa de Formação em Matemática Olímpica da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

O POTI/TOPMAT, que conta com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), do Departamento de Matemática da UFPR (DMAT/UFPR) e da Pró-Reitoria de Graduação da UFPR (PROGRAD/UFPR), envolvendo docentes do DMAT e alunos de graduação e pós-graduação da UFPR, é um projeto que visa fornecer embasamento teórico e prático para os estudantes de Ensino Fundamental e Médio que desejam se aprofundar nos interessantes temas abordados nas olimpíadas matemáticas nacionais. Este projeto constitui-se em uma experiência única para todos os envolvidos e também oportuniza a aproximação e interlocução da Universidade com a Educação Básica.

A iniciativa do projeto POTI, capitaneada pelo IMPA em todo o território nacional, teve seu início na UFPR em 2016 e, desde então, nosso polo, sediado no campus Centro Politécnico da UFPR, em Curitiba, tem crescido bastante e impactado positivamente todos os envolvidos. Em particular, envolve de forma intensa os estudantes de graduação da UFPR, especialmente do Curso de Matemática, que atuam como professores e monitores das disciplinas do programa.

O programa TOPMAT iniciou em 2019, com o intuito de pro-

duzir material de formação adequado para treinamento em matemática olímpica. A princípio, o material inicial foi produzido para formação de professores e posteriormente passamos ao trabalho de redação do material de formação para os alunos. Este material foi sendo aperfeiçoado ao longo do tempo, a partir da experiência didática dos estudantes, e o resultado é o que temos hoje em mãos. Em resumo, o presente material foi desenvolvido pelos professores atuantes no programa e servirá como base para todas as atividades desenvolvidas durante o treinamento.

Por fim, gostaria de agradecer de forma expressiva aos estudantes de graduação da UFPR envolvidos neste projeto pelo afinho e esmero na realização deste árduo trabalho. Sem a participação de cada um deles, este projeto não seria possível.

Bons estudos!

*Prof. Dr. José Carlos Eidam  
Coordenador do POTI/TOPMAT - 2024  
Departamento de Matemática - UFPR  
Janeiro de 2024*

# Sumário

|                                              |           |
|----------------------------------------------|-----------|
| <b>Apresentação</b>                          | <b>3</b>  |
| <b>Introdução</b>                            | <b>9</b>  |
| <b>1 Sistema de Numeração</b>                | <b>11</b> |
| 1.1 Contando Sem Números . . . . .           | 11        |
| 1.2 O Sistema de Numeração Decimal . . . . . | 18        |
| 1.2.1 Algarismos . . . . .                   | 18        |
| 1.2.2 Ordens e Classes Numéricas . . . . .   | 19        |
| 1.3 Conjuntos . . . . .                      | 21        |
| 1.3.1 Conjuntos do Sistema Decimal . . . . . | 24        |
| 1.4 Frações . . . . .                        | 27        |
| 1.4.1 Frações Equivalentes . . . . .         | 31        |
| 1.5 Sistema de Numeração Romano . . . . .    | 33        |
| <b>2 Operações Aritméticas</b>               | <b>43</b> |
| 2.1 Adição . . . . .                         | 43        |
| 2.2 Subtração . . . . .                      | 44        |
| 2.3 Multiplicação . . . . .                  | 47        |
| 2.4 Divisão . . . . .                        | 48        |
| 2.4.1 Divisões não exatas . . . . .          | 50        |
| 2.5 Regra de sinais . . . . .                | 51        |
| 2.6 Potência . . . . .                       | 53        |
| 2.7 Raiz quadrada . . . . .                  | 54        |
| 2.8 Expressões Numéricas . . . . .           | 55        |

|          |                                                   |            |
|----------|---------------------------------------------------|------------|
| 2.8.1    | Ordem das Operações . . . . .                     | 56         |
| 2.8.2    | Algoritmo da Divisão . . . . .                    | 58         |
| 2.9      | CrITÉrios de Divisibilidade . . . . .             | 60         |
| 2.10     | NÚmeros Primos . . . . .                          | 64         |
| 2.10.1   | Decomposição em Fatores Primos . . . . .          | 64         |
| 2.10.2   | Encontrando os Divisores de um Número . . . . .   | 65         |
| <b>3</b> | <b>Fatores e Frações</b>                          | <b>75</b>  |
| 3.1      | MÚltiplos e Divisores . . . . .                   | 75         |
| 3.2      | Mínimo Múltiplo Comum . . . . .                   | 77         |
| 3.2.1    | MMC a Partir da Fatoração . . . . .               | 79         |
| 3.3      | Máximo Divisor Comum . . . . .                    | 81         |
| 3.3.1    | MDC a Partir da Fatoração . . . . .               | 83         |
| 3.4      | Mais Alguns CrITÉrios de Divisibilidade . . . . . | 85         |
| 3.5      | Operações Aritméticas com Frações . . . . .       | 89         |
| 3.5.1    | Frações Irredutíveis . . . . .                    | 89         |
| 3.5.2    | Soma e Subtração . . . . .                        | 90         |
| 3.5.3    | Multiplicação . . . . .                           | 94         |
| 3.5.4    | Divisão . . . . .                                 | 95         |
| 3.5.5    | Potência e raiz de frações . . . . .              | 98         |
| 3.5.6    | Transformando Frações em Decimais . . . . .       | 99         |
| 3.5.7    | Transformando Decimais em Frações . . . . .       | 101        |
| <b>4</b> | <b>Álgebra</b>                                    | <b>109</b> |
| 4.1      | Operações com Incógnitas . . . . .                | 109        |
| 4.1.1    | Expressões algébricas . . . . .                   | 110        |
| 4.1.2    | Operações aritméticas em expressões algébricas    | 111        |
| 4.2      | Equações Algébricas . . . . .                     | 114        |
| 4.2.1    | Resolvendo Equações . . . . .                     | 115        |
| 4.3      | Propriedades de conjuntos . . . . .               | 122        |
| 4.3.1    | Operações com conjuntos . . . . .                 | 123        |
| 4.3.2    | Diagrama de Venn . . . . .                        | 127        |
| <b>5</b> | <b>Combinatória</b>                               | <b>139</b> |
| 5.1      | Padrões e Sequências . . . . .                    | 139        |
| 5.2      | Padrões . . . . .                                 | 139        |

|          |                                             |            |
|----------|---------------------------------------------|------------|
| 5.3      | Sequências . . . . .                        | 141        |
| 5.4      | Padrões em Sequências . . . . .             | 142        |
| 5.5      | Progressão Aritmética . . . . .             | 147        |
| 5.5.1    | Um Desafio (Aparentemente!) Exaustivo . . . | 150        |
| 5.6      | Contagem . . . . .                          | 155        |
| 5.6.1    | Quantas opções eu tenho? . . . . .          | 155        |
| 5.7      | Princípio Multiplicativo . . . . .          | 157        |
| 5.8      | Calculando possibilidades . . . . .         | 160        |
| 5.8.1    | Contando em fila . . . . .                  | 160        |
| 5.9      | Anagramas . . . . .                         | 163        |
| <b>6</b> | <b>Proporção e Porcentagem</b>              | <b>173</b> |
| 6.1      | Proporção . . . . .                         | 173        |
| 6.1.1    | Proporção Direta . . . . .                  | 174        |
| 6.1.2    | Proporção Inversa . . . . .                 | 177        |
| 6.2      | Porcentagem . . . . .                       | 181        |
| 6.2.1    | Quanto Por cento? . . . . .                 | 185        |
| 6.3      | Juros simples . . . . .                     | 190        |
| 6.3.1    | Juros . . . . .                             | 191        |
| 6.3.2    | Juros Simples . . . . .                     | 192        |
| 6.3.3    | Montante de Juros Simples . . . . .         | 193        |
| <b>7</b> | <b>Probabilidade</b>                        | <b>201</b> |
| 7.1      | Regra do <i>e</i> e do <i>ou</i> . . . . .  | 203        |
| 7.1.1    | Regra do <i>e</i> . . . . .                 | 203        |
| 7.1.2    | Regra do <i>ou</i> . . . . .                | 205        |
| 7.2      | Gráficos e tabelas . . . . .                | 207        |
| 7.2.1    | Alguns tipos de gráfico . . . . .           | 209        |
| 7.2.2    | Gráficos de barras . . . . .                | 210        |
| 7.2.3    | Gráficos de linha . . . . .                 | 211        |
| 7.2.4    | Gráficos de pizza . . . . .                 | 211        |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>           | <b>221</b> |



# Introdução

Este livro apresenta um modo especial de se fazer Matemática. O conteúdo é basicamente o mesmo que você vê na escola, mas em uma abordagem mais aprofundada e, por vezes, acompanhada de algum formalismo que provavelmente será uma novidade para você. No entanto, o principal propósito não é expor conteúdos, mas de conduzi-lo num treinamento em *Matemática Olímpica*.

Mas... Em que consiste essa tal Matemática?

Do ponto de vista do conteúdo, tudo o que você precisa para resolver problemas de olimpíadas de Matemática está disponível nos livros didáticos escolares ou, mais raramente, em livros mais avançados. Todavia, saber todos esses conteúdos, com suas fórmulas, teoremas e proposições, não garante de forma alguma o sucesso na resolução dos problemas. Mesmo os seus professores na escola e também nós, graduandos em Matemática e de outros cursos de Exatas, frequentemente ficamos travados diante de uma questão de olimpíada, sem que todo o nosso conhecimento matemático possa nos prestar qualquer auxílio. Ou seja, estar bem informado nunca é o suficiente por aqui.

De modo geral, para se preparar para o enfrentamento de problemas matemáticos, nada melhor que... *enfrentar problemas matemáticos!*

O que torna a matemática olímpica especial não é um conjunto de conhecimentos, mas o *modo* de lidar com eles, forçando o estudante a relacionar conteúdos entre si, mudar um ponto de vista que lhe era muito familiar e buscar estratégias de resolução. Problemas

olímpicos lhe arrancam daquele comodismo do tipo “eu já sei, já estudei isso”. Aqui, você já sabe tudo o que precisa saber, mas não sairá do lugar se não se arriscar em caminhos de raciocínio não habituais. E essa descrição não está aqui para desestimulá-lo. Pelo contrário, queremos mostrar que problemas olímpicos são instigantes justamente porque são difíceis e inesperados. Afinal de contas, resolver problemas olímpicos é como um jogo – e você sabe como jogos podem ser desafiadores, não é mesmo?

É por conta desse espírito de Matemática Olímpica que optamos por incluir no material muitos problemas – retirados de diversas olimpíadas e livros ou elaborados por nós mesmos. Este é essencialmente um livro de *treinamento e enfrentamento de problemas matemáticos*, não de exposição de conteúdos. Os conteúdos (tanto aqueles que você já tem na escola quanto alguns novos que lhe apresentaremos) só serão introduzidos na medida em que forem necessários para resolver as questões. Nós o ajudaremos com exemplos, modelos de estratégias de resolução, dicas de organização do raciocínio, entre outras coisas. Porém, o mais importante é que você – por conta própria – faça muitos exercícios, mesmo aqueles que estão resolvidos. E lembre-se sempre do ditado: a prática leva à perfeição.

*Equipe POTI/TOPMAT*

*Nível 1*

*2024*

# Aula 1

## Sistema de Numeração

Imagine que você vai à padaria para comprar pães, mas não pode usar um número para dizer quanto. Como você indicaria a quantidade que quer comprar? Os números são tão comuns na nossa vida que é difícil imaginar não usá-los... Nessa primeira aula, aprenderemos um pouco mais a respeito dos números que utilizamos no nosso dia a dia.



### 1.1 Contando Sem Números

Para resolver o problema da compra dos pães, você pode combinar a seguinte tática com o vendedor: você mostra as mãos com os dedos levantados, um para cada pão que você quer comprar. Então, para cada pão que o vendedor coloca no pacote, você abaixa um dedo, e, ao final, terá a quantidade de pães que desejava.

Perceba que foi feita uma **associação**: cada um dos pães foi associado a um dedo das mãos. Há muitos séculos, antes de existirem os sistemas de numeração, essa era a forma de contagem utilizada.

Imagine um pastor que tenha vivido antes da invenção de métodos de contagem complexos. Todos os dias, ele abre o cercado

de suas ovelhas e as deixa pastar em um campo e, ao final do dia, leva os animais de volta ao seu terreno. Esse pastor notou que, em alguns dias, pareciam voltar menos ovelhas do que ele possuía, e em outros, pareciam voltar mais.

Ele então toma a seguinte estratégia: para cada ovelha que sai pastar ele pega uma pedra, formando assim um monte. No retorno dos animais, ele pega do monte que havia juntado uma pedra para cada ovelha que volta para o cercado. Assim, se sobrassem pedras depois que todas as ovelhas tivessem entrado,



ele saberia que havia perdido ovelhas, e se faltassem pedras para marcá-las, saberia que havia retornado com mais ovelhas.

Mas e se o pastor tivesse uma quantidade muito grande de ovelhas? Contar uma pedra para cada animal seria muito trabalhoso, e ele poderia se perder nas contas.

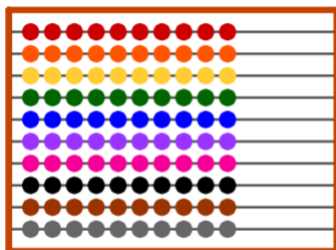
Nesse caso, o pastor poderia usar um outro método associativo. Usando uma pequena quantidade de pedras e um galho de árvore, ele conta uma pedra para cada ovelha, e, quando acabam as pedras, marca um risco no galho. Em seguida, começa novamente a associar cada uma das pedras a uma nova ovelha que passa, até usar todas as pedras novamente, fazendo um novo risco no galho.

Cada risco no galho corresponde ao conjunto de pedras que o pastor usava. Então, se ele tivesse 4 pedras e 5 riscos no galho, a quantidade de ovelhas contada seria de  $5 \times 4 = 20$ . Se ele usasse 7 pedras e tivesse 8 riscos no galho, teria  $8 \times 7 = 56$  ovelhas. Dessa forma, o pastor pode contar uma quantidade de ovelhas muito maior que a quantidade de pedras que ele possui.

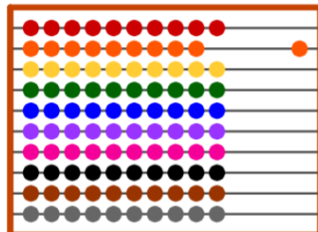
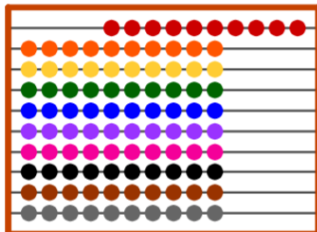
Essa é a lógica seguida pelos sistemas de numeração. Perceba

que o valor de cada um dos risquinhos no galho varia de acordo com a quantidade de pedras que o pastor possui. Nos sistemas numéricos que estudaremos a quantidade de pedras disponíveis é equivalente à quantidade de símbolos que utilizamos para representar nossas quantidades. Esse número é conhecido como a **base** do nosso sistema de contagem.

O **ábaco** é uma ferramenta de contagem que utiliza a associação de quantidades a pedrinhas dispostas em suas linhas. No ábaco, cada linha possui 10 pedras usadas para representar os itens contados. Inicialmente, colocamos todas as pedras do lado esquerdo da ferramenta.

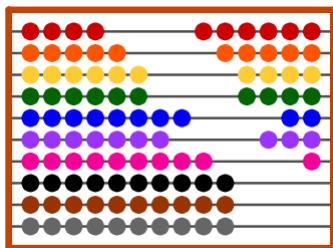


Para cada objeto que estamos contando, passamos uma das pedras da primeira linha para o lado direito. Quando todas as pedras da primeira linha tiverem sido movidas, passamos uma pedra da linha de baixo para o lado direito, e “limpamos” a contagem da linha de cima, passando novamente todas as suas pedras para o lado esquerdo. Com isso, podemos afirmar que as imagens representam a mesma quantidade:



Portanto, cada pedra da segunda linha do ábaco representa 10 pedras da primeira. Da mesma forma, cada pedra da terceira linha representa 10 pedras da segunda e assim por diante.

É por esse motivo que, para escrevermos o número representado em um ábaco, contamos a quantidade de pedras à direita de cada linha e escrevemos os números encontrados da direita para a esquerda.



O número representado pelo ábaco acima é:

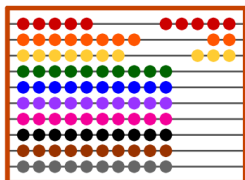
132456

## Exercícios de Fixação

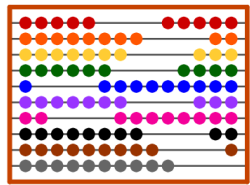
- Escreva o número representado nos ábacos a seguir:

(a)

\_\_\_\_\_

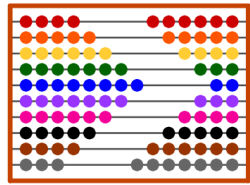


(b)



\_\_\_\_\_

(c)



2. Represente no ábaco o número indicado em cada item.

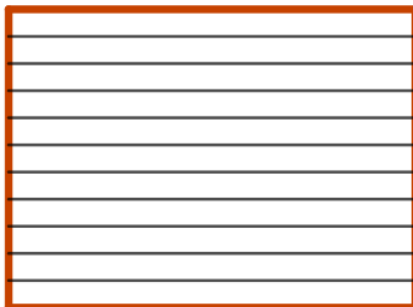
(a) 423129:



(b) 1234506789:

[illegible]

(c) 9010901090:

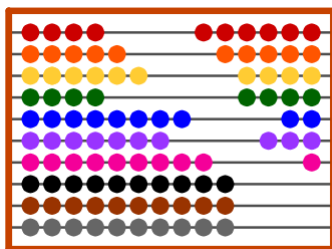


3. Qual é o maior número que pode ser representado no ábaco do exercício anterior?
4. No mínimo quantas linhas deve ter um ábaco para que possa ser representado nele o número 12345678987654321?

.....

## DESAFIO

Ana estava entediada e resolveu usar um ábaco para contar os carros que passavam na frente da rua de sua casa. Quando se cansou da brincadeira, seu ábaco estava como mostra a figura abaixo.



Ao fazer as contas, ela concluiu que havia contado 1.324.456 carros. Entretanto, quando foi contar para seu irmão, ele percebeu

que faltavam duas pedras na quarta linha do ábaco. Consequentemente, Ana havia contado menos carros do que tinha previamente concluído. Qual a quantidade certa de carros que passaram pela rua da casa de Ana?

---

## 1.2 O Sistema de Numeração Decimal

Com o passar do tempo, as civilizações mais antigas começaram a entender que a representação escrita de quantidades era muito importante. E, para isso, precisaram desenvolver símbolos que pudessem ser utilizados e entendidos por todos como representações de uma certa quantidade. O sistema numérico que utilizamos é conhecido como Sistema de Numeração Decimal, isto é, utilizamos um sistema de contagem com base 10. A base de um sistema numérico nos fornece duas características muito importantes: a quantidade de algarismos disponíveis no sistema e a relação entre suas ordens.

### 1.2.1 Algarismos

Algarismo é o nome utilizado para se referir a cada um dos símbolos utilizados para representar quantidades. No nosso caso, os 10 símbolos utilizados para expressar quantidades são:



### 1.2.2 Ordens e Classes Numéricas

Imagine que você deve escrever um número inteiro utilizando um algarismo 1 e dois algarismos 0. Sua resposta pode ser o número 001, 010 ou 100. Mas, se os três números são escritos utilizando os mesmos dígitos, como temos certeza que são números diferentes?

Isso acontece, pois nosso sistema numérico é **posicional**, ou seja, a posição em que os algarismos são escritos altera o valor representado. Para organizarmos esses espaços, chamamos cada um dos lugares que um dígito pode ocupar de **casa**. No número 001, o algarismo 1 está na 1ª casa decimal. Já no número 010 ele está na 2ª casa decimal, e no número 100 ele está na 3ª casa decimal.

Essas casas são classificadas em **ordens** (unidade, dezena e centena) e **classes** (unidades simples, unidades de milhar, unidades de milhão, etc.). Podemos dizer que cada casa decimal terá um nome, de acordo com sua ordem, e um sobrenome, de acordo com sua classe.

| Classe das Unidades de Milhão |          |          | Classe das Unidades de Milhar |          |          | Classe das Unidades Simples |          |          |
|-------------------------------|----------|----------|-------------------------------|----------|----------|-----------------------------|----------|----------|
| Centena                       | Dezena   | Unidade  | Centena                       | Dezena   | Unidade  | Centena                     | Dezena   | Unidade  |
| 9ª Ordem                      | 8ª Ordem | 7ª Ordem | 6ª Ordem                      | 5ª Ordem | 4ª Ordem | 3ª Ordem                    | 2ª Ordem | 1ª Ordem |

É importante ressaltar que costumamos chamar as casas decimais da classe das unidades simples apenas pelo nome de sua ordem. Portanto, ao nos referirmos a uma dezena estamos falando de um dígito na 2ª ordem.

Podemos estudar as ordens e classes de todos os números. O número 31345, por exemplo, temos um algarismo 3 na casa da dezena de milhar, um algarismo 1 na casa da unidade de milhar, um algarismo 3 na casa da centena simples, um algarismo 4 na casa da dezena simples e um algarismo 5 na casa da unidade simples.

| Classe das Unidades de Milhão |        |         | Classe das Unidades de Milhar |        |         | Classe das Unidades Simples |        |         |
|-------------------------------|--------|---------|-------------------------------|--------|---------|-----------------------------|--------|---------|
| Centena                       | Dezena | Unidade | Centena                       | Dezena | Unidade | Centena                     | Dezena | Unidade |
|                               |        |         |                               | 3      | 1       | 3                           | 4      | 5       |

Observe que todas as classes numéricas são compostas por três ordens sendo elas: uma unidade, uma dezena e uma centena. Como estamos trabalhando em um sistema decimal e posicional, podemos afirmar algumas coisas:

- A ordens das **unidades** representam o menor elemento de uma classe;
- As **dezenas** sempre representarão 10 unidades. Ou seja, uma dezena de milhar equivale a 10 unidades de milhar, uma dezena de milhão representa 10 unidades de milhão e assim por diante;
- Cada **centena** representa 10 dezenas. Logo, centenas equivalem a  $10 \times 10 = 100$  unidades. Uma centena simples equivale a 10 dezenas simples e a 100 unidades simples;
- Toda ordem do Sistema de Numeração Decimal equivale a  $10 \times$  o valor da ordem anterior;
- Quanto mais à esquerda está o algarismo, maior o seu valor.

---

### Exercícios de Fixação

1. Quantas dezenas tem um milhar?
2. Quantas centenas tem um milhão?

3. Quantas classes possuem os números a seguir? E ordens?

(a) 65:

(d) 3691215:

(b) 723:

(e) 12243672:

(c) 31469:

(f) 1360945102:

---

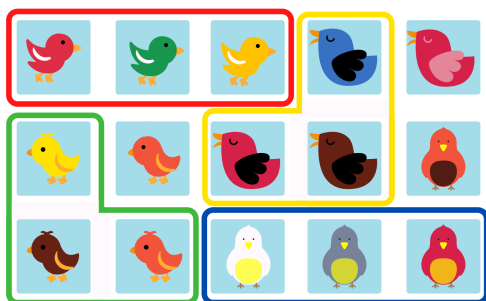
## 1.3 Conjuntos

Para continuarmos aprendendo sobre o Sistema Decimal, precisamos entender o conceito de conjuntos. É comum encontrarmos conjuntos no nosso dia-a-dia: o conjunto de livros em uma estante, o conjunto de lápis de cor, o conjunto de camisetas que temos no armário, entre muitos outros exemplos. Vamos iniciar o estudo deste conteúdo por meio de um exemplo.



Os animais favoritos de Ana são pássaros, por isso, ela ficou muito feliz ao ganhar de presente de aniversário uma coleção de figurinhas desses animais. Apreciando sua coleção, ela percebeu que alguns dos pássaros têm características em comum. Ana então agrupou as figurinhas de acordo com essas características, formando 5 grupos:

- Grupo Vermelho: pássaros com listra branca na asa;
- Grupo Amarelo: animais com a asa preta;
- Grupo Verde: passarinhos com topete na cabeça;
- Grupo Azul: pássaros que têm barriga amarela;
- Sem Grupo: animais que não se encaixam em nenhum dos conjuntos anteriores.



Os grupos de figurinhas formados por Ana são exemplos de conjuntos. Entendemos que **conjuntos** são agrupamentos de coisas quaisquer e, por isso, podem ser representados de diversas formas. Entretanto, uma das representações mais utilizadas na Matemática é feita enumerando os objetos do conjunto entre chaves  $\{ \}$  separados por vírgula ou ponto e vírgula. Por exemplo, são conjuntos:

- $A = \{\text{pera, maçã, abacaxi}\},$
- $B = \{1, 2, 3, \dots\},$
- $C = \{a, b, c\},$
- $D = \{4, ; 1; 1; 2\},$
- $E = \{2, 4, 6, \dots\},$
- $F = \{\infty, \Delta, \emptyset, \aleph\},$
- $G = \{1; a; 3; y; \aleph; \text{abacaxi}\}.$

Cada um dos itens do conjunto é chamado de **elemento**. Assim, maçã é um elemento do conjunto  $A$ , e  $\aleph$  é um elemento dos conjuntos  $F$  e  $G$ . A notação utilizada para identificar que um elemento

pertence a um conjunto é  $\in$ , no caso do  $\mathcal{N}$  está correto afirmar que  $\mathcal{N} \in F$  e  $\mathcal{N} \in G$ .

Você percebeu que alguns dos exemplos acima possuem três pontinhos (...) no final? Essa pontuação é chamada de reticências e indica que os conjuntos continuam infinitamente, seguindo a ordem dos elementos representados. Assim, sabemos que o próximo elemento do conjunto  $B$  é o 4, depois o 5, e assim por diante. Podemos classificar todos os conjuntos como **finitos** ou **infinitos**:

- Conjuntos finitos têm uma quantidade exata de elementos, como os conjuntos  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$  e  $G$ .
- Conjuntos infinitos possuem uma quantidade imensurável de elementos, como os conjuntos  $B$  e  $E$ .

---

### Exercício de Fixação

1. Indique quais e quantos são os elementos dos seguintes conjuntos (não se esqueça de colocar esses elementos entre  $\{\}$ , e sem repetição):
  - (a) Números entre 2 e 11.
  - (b) Meses com 30 dias.
  - (c) Países sede das Olimpíadas desde 1992.
  - (d) Professores do POTI Nível 1.
  - (e) Animais de estimação que você tem ou já teve.

### 1.3.1 Conjuntos do Sistema Decimal

Nosso sistema numérico também é dividido em conjuntos. Esses conjuntos são definidos pelas propriedades de seus elementos. Isto quer dizer que todos os números contidos em um mesmo conjunto possuem as mesmas propriedades.

#### Conjunto dos Números Naturais

O primeiro conjunto do nosso sistema é chamado de **Conjunto dos Números Naturais**. Nele estão contidos todos os números que representam quantidades inteiras e positivas. Sua representação é feita pela letra  $N$  ou pelo símbolo  $\mathbb{N}$  e pode, também, ser feita da seguinte maneira:  $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$

#### Conjunto dos Números Inteiros

Nosso segundo conjunto é chamado de **Conjunto dos Números Inteiros**. Nele estão contidos todos os números que representam quantidades inteiras. Além dos naturais, nesse grupo encontramos os opostos dos números naturais. O **oposto** de um número é a representação de uma quantidade inteira e negativa. Por exemplo, o oposto do número 7 é  $-7$ , o oposto de 364 é  $-364$ . Generalizando, o oposto de um número  $n$  é dado por  $-n$ .

A representação dos números inteiros é feita pela letra  $Z$  ou pelo símbolo  $\mathbb{Z}$ . Assim como para o caso dos números naturais, esse conjunto pode ser expresso como:  $\mathbb{Z} = \dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots$

Agora que já conhecemos esses dois conjuntos podemos aprender sobre uma propriedade muito importante de seus elementos: a paridade.

#### Paridade

A **paridade** de um número nos diz se ele é **par** ou **ímpar**.

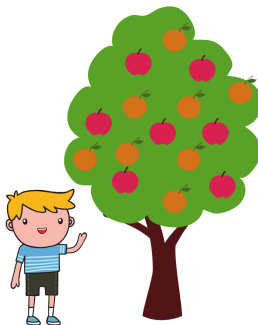
Um número  $p$  é par se não deixa resto na divisão por 2, portanto, pode ser escrito da forma  $p = 2 \cdot n$ , em que  $n$  representa um número

qualquer. Por exemplo,  $p = 6$  é um número par, pois podemos escrevê-lo como  $6 = 2 \cdot 3$ , em que  $n = 3$ .

Um número  $i$  é ímpar se deixa resto 1 na divisão por 2, e o escrevemos como  $i = 2 \cdot n + 1$ . Por exemplo,  $i = 9$  é um número ímpar, escrito da forma  $9 = 2 \cdot 4 + 1$ . Para esse exemplo,  $n = 4$ .

Existem exercícios que podem parecer muito difíceis em um primeiro momento, mas que são facilmente resolvidos analisando a paridade dos números na questão. Veja o exemplo a seguir.

**Exercício Resolvido 1.1.** No reino da Frutilândia existe uma árvore mágica que possui 2019 maçãs e 2020 laranjas. Todo dia um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce uma laranja na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maçã. Após alguns dias restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?



**Solução.** Vamos analisar a paridade do número de frutas que restam na árvore de acordo com a escolha do garoto:

- Comendo duas frutas iguais: Ao comer as duas frutas iguais, a paridade das frutas não se altera, mas, como nascerá uma laranja, a paridade para as laranjas será alterada, enquanto para as maçãs se manterá como inicialmente.
- Comendo duas frutas diferentes: A paridade será alterada para as duas frutas, mas, como nesse caso nasce uma nova maçã,

a paridade para essa fruta se altera novamente, voltando à inicial. Então também dessa forma, apenas a paridade para as laranjas é alterada.

Percebemos então que a paridade das maçãs nunca se altera, sendo sempre uma quantidade ímpar, a paridade inicial das 2019 maçãs. Ao restar apenas uma fruta na árvore, podemos ter 0 maçãs ou uma maçã. Como a quantidade de maçãs não pode ser 0 (um número par), então terá de ser 1, ou seja, a última fruta será uma maçã.

□

---

### Exercício de Fixação

Para cada número, determine a sua paridade e escreva-os na forma  $p = 2 \cdot n$  ou  $i = 2 \cdot n + 1$ . Em seguida, escreva o valor de  $n$  correspondente para cada exemplo:

|                 |              |                     |          |
|-----------------|--------------|---------------------|----------|
| <b>Ex.:</b> 36: | <i>par</i>   | $36 = 2 \cdot 18$   | $n = 18$ |
| 9:              | <i>ímpar</i> | $9 = 2 \cdot 4 + 1$ | $n = 4$  |

|        |       |       |
|--------|-------|-------|
| (a) 8: | $8 =$ | $n =$ |
|--------|-------|-------|

|         |        |       |
|---------|--------|-------|
| (b) 11: | $11 =$ | $n =$ |
|---------|--------|-------|

|         |        |       |
|---------|--------|-------|
| (c) 15: | $15 =$ | $n =$ |
|---------|--------|-------|

|         |        |       |
|---------|--------|-------|
| (d) 28: | $28 =$ | $n =$ |
|---------|--------|-------|

|          |         |       |
|----------|---------|-------|
| (f) 156: | $156 =$ | $n =$ |
|----------|---------|-------|

E se eu dividir uma maçã em duas partes iguais, como eu posso expressar essa quantidade? Simples, para isso, iremos adicionar **casas decimais** ao nosso valor. Essa nova parte dos números representa valores menores que uma unidade.



## Conjunto dos Números Racionais

O **Conjunto dos Números Racionais** é composto por todos os números que podem ser representados na forma de **frações**. Esse conjunto é expresso pela letra  $\mathbb{Q}$  ou pelo símbolo  $\mathbb{Q}$  e pode ser escrito como  $\mathbb{Q} = \frac{a}{b}$  para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$  com  $b \neq 0$ .

Todo número racional é composto por uma parte inteira e uma parte racional que podem ser nulas ou não. Veja alguns exemplos:

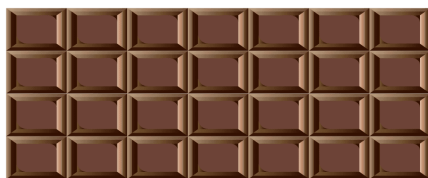
| Parte Inteira |        |         | Parte decimal |           |          |
|---------------|--------|---------|---------------|-----------|----------|
| Centena       | Dezena | Unidade | Décimo        | Centésimo | Milésimo |
|               |        | 1,      | 5             |           |          |
| 6             | 7      | 8,      | 3             |           |          |
|               | 1      | 0,      | 0             | 0         | 0        |

## 1.4 Frações

Frações podem ser utilizadas para representar coisas como: as partes de um todo, os números racionais, porcentagens, escalas, entre outros. Graficamente, toda fração é formada por dois números separados por uma barrinha. O número de baixo é chamado **denominador** e indica a razão pela qual dividimos nossa quantidade

inicial. Já o número de cima é chamado de **numerador** e expressa quantas dessas partes queremos utilizar. Por esse motivo, também é muito comum nos referirmos à frações dizendo que elas são “a razão” entre dois valores.

Imagine que você tem uma barra de chocolate e quer dividi-la igualmente para comer a mesma quantia em cada dia da semana. Quanto do chocolate você vai comer em cada dia?



A barra tem 28 quadradinhos de mesmo tamanho. Então, para dividir o chocolate você pode dividir o número de quadradinhos pelos dias da semana. Assim, você deve comer em cada dia  $28 \div 7 = 4$  quadradinhos. Podemos representar essa quantidade através da fração:  $\frac{4}{28}$ . Nesse caso, nosso **denominador** indica em quantas partes a barra está dividida, e o **numerador** indica quantas partes você deve comer em cada dia.

$$\frac{4}{28} \rightarrow \begin{array}{l} \text{numerador} \\ \text{denominador} \end{array}$$

Para fazer a leitura de valores fracionários, precisamos identificar o número correspondente ao seu denominador. Os denominadores entre 2 e 10 possuem nomenclaturas especiais como expresso pela tabela:

| Valor do denominador | Nomenclatura |
|----------------------|--------------|
| 2                    | meio         |
| 3                    | terço        |
| 4                    | quarto       |
| 5                    | quinto       |
| 6                    | sexto        |
| 7                    | sétimo       |
| 8                    | oitavo       |
| 9                    | nono         |
| 10                   | décimo       |

Quando os denominadores forem maiores do que 10, iremos ler o número e adicionais a palavra "avos". Veja alguns exemplos:

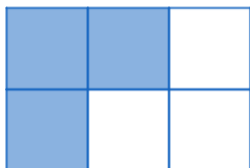
- $\frac{5}{3}$  - cinco terços
- $\frac{17}{30}$  - dezessete trinta avos
- $\frac{4}{9}$  - quatro nonos
- $\frac{21}{40}$  - vinte um quarenta avos
- $\frac{12}{10}$  - doze décimos
- $\frac{77}{50}$  - setenta e sete cinquenta avos

---

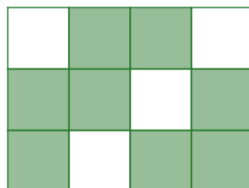
### Exercícios de Fixação

1. Escreva a fração que representa a parte pintada de cada figura:

(a)



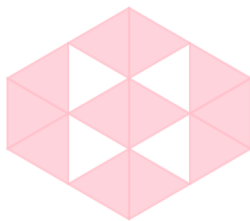
(b)



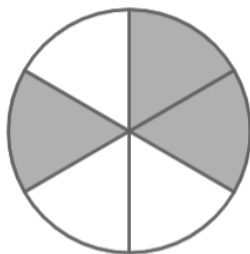
(c)



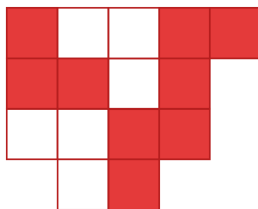
(d)



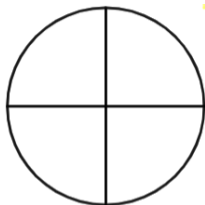
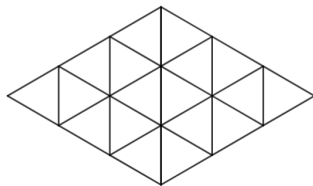
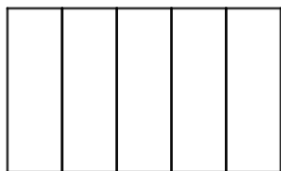
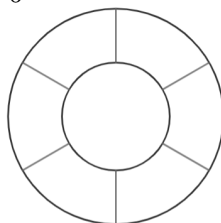
(e)



(f)



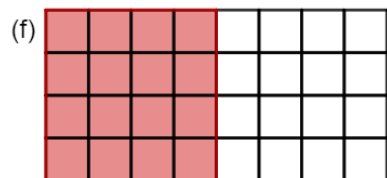
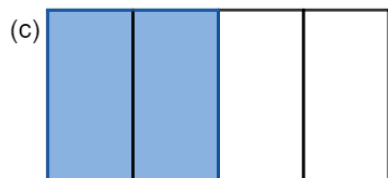
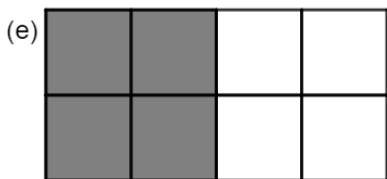
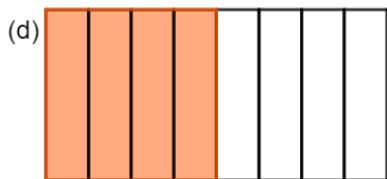
2. Em cada figura, pinte a parte correspondente à fração indicada:

(a)  $\frac{1}{4}$ (c)  $\frac{8}{18}$ (b)  $\frac{4}{5}$ (d)  $\frac{6}{6}$ 

Depois de todos esses exercícios, ainda resta questionar se você sabe que mais de uma fração pode representar o mesmo número racional? Por exemplo, a fração  $\frac{6}{2}$ , indica a divisão  $6 \div 2$ , e é um modo de representar o número 3. Também poderíamos escrever  $\frac{3}{1}$  e, ainda assim, representar o número 3. Isso se dá, pois  $\frac{6}{2}$  e  $\frac{3}{1}$  são **frações equivalentes**.

### 1.4.1 Frações Equivalentes

Observe as figuras a seguir, todas representam o mesmo todo dividido de diferentes formas.



As frações que representam as partes pintadas das figuras (a), (b), (c), (d), (e) e (f) são, respectivamente,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{4}{8}$ ,  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{16}{32}$ .

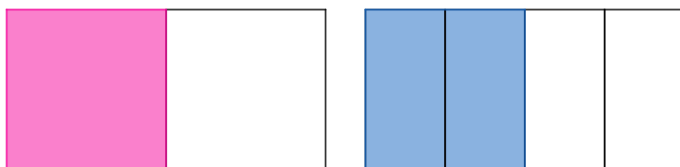
Percebemos através das imagens que mesmo sendo representadas por frações diferentes, todas têm a mesma porção do todo pintada. Isso acontece, pois existem inúmeras frações diferentes que representam um mesmo número ou quantidade. Portanto, as frações  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{4}{8}$  e  $\frac{16}{32}$  são equivalentes entre si.

Note que multiplicando o numerador e o denominador da primeira fração por 2 obtemos a segunda:

$$\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{4} \cdot$$

Sempre que multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número, obtemos uma fração equivalente.

Olhando para a figura, interpretamos esse procedimento da seguinte forma: o denominador 2, que indica a quantidade de partes em que a figura foi dividida, foi multiplicado por 2, então, dividimos cada uma das partes da figura em outras duas partes menores, obtendo ao todo  $2 \times 2 = 4$  partes. Com relação ao numerador, a parte que foi tomada se tornou agora  $1 \times 2 = 2$  duas partes.



## Exercícios de Fixação

1. Escreva três frações equivalentes para os números em cada item:

(a)  $\frac{3}{7}$  :

(c)  $\frac{33}{99}$  :

(b)  $\frac{14}{2}$  :

(d) 5 :

---

Todas essas são características do Sistema de Numeração Decimal! Entretanto, ao longo dos anos, diversos sistemas de numeração foram inventados pelas mais diversas sociedades. Vários deles caíram em desuso total, mas alguns ainda são utilizados para representações específicas como, por exemplo, os números romanos. Por isso, estudaremos brevemente essa representação numérica.

## 1.5 Sistema de Numeração Romano

O **Sistema de Numeração Romano** é um sistema de numeração posicional que utiliza letras maiúsculas para expressar valores. Cada um dos algarismos deste sistema possui um valor fixo que será somado ou subtraído dos demais de acordo com sua localização.

|   |   |    |    |     |     |      |
|---|---|----|----|-----|-----|------|
| I | V | X  | L  | C   | D   | M    |
| 1 | 5 | 10 | 50 | 100 | 500 | 1000 |

Os números romanos são, em geral, escritos da esquerda para a direita, do maior valor para o menor. Por exemplo:

$$186 = \text{CLXXXVI} = 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 5 + 1$$

$$1015 = \text{MXV} = 1000 + 10 + 5$$

Entretanto, podemos inverter o posicionamento de um algarismo para representar antecessores dos valores representados por cada um dos símbolos. Por exemplo, ao invés de representarmos o número 40 por XXXX escrevemos XL. No Sistema de Numeração Decimal, XL seria equivalente a  $50 - 10 = 40$ . Outros exemplos semelhantes são:

$$4 = \text{IV}$$

$$90 = \text{XC}$$

$$909 = \text{CMIX}$$

---

### Exercício de Fixação

1. Escreva a representação dos números abaixo de acordo com o Sistema de Numeração Romano:

(a) 33:

(c) 149:

(e) 1189:

(b) 87:

(d) 478:

(f) 1645:

---

### Exercícios Propostos

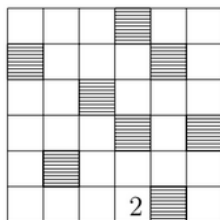
1. (OBMEP - 2013, adaptada) Ao medir a cintura de Marta com uma fita métrica, Dona Célia observou que as marcas de 23 cm e 77 cm ficaram sobrepostas, como na figura. Qual é a medida da cintura de Marta?



2. (OBMEP - 2007, adaptada) Francisco escreveu 28 algarismos numa tabela  $6 \times 6$  e pintou de preto algumas casas, como nas palavras cruzadas. Ele fez uma lista de todos os números que podem ser lidos horizontalmente ou verticalmente, excluindo os números de um só algarismo. Veja a lista:

28    45    51    57    72    88    175    289    632  
 746    752    805    885    5647    5873    7592    8764

Preencha a tabela escrevendo os números dados. Um algarismo já foi colocado.

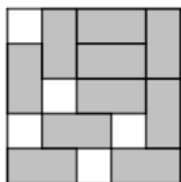


3. (OBM - 2003, adaptada) Em um quadro mágico, a soma dos números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. No quadrado mágico a seguir, qual é o valor de  $x$ ?

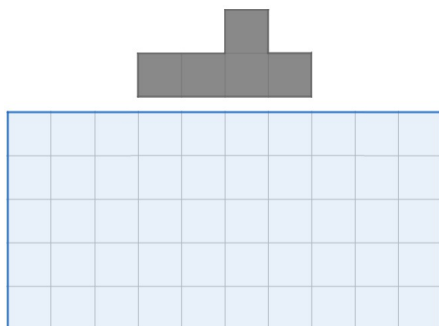
|    |    |     |
|----|----|-----|
|    |    |     |
| 1  | 14 | $x$ |
| 26 |    | 13  |

4. Iann e Anni foram ao cinema, mas a idade mínima para assistir ao filme que eles queriam era 12 anos. Anni disse “Eu posso assistir ao filme! Tenho um ano a mais que a idade mínima!”. Então Iann respondeu “Eu não posso assistir! Tenho 3 anos a menos que você!”. Qual a idade de Iann?

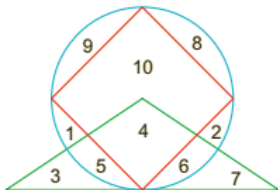
5. (OBMEP, adaptada) Alan, José e Paulo resolveram sair para comer uma pizza. A pizza foi dividida em 12 pedaços iguais. José comeu 4 pedaços, Paulo comeu 3 e Alan comeu 2. Qual é a fração que representa a quantidade de pizza que sobrou?
6. Adamastor joga três dados de 6 faces, e pede para Nelson fazer a soma dos pontos. Adamastor viu que um dos dados marcava 2 pontos, e Nelson disse que os outros dois dados também tinham um número par de pontos em cada face. Qual é a maior pontuação que Adamastor pode obter?
7. (OBMEP - 2020, adaptada) Algumas peças cinzas no formato de um dominó  $2 \times 1$  podem ser usadas para cobrir os quadradinhos de um tabuleiro  $5 \times 5$ . Dizemos que o tabuleiro está lotado quando não há espaço para colocar novas peças, como no exemplo abaixo. Qual fração representa a área que não foi coberta pelas peças colocadas?



8. É possível cobrir um tabuleiro  $5 \times 10$  usando apenas peças como abaixo?

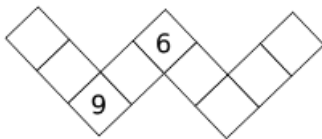


9. (OBMEP - 2016, adaptada) Observe a figura. Qual é a soma dos números que estão escritos dentro do triângulo e também dentro do círculo, mas fora do quadrado?

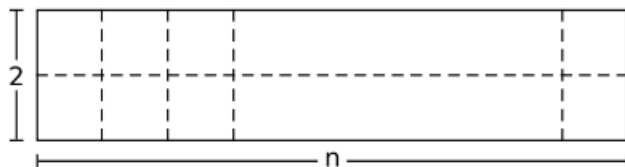


10. (Leningrado - 1989, adaptado) Um grupo de  $K$  físicos e  $K$  químicos está sentado ao redor de uma mesa. Alguns deles sempre falam a verdade e outros sempre mentem. Sabe-se que o número de mentirosos entre os físicos e químicos é o mesmo. Quando foi perguntado: “Qual é a profissão de seu vizinho da direita?”, todos responderam “Químico”. Mostre que  $K$  é par.
11. Sob uma mesa estão 11 moedas. Alberto e Bianca jogam em turnos. Em cada turno é permitido retirar 1, 2, 3 ou 4 moedas. Quem retirar as últimas moedas é o vencedor. Se Bianca começar jogando, ela pode ter certeza da vitória?
12. (OBMEP - 2013, adaptada) Um hotel tem 15 andares com 25 quartos cada um. As chaves dos quartos são identificadas por um número de três ou quatro algarismos indicando o andar, de 1 a 15, seguido do número do quarto, de 01 a 25. Por exemplo, a chave 106 é a do quarto número 06 do 1º andar e a chave 1315 é a do quarto número 15 do 13º andar.
- (a) Quantos são os quartos do 10º andar para cima?
- (b) Quantas chaves têm número que aparece o algarismo 1?

13. (OBM - 2006) Esmeralda inventou uma brincadeira. Digitou alguns algarismos na primeira linha de uma folha. Depois, na segunda linha, fez a descrição dos algarismos digitados da seguinte maneira: ela apresentou as quantidades de cada um dos que apareceram, em ordem crescente de algarismo. Por exemplo, após digitar 21035662112, ela digitou 103132131526, pois em 21035662112 existe um algarismo 0, três algarismos 1, três algarismos 2, um algarismo 3, um algarismo 5 e dois algarismos 6.
- (a) Ela começou uma nova folha com 1. Fez, então, sua descrição, ou seja, digitou 11 na segunda linha. Depois, descreveu 11, ou seja, digitou 21 na terceira linha, e assim continuou. O que ela digitou na  $10^{\text{a}}$  linha da folha?
- (b) Esmeralda gostou tanto de fazer isso que decidiu preencher várias folhas com essa brincadeira, começando com 01 na primeira linha da primeira folha. Quais são os dois primeiros algarismos da esquerda do que ela digitou na  $2006^{\text{a}}$  linha?
14. Dez amigos possuem juntos 29 moedas. Sabendo que cada garoto possui pelo menos uma moeda, mostre que existem três deles que possuem a mesma quantidade de moedas.
15. Mostre como escrever os números de 1 a 9, um por casa e sem repetições, de modo que a soma dos números em cada uma das quatro linhas seja a mesma. Já foram escritos os números 9 e 6. Colocar os demais números.



16. Arnaldo e Bernardo disputam um jogo em um tabuleiro  $2 \times n$ :

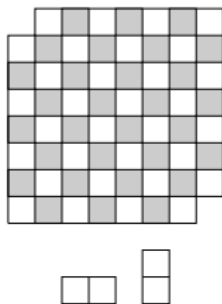


As peças do jogo são dominós  $2 \times 1$ . Inicialmente Arnaldo coloca um dominó cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro, na horizontal ou na vertical. Os jogadores se revezam colocando uma peça no tabuleiro, na horizontal ou na vertical, sempre cobrindo exatamente duas casas do tabuleiro. Não é permitido colocar uma peça sobre outra já colocada anteriormente. Quem não conseguir colocar uma peça no tabuleiro perde. Qual dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora, ou seja, uma estratégia que o leva à vitória quaisquer que sejam as jogadas de seu adversário, para:

- (a)  $n = 1?$                       (c)  $n = 3?$                       (e)  $n = 2004?$   
(b)  $n = 2?$                       (d)  $n = 10?$                       (f)  $n = 2005?$
17. (OBMEP - 2012) Para obter o resumo de um número de até 9 algarismos, deve-se escrever quantos são seus algarismos, depois quantos são seus algarismos ímpares e finalmente quantos são seus algarismos pares. Por exemplo, o número 9103405 tem 7 algarismos, sendo 4 ímpares e 3 pares, logo seu resumo é 743.
- (a) Encontre um número cujo resumo seja 523.  
(b) Encontre um número que seja igual ao seu próprio resumo.  
(c) Para qualquer número de até 9 algarismos, podemos calcular o resumo do resumo de seu resumo. Mostre que

esse procedimento leva sempre a um mesmo resultado, qualquer que seja o número inicial.

18. (Círculos matemáticos - a experiência russa) Durante um julgamento no País das Maravilhas, a Lebre de Março afirmou que os biscoitos foram roubados pelo Chapeleiro Maluco. Depois, o Chapeleiro Maluco e o Rato Silvestre testemunharam, mas, por alguma razão, seus testemunhos não foram registrados. Descobriu-se durante o julgamento que os biscoitos foram roubados só por um dos três e que, além disso, só o culpado falou a verdade. Quem roubou os biscoitos?
19. (OBMEP - 2011) A figura abaixo mostra um tabuleiro  $8 \times 8$  no qual duas casas foram retiradas (a do canto inferior direito e a do canto superior esquerdo). É possível cobrir este tabuleiro com 31 dominós  $2 \times 1$ ? Cada dominó pode ser colocado na horizontal ou na vertical cobrindo exatamente duas casas.



20. (OBMEP - 2016) Um poliminó é uma sequência de quadradinhos  $1 \times 1$  justapostos compartilhando lados em um comum com seus vizinhos e formando uma única peça. Os poliminós de dois quadradinhos são conhecidos como dominós e os poliminós com quatro quadradinhos são conhecidos como tetraminós, as pecinhas do famoso jogo Tetris. A figura a seguir mostra um quadrado  $3 \times 3$  com números de 1 até 9 escritos em cada um de seus quadradinhos  $1 \times 1$ .

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

Sabendo que  $1 + 2 + \dots + 9 = 45$ , podemos tentar dividir o quadrado em 3 poliminós com mesma soma, cada um com soma  $\frac{45}{3} = 15$ . A figura a seguir, mostra uma maneira de fazer isto.

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

- (a) Mostre que não é possível dividir o quadrado  $3 \times 3$  em uma quantidade maior que três de poliminós de mesma soma.
- (b) Considere o quadrado  $4 \times 4$  com os números de 1 até 16, escritos em ordem crescente como indicado na figura abaixo.

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Mostre como dividir este quadrado em dois poliminós de modo que a soma dos números em cada um deles seja a mesma.



## Aula 2

# Operações Aritméticas

Para começarmos nossa jornada na matemática olímpica, é essencial dominar as operações aritméticas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Muitos exercícios desafiadores contam apenas com o uso estratégico dessas operações!

### 2.1 Adição

A primeira conta que exploraremos é a **adição**. A tão conhecida “conta de mais” consiste em juntar valores. Por exemplo, se eu tenho 2 canetas e ganho mais 3, terei no total  $2 + 3 = 5$  canetas. As contas de adição possuem duas propriedades: a comutativa e a associativa.

#### Propriedade Comutativa

A **propriedade comutativa** nos garante que independentemente da ordem em que os números aparecem em uma operação, eles deverão sempre resultar na mesma quantidade. Ou seja, a ordem dos fatores não altera o resultado. Observe:

- $2 + 3 = 5 = 3 + 2$ ;
- $40 + 4 = 44 = 4 + 40$ ;

### Propriedade Associativa

A **propriedade associativa** nos garante que podemos escolher a ordem em que faremos a operação desejada entre inúmeros valores e eles sempre resultarão na mesma quantidade. Veja os exemplos:

- $(3 + 14) + 37 = 17 + 37 = 54$ ;
- $3 + (14 + 37) = 3 + 51 = 54$ .

## 2.2 Subtração

No caso da **subtração** estamos reduzindo nosso número inicial. Por exemplo, se eu ganhei 15 reais de presente e compro uma caixa de bombons por 6,00 reais, me sobram 9 reais para gastar em outras coisas. As contas de menos não possuem a propriedade associativa:

$$(66 - 7) - 4 = 59 - 4 = 55 \quad \neq \quad 66 - (7 - 4) = 66 - 3 = 63$$

Nem a propriedade comutativa, pois, quando invertemos os valores, a regra de sinais (que logo aprenderemos) muda:

$$27 - (-14) = 27 + 14 = 41 \quad \neq \quad (-14) - 27 = -41$$

Utilizamos tanto essas operações que parece banal defini-las novamente. Entretanto, dominar as características e propriedades das operações aritméticas nos permite resolver exercícios como esses:

**Exercício Resolvido 2.1.** (OBMEP - 2010) Na adição a seguir, o símbolo ♣ representa um mesmo algarismo. Qual é o valor de ♣ × ♣ + ♣?

$$\begin{array}{r}
 4 \clubsuit 7 \\
 + 895 \\
 \hline
 1 \clubsuit \clubsuit 2
 \end{array}$$

**Solução.** Vamos começar olhando para a soma das centenas. Note que para o resultado:  $4 + 8 = 12$ , o valor de  $\clubsuit$  deveria ser 2, mas substituindo o símbolo na dezena do primeiro número o resultado para as centenas se altera:

$$\begin{array}{r}
 427 \\
 + 895 \\
 \hline
 1322
 \end{array}$$

Vamos então testar o valor  $\clubsuit = 3$ :

$$\begin{array}{r}
 437 \\
 + 895 \\
 \hline
 1332
 \end{array}$$

Assim,  $\clubsuit = 3$ , e  $\clubsuit \times \clubsuit + \clubsuit = 3 \times 3 + 3 = 12$ .

□

**Exercício Resolvido 2.2.** (OBMEP - 2014) Joãozinho chama um número natural maior do que 100 de **aditivado** quando seu algarismo das unidades é igual a soma dos demais algarismos. Por exemplo, 224 é aditivado, pois  $2 + 2 = 4$ .

- a) Escreva o número aditivado de quatro algarismos cujo algarismo das unidades é 1.

**Solução.** Para que o número aditivado tenha algarismo 1 é preciso que os outros algarismos sejam 1, 0 e 0. Como zeros à esquerda não contam para que tenhamos um número de 4 algarismos, esse número deve ser 1001.

□

- b) Escreva todos os números aditivados de três algarismos cujo algarismo das unidades é 6.

**Solução.** As formas de obtermos 6 como soma de 2 algarismos são:  $6+0$ ,  $5+1$ ,  $4+2$  e  $3+3$ . Dessa forma, os números aditivados que podemos obter são: 606, 516, 156, 426, 246 e 336.

□

- c) Qual é o maior número aditivado sem algarismos repetidos?

**Solução.** Para que o número seja o maior possível, o algarismo das unidades deve ser 9. Portanto, devemos encontrar a maior quantidade de algarismos que somados resultem em 9.

Começando nossa soma em 0, descobrimos que podemos somar quatro dígitos sem ultrapassar uma casa decimal  $0 + 1 + 2 + 3 = 6$ . Testando as somas que começam em 1, percebemos que a maior quantidade de dígitos é 3,  $1 + 2 + 3 = 6$ , pois  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ . Como a soma iniciada em 0 possui mais termos, sabemos que nosso número terá 5 ordens.

Como buscamos um número aditivo, precisamos encontrar os maiores 3 dígitos cuja soma resulte em 9. Devemos buscar apenas 3, pois sabemos que um deles é o 0, o elemento neutro da soma.

$$0 + \underline{\quad} + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 9$$

Como não podemos repetir algarismos, os dígitos 7 e 8 não podem estar na nossa soma, pois:

$$9 - 8 = 1 \Rightarrow 9 = 8 + 1 + 0 + 0$$

$$9 - 7 = 2 \Rightarrow 9 = 7 + 1 + 1 + 0 \text{ ou } 9 = 7 + 2 + 0 + 0$$

O próximo algarismo é o 6, e  $6 + 2 + 1 + 0 = 9$ . Não repetimos nenhum termo na soma, então os algarismos 0, 1, 2, 6 e 9 serão os dígitos do nosso número.

Para ordená-los devemos lembrar que o 9 será a unidade, pois é o resultado da soma dos outros 4 e que quanto mais a esquerda, maior o valor que o algarismo representa. Portanto, devemos posicionar nossos dígitos do maior para o menor começando da esquerda. Com isso, descobrimos que o maior número aditivado sem algarismos repetidos é 62109.

□

## 2.3 Multiplicação

A operação de **multiplicação**, sinalizada por  $\times$  ou  $\cdot$ , é utilizada quando queremos repetir uma quantidade  $n$  vezes. Se eu tenho 3 irmãos e gastarei 4 reais para comprar um doce para cada um deles, posso descobrir o valor total que irei gastar com uma conta de multiplicação.

$$3 \cdot 4,00 = 12,00 = 4,00 + 4,00 + 4,00$$

Observe, no exemplo acima, que a multiplicação é equivalente à soma de um mesmo valor  $n$  vezes. Como multiplicamos 4 por 3, o valor de  $n$  neste exemplo é 3. A multiplicação possui as propriedades comutativa, associativa e distributiva.

### Propriedade Comutativa

- $7 \cdot 4 = 28 = 4 \cdot 7$ ;
- $11 \cdot 3 = 33 = 3 \cdot 11$ .

### Propriedade Associativa

- $(4 \cdot 2) \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40$ ;
- $4 \cdot (2 \cdot 5) = 4 \cdot 10 = 40$ .

### Propriedade Distributiva

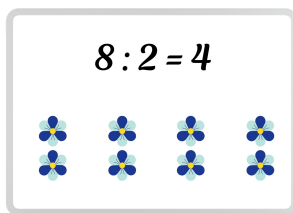
A **propriedade distributiva** é utilizada quando um número está multiplicando uma soma ou subtração. Iremos multiplicar cada parcela da subtração, ou adição, pelo valor indicado na multiplicação. Observe:

- $7 \cdot (4 + 2) = 7 \cdot 6 = 42$ ;
- $7 \cdot (4 + 2) = (7 \cdot 4) + (7 \cdot 2) = 28 + 14 = 42$ .

Neste momento, a propriedade distributiva parece não ter tanta relevância, mas ela será muito importante quando começarmos a estudar contas algébricas (aquelas que envolvem incógnitas).

## 2.4 Divisão

A divisão é a conta que utilizamos para separar uma quantidade em  $n$  partes iguais e pode ser expressa por  $\div$ ,  $:$  ou  $/$ . Quando possuímos quantidades pequenas a serem separadas em grupos, podemos facilmente ilustrar a conta para encontrarmos seu resultado.



Entretanto, quando trabalhamos com valores grandes, o **Método da Chave** é uma das maneiras mais utilizadas para a realização desta operação. Observe a divisão  $47 \div 8$ :

$$\begin{array}{r|l} 47 & 8 \\ - 40 & \\ \hline 7 & \end{array}$$

ou ainda, podemos fazer a divisão de forma direta, ocultando a subtração:

$$\begin{array}{r|l} 47 & 8 \\ 7 & 5 \end{array}$$

Além disso, cada um dos componentes de uma divisão possui nome de acordo com sua função na conta. No exemplo anterior, temos:

$$\begin{array}{rcl} \text{dividendo} \rightarrow & \mathbf{47} & \mathbf{8} \\ & \mathbf{7} & \mathbf{5} \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{divisor} \\ \leftarrow \text{quociente} \end{array}$$

- **dividendo:** 47;
- **divisor:** 8;
- **quociente:** 5;
- e **resto:** 7.

É muito importante lembrar que a conta de divisão **não possui** propriedade comutativa nem associativa. A divisão possui apenas a propriedade distributiva, observe:

$$28 \div (4 \div 2) = 28 \div 2 = 14 \quad \neq \quad (28 \div 4) \div 2 = 7 \div 2 = \frac{7}{2}$$

$$21 \div 3 = 7 \quad \neq \quad 3 \div 21 = \frac{3}{21}$$

#### Propriedade Distributiva

- $(12 + 9) \div 3 = 21 \div 3 = 7$ ;
- $(12 + 9) \div 3 = (12 \div 3) + (9 \div 3) = 4 + 3 = 7$ .

**Atenção!** Não podemos dividir nenhum valor por 0, portanto, para qualquer  $n$ , a expressão  $n \div 0$  é considerada impossível de se resolver.

### 2.4.1 Divisões não exatas

Em diversos casos, as divisões resultam em números inteiros, ou seja, podemos realizar a divisão entre o dividendo e o divisor como de costume. Para os casos em que não encontramos uma resposta inteira, teremos de utilizar a vírgula no quociente de nossa divisão.

Vamos descobrir qual o valor da divisão  $35 \div 4$ :

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ - 32 & 8 \\ \hline 3 & \end{array}$$

Ao chegarmos a um valor de resto menor que nosso divisor, podemos continuar a divisão adicionando uma vírgula ao nosso quociente. Junto a ela, devemos adicionar um 0 ao lado direito do valor do nosso resto. Podemos então continuar nossa divisão:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 4 \\ - 32 & 8,7 \\ \hline 30 & \\ - 28 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Novamente, chegamos a um número menor que nosso divisor. Entretanto, nosso quociente já tem uma vírgula. Para continuarmos nossa conta, iremos adicionar somente o 0 à direita do nosso resto:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 9 \\ - 32 & 8,75 \\ \hline 30 & \\ - 28 & \\ \hline 20 & \\ - 20 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Portanto, descobrimos que  $35 : 4$  é equivalente a  $8,75$ .

Depois dessa revisão, veja um exercício de olimpíada que requer que o aluno entenda de processos básicos de operações aritméticas:

**Exercício Resolvido 2.3.** (OBMEP - 2011) Um salão de festas comporta 700 pessoas, entre convidados e garçons. Um garçom atende no máximo a 10 convidados, e todo convidado deve ser atendido por um garçom. Qual é o número máximo de pessoas que podem ser convidadas para uma festa nesse salão?

**Solução.** Para ter a maior quantidade de convidados no salão, cada garçom deve atender o máximo de convidados possível. Dessa forma, podemos pensar em grupos de 11 pessoas: 10 convidados e 1 garçom.  $700 \div 11 = 63$ , e sobram 7 vagas no salão. Essas 7 vagas podem ser ocupadas por mais 6 convidados e um garçom, e assim aproveitaremos ao máximo o espaço. O número total de convidados é  $63 \times 10 + 6 = 636$  convidados.

□

## 2.5 Regra de sinais

Antes de continuarmos com as operações aritméticas precisamos falar sobre a regra de sinais. Você lembra que os números negativos estão sempre acompanhados de um sinal  $-$ ? A regra de sinais existe para sabermos como realizar contas como:  $57 - (-13)$  ou  $3 \cdot (-15)$ .

Lembra que, quando apresentamos os números inteiros, nos referimos a eles como o oposto dos naturais? Isso se dá pelo fato de os números negativos estarem do lado oposto dos naturais numa reta numérica com relação ao 0. Observe o exemplo com os números 2 e  $-2$ , ambos estão a uma mesma distância do 0, mas para lados opostos.



O 2 está a dois espaços do 0 para a direita da reta numérica e o  $-2$  a dois espaços para a esquerda. Por isso, podemos considerar que, ao colocarmos um sinal  $-$  em frente a um valor, estamos mudando

ele de lado na reta numérica sem interferir na sua distância com relação ao 0.

Por que isso é importante na regra de sinais? Como possuímos dois sinais possíveis para um valor (positivo e negativo), temos 4 combinações possíveis:

| 1º sinal | 2º sinal | Sinal resultante |
|----------|----------|------------------|
| -        | +        |                  |
| +        | -        |                  |
| +        | +        |                  |
| -        | -        |                  |

E podemos encontrar a coluna dos sinais resultantes olhando para a reta numérica. No 1º caso, não precisamos “mudar” de lado na reta numérica. Estamos começando com um valor negativo, e o manipulando com um valor positivo. Entretanto, sabemos que o oposto está vinculado ao sinal  $-$ , não  $+$ . Portanto, não cruzamos a origem e o sinal resultante deste caso é  $-$ .

Por sua vez, no 2º caso, começamos com um valor positivo  $a$  e passamos a origem da reta uma vez. Isto acontece, pois o 2º valor da nossa conta é negativo.



Portanto, o sinal resultante será  $-$ . No terceiro caso, não precisamos cruzar a origem nenhuma vez, então o sinal resultante será  $+$ . Por fim, no último caso, saímos de um valor  $-b$ , e cruzamos o 0 uma vez. Assim, temos:



O sinal final do 4º caso é  $+$ . Assim, nossa tabela completa é:

| 1º sinal | 2º sinal | Sinal resultante |
|----------|----------|------------------|
| -        | +        | -                |
| +        | -        | -                |
| +        | +        | +                |
| -        | -        | +                |

Agora, podemos observar como se comportam a soma de um valor negativo e a subtração de um valor negativo:

- $86 + (-13) = 86 - 13 = 73$
- $12 - (-41) = 12 + 41 = 53$
- $-7 + (-1) = -7 - 1 = -8$
- $-5 - (-9) = -5 + 9 = 4$

## 2.6 Potência

A **potênciação** é uma forma de representar a multiplicação de fatores iguais. Por exemplo, a multiplicação  $3 \cdot 3$  pode ser representada pela potência  $3^2$ . De forma geral, podemos escrever:

$$\text{base} \rightarrow a^b \leftarrow \text{expoente}$$

Nesta operação, o  $a$  é chamado de **base** e indica qual número está sendo manipulado na operação. Já o valor expresso por  $b$  é chamado de **expoente** e indica quantas vezes a base foi multiplicada por ela própria. Assim como nas frações temos nomes especiais para alguns valores de expoentes.

| Valor do expoente | Nomenclatura |
|-------------------|--------------|
| 2                 | Quadrado     |
| 3                 | Cubo         |

Para valores diferentes destes iremos ler a potência como “a elevado a  $b$ ”. A potência  $4^3$ , quatro elevado a três ou quatro ao cubo,

indica que o número 4 foi multiplicado por ele mesmo 3 vezes, então  $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ .

As potências possuem diversas propriedades, no momento, iremos aprender 6 delas. Considere valores  $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ :

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ ;
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ;
- $a^0 = 1$ ;
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ ;
- $a^1 = a$ .

## 2.7 Raiz quadrada

Por sua vez, a **raiz quadrada** é a operação que busca encontrar qual número foi multiplicado por ele próprio para chegar no valor indicado. Observe:

$$\begin{array}{ccccc} \text{índice} & \longrightarrow & b & \sqrt{\phantom{a}} & \\ & & & & \longleftarrow \text{radicando} \\ & \longrightarrow & \text{radical} & \sqrt{a} & \end{array}$$

O valor em  $a$  é chamado de **radicando** e indica o valor do qual desejamos extrair a raiz. A “casinha” em que o  $a$  se encontra é chamada de **radical**. Por fim, o valor em  $b$  é o nosso **índice** e indica o tipo da raiz que estamos extraindo. Quando não há número indicado no índice, a raiz extraída será a raiz quadrada, de índice 2.

Ao manipularmos esses valores, podemos encontrar a representação das raízes em forma de potência. Observe o exemplo:

$$b\sqrt[n]{a} = a^{\frac{n}{b}}$$

Neste curso, iremos aprender apenas sobre as raízes quadradas, ou seja, radiciações em que o valor de  $b = 2$ . Por exemplo, a operação

$\sqrt{4}$  (lemos “raiz quadrada de quatro”) indica que queremos encontrar o número que multiplicado, uma vez, por ele mesmo resulta em 4.

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4} = 2.$$

Assim como as potências, as radiciações possuem diversas propriedades. Algumas delas são:

- $\sqrt[m]{a^m} = a$
- $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$
- $\sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

---

## Exercícios de Fixação

1. Calcule o que se pede:

- |             |                   |                                  |
|-------------|-------------------|----------------------------------|
| (a) $2^3 =$ | (f) $6^2 =$       | (k) $\sqrt{16} =$                |
| (b) $3^2 =$ | (g) $(2^2)^2 =$   | (l) $\sqrt{25} =$                |
| (c) $3^3 =$ | (h) $4^2 + 6^2 =$ | (m) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{4} =$ |
| (d) $4^2 =$ | (i) $\sqrt{4} =$  | (n) $\sqrt{\sqrt{16}} =$         |
| (e) $5^2 =$ | (j) $\sqrt{9} =$  |                                  |

---

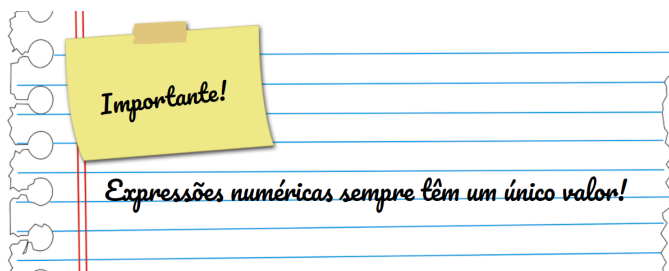
## 2.8 Expressões Numéricas

**Expressão numérica** é uma junção de números e operações aritméticas. Por exemplo, são expressões numéricas:

- $2 + 4;$
- $9 \times (5 - 7) \div 2 - 8.$
- $2 - 5 \div 3;$
- $(12 + 34) \times 5 - \frac{6}{7};$

### 2.8.1 Ordem das Operações

Na aula de Matemática, Heloísa anotou em seu caderno uma observação muito importante sobre expressões numéricas:



Quando voltou para casa, ela foi estudar e se deparou com a expressão “ $2^2 + 3 \times 5$ ”, e então pensou: “Essa expressão pode ter duas respostas diferentes!”.



Mas, lembrando da anotação que fez em seu caderno, Heloísa concluiu que apenas uma das soluções pode estar correta. Então, ela percebeu que a expressão tem três operações: um exponencial, uma soma e uma multiplicação. Também notou que obteve resultados diferentes porque resolveu as operações em **ordens** diferentes. Na solução em azul, Heloísa começou resolvendo a potência, depois fez a multiplicação e por último a soma, obtendo 19 como resultado:

$$2^2 + 3 \times 5 = 4 + 15 = 19.$$

Já na solução em verde, ela fez as operações na ordem em que aparecem. Começou pela potência, depois a soma e, por último, a multiplicação, obtendo como resultado 35:

$$2^2 + 3 \times 5 = 4 + 3 \times 5 = 7 \times 5 = 35.$$

Justamente para que isso não aconteça, seguimos uma **ordem de prioridade** na resolução das operações em uma expressão. Entre a multiplicação, a soma e a potência devemos resolver primeiro a potência, seguida da multiplicação e, por último, a soma. Então, a resposta correta da expressão é 19.

Para que a expressão resultasse em 35, a soma precisaria estar entre parênteses, indicando que ela deve ser resolvida primeiro:

$$(2^2 + 3) \times 5 = 4 + 3 \times 5 = 7 \times 5 = 35.$$

As operações possuem 4 classes de prioridade sendo que entre operações de mesma classe não existe prioridade. Por exemplo, a multiplicação e a divisão têm prioridade sobre as operações de soma e subtração, porém entre as operações de soma e subtração não há prioridade. Por isso, é estabelecido que resolvemos primeiro a operação mais à esquerda na expressão. Logo, a forma correta de resolver a expressão  $6 \div 2 \times 5$ , por exemplo, é:

$$6 \div 2 \times 5 = 3 \times 5 = 15.$$

Para evitar confusões, a forma mais adequada de se escrever expressões é utilizando sinais de pontuação. Assim, indicamos com clareza a operação prioritária. Os sinais utilizados para a escrita de expressões são:

- Parênteses ( );
- Colchetes [ ];
- Chaves { }.

Sendo que eles devem ser resolvidos na ordem apresentada. Primeiro, resolvemos as contas entre os parênteses, depois entre os colchetes, em seguida, as contas entre as chaves e, finalmente, as operações fora de qualquer um dos sinais. Veja os exemplos:

$$\bullet (6 \div 2) \times 5 = 3 \times 5 = 15 \quad \text{ou} \quad \bullet 6 \div (2 \times 5) = 6 \div 10 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

O quadro “Ordem das Operações” sintetiza a ordem de prioridade das operações.

### Ordem das Operações

1. **Operações entre chaves, colchetes e parênteses nessa ordem;**
2. **Potências ou Raízes;**
3. **Multiplicação ou Divisão;**
4. **Soma ou Subtração;**

Além disso, se aparecem na expressão, contas com mesmo grau de prioridade sem indicação de parênteses resolvemos a operação mais à esquerda primeiro.

Sabendo como expressões numéricas funcionam, podemos aprender uma propriedade muito interessante das divisões, o **Algoritmo da Divisão**.

### 2.8.2 Algoritmo da Divisão

Por meio do Algoritmo da divisão podemos escrever o número que estamos dividindo como uma expressão numérica de seus componentes. Vamos voltar ao exemplo  $47 \div 8$ .

$$\begin{array}{rcl} \text{dividendo} \rightarrow & 47 & \overline{) 8} \leftarrow \text{divisor} \\ & 7 & 5 \leftarrow \text{quociente} \end{array}$$

Podemos escrever o número como  $47 = 8 \times 5 + 7$ . Ou, de forma geral, ao dividirmos um número  $a$  por  $b$ , teremos:

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ r & q \end{array}$$

E a equação que obtemos é  $a = b \times q + r$ , em que o resto  $r$  deve ser menor que o divisor  $b$ . Ou seja:

#### Equação da Divisão

$$\text{dividendo} = \text{divisor} \times \text{quociente} + \text{resto}$$

O algoritmo da divisão se faz muito útil na resolução de atividades. Veja um exercício resolvido utilizando tal ferramenta.

**Exercício Resolvido 2.4.** Em um certo ano, Janeiro tinha exatamente quatro terças-feiras e quatro sábados. Em que dia da semana caiu o dia 1° de Janeiro?

**Solução.** Janeiro tem 31 dias. Dividindo em semanas,  $31 = 7 \cdot 4 + 3$ . Então o mês tem 4 semanas completas, e 3 dias se repetirão 5 vezes no mês. Para que esses dias não sejam sábado e nem terça, que devem aparecer exatamente 4 vezes, os dias que terão uma ocorrência a mais devem ser quarta, quinta e sexta. Fazendo um esboço do calendário, observamos que o mês deve começar em uma quarta-feira.

| D  | S  | T  | Q  | Q  | S  | S  |
|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    | 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |    |

□

### Exercícios de Fixação

1. Resolva as operações:
    - (a)  $3 + 4 \times 5 =$
    - (b)  $(3 + 4) \times 5 =$
    - (c)  $(15 \div 3) \times 4 =$
    - (d)  $15 \div (3 \times 4) =$
    - (e)  $12 - 5 + 70 \div 7 =$
    - (f)  $12 - (5 + 70 \div 7) =$
    - (g)  $(12 - 5) + (70 \div 7) =$
    - (h)  $(12 - 5 + 70) \div 7 =$
  2. Escreva a expressão obtida a partir do algoritmo da divisão para cada um dos itens:
    - (a)  $14 \div 3 :$
    - (b)  $23 \div 4 :$
    - (c)  $43 \div 7 :$
    - (d)  $48 \div 8 :$
    - (e)  $275 \div 11 :$
    - (f)  $121 \div 14 :$
- 

## 2.9 Critérios de Divisibilidade

O número 12345678910 é divisível por 5? Se você não precisou fazer a conta para concluir que sim, então já conhece o **critério de divisibilidade do 5**.

Os critérios de divisibilidade são regras que nos dizem se um número é divisível por outro sem precisarmos fazer a divisão. Essas regras podem ser **demonstradas** (ou provadas), o que quer dizer que elas vão funcionar para qualquer número que testarmos.

**Obs.:** Os critérios de divisibilidade nos dizem apenas se um número é divisível por outro, mas não nos dizem qual é o resultado da divisão. Ainda assim eles são muito úteis, por exemplo, para simplificar frações, uma vez que procuramos por um número que divida o numerador e o denominador simultaneamente.

- **Divisibilidade por 2.** Um número é divisível por 2 quando seu último algarismo é par.

**Ex.**  $1234 \rightarrow 4$ . 4 é par, então 1234 é divisível por 2.

- **Divisibilidade por 3.** Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é divisível por 3.

**Ex.**  $123 \rightarrow 1 + 2 + 3 = 6$ . 6 é divisível por 3, então 123 também é.

- **Divisibilidade por 4.** Um número é divisível por 4 quando o número formado por seus dois últimos algarismos é divisível por 4.

**Ex.**  $123456 \rightarrow 56$ . 56 é divisível por 4, então 123456 também é.

- **Divisibilidade por 5.** Um número é divisível por 5 quando seu último algarismo é 0 ou 5.

**Ex.**  $12345 \rightarrow 5$ . 12345 termina em 5, então é divisível por 5.

- **Divisibilidade por 6.** Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3, simultaneamente.

**Ex.** 123456 é divisível por 2 e por 3, então é divisível por 6.

- **Divisibilidade por 7.** Um número é divisível por 7 quando a diferença entre o número formado excluindo seu último algarismo e o dobro desse último algarismo é divisível por 7.

**Ex.**  $567 \rightarrow 56 - 2 \cdot 7 = 42$ . 42 é divisível por 7, então 567 também é.

- **Divisibilidade por 8.** Um número é divisível por 8 quando o número formado por seus três últimos algarismos é divisível por 8.

**Ex.**  $123160 \rightarrow 160$  é divisível por 8, então 123160 também é.

- **Divisibilidade por 9.** Um número é divisível por 9 quando a soma dos seus algarismos é divisível por 9.

**Ex.**  $3456 \rightarrow 3 + 4 + 5 + 6 = 18$ . 18 é divisível por 9, então 3456 também é.

Vamos testar os critérios para o número 123450:

- **Divisibilidade por 2.** O último algarismo é 0, que é par. Então 123450 é divisível por 2.
- **Divisibilidade por 3.** A soma dos algarismos é  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 0 = 15$ , que é divisível por 3. Então 123450 é divisível por 3.
- **Divisibilidade por 4.** O número formado pelos dois últimos algarismos é 50, que não é divisível por 4. Então 123450 não é divisível por 4.
- **Divisibilidade por 5.** O último algarismo é 0, então 123450 é divisível por 5.
- **Divisibilidade por 6.** 123450 é divisível por 2 e por 3, então é também divisível por 6.
- **Divisibilidade por 7.** Para que 123450 seja divisível por 7, é preciso que a diferença  $12345 - 2 \cdot 0 = 12345$  seja divisível por 7. Seguimos repetindo esse processo até encontrarmos um número menor:  $12345 \rightarrow 1234 - 2 \cdot 5 = 1224 \rightarrow 122 - 2 \cdot 4 = 114 \rightarrow 11 - 2 \cdot 4 = 3$ . 7 não divide 3, então 123450 não é divisível por 7.
- **Divisibilidade por 8.** O número formado pelos três últimos algarismos é 450, que não é divisível por 8. Então 123450 também não é divisível por 8.
- **Divisibilidade por 9.** A soma dos algarismos é 15, como calculamos acima. 15 não é divisível por 9, então 123450 também não é.

Portanto, considerando os valores entre 2 e 9, o número 123450 pode ser dividido pelos números 2, 3, 5 e 6.

**Obs.:** Note que nem sempre o critério de divisibilidade é simples. Acaba sendo mais complicado testar o critério de divisibilidade do 7, por exemplo, do que simplesmente efetuar a divisão por 7...

**Exercício Resolvido 2.5.** (OBM - 2013) Entre os números naturais de 1 até  $n$ , pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

**Solução.** Vamos encontrar que número  $n$  corresponde às descrições:

- **Entre os números naturais de 1 até  $n$ , pelo menos 11 são divisíveis por 5:** Os 11 primeiros números divisíveis por 5 são 5, 10, 15, ..., 55. Então  $n$  é maior ou igual a 55.
- **Entre os números naturais de 1 até  $n$ , no máximo 9 são divisíveis por 6:** Entre 1 e 55, os números divisíveis por 6 são: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 e 54, ou seja, existem 9 múltiplos de 6 entre 1 e 55. Para que  $n$  seja o maior possível, procuramos um número maior que 55 e que não seja divisível por 6 (caso contrário teríamos mais de 9 números divisíveis por 6 entre 1 e  $n$ ). Então o maior valor que  $n$  pode assumir é 59.

Os números divisíveis por 7 entre 1 e 59 são: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49 e 56, então existem no máximo 8 números divisíveis por 7 entre 1 e  $n$ .

□

---

### Exercícios de fixação

1. Usando os critérios de divisibilidade, descubra quais números de 2 a 9 dividem:  

|           |            |
|-----------|------------|
| (a) 812:  | (c) 9180:  |
| (b) 2520: | (d) 67890: |
2. Sabe-se que o número  $a2b$  é múltiplo de 5. Descubra todos os valores possíveis para  $a$  e  $b$ .

Sabendo de todas essas propriedades de divisão de números, podemos começar a falar de uma categoria muito importante de números: os **números primos**. Eles são aqueles números que possuem exatamente dois divisores naturais.

## 2.10 Números Primos

Um número é considerado **primo** se possui exatamente dois divisores diferentes: o 1 e ele mesmo. Por exemplo, o número 3 é primo, pois tem como divisor apenas o 1 e o 3. Já o número 6 não é primo, pois possui como divisores os números 1, 2, 3 e 6. O número 1 **não é primo** pois possui apenas um divisor: o próprio 1.

### 2.10.1 Decomposição em Fatores Primos

Os números primos têm um papel muito importante: eles formam todos os números naturais existentes! Isso porque podemos escrever todo número inteiro e positivo como a multiplicação de números primos. Por exemplo, o número 10 é a multiplicação dos números primos: 2 e 5. Obtemos essa multiplicação ao realizar a **decomposição** do número escolhido, da seguinte forma:

Como exemplo, vamos decompor o número 20. Primeiramente, escrevemos o número que queremos decompor e traçamos uma reta à direita. Do lado direito da barra, escrevemos o menor número primo que divide o número que estamos fatorando:

$$20 \mid 2$$

Abaixo do número que estamos fatorando, escrevemos o resultado da divisão desse número pelo número primo à sua direita e repetimos esse processo até que o último número obtido à esquerda seja o 1:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim terminamos a decomposição do número 20 em fatores primos, que é dada pela multiplicação dos números à direita da barra:  $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ , ou ainda,  $20 = 2^2 \cdot 5$ .

No caso dos números primos, essa decomposição tem apenas um fator: o próprio número.

### 2.10.2 Encontrando os Divisores de um Número

A decomposição em fatores primos é uma ferramenta que nos permite economizar muitas contas. Tente encontrar todos os divisores do número 20, sem utilizar a fatoração, e conte quanto tempo você leva.

Para garantir que encontrou todos os divisores desse número, você precisa testar a divisão de 20 por cada um dos números de 1 a 20. Mas podemos encontrar todos os divisores de um número a partir da sua decomposição em fatores primos da seguinte forma:

#### Divisores de um Número

Os divisores de um número são todas as combinações possíveis dos fatores da sua decomposição, além do 1. Podemos encontrar todos os divisores de um número por meio das combinações dos fatores encontrados na sua decomposição.

A decomposição do 20 é  $2 \cdot 2 \cdot 5$ . Portanto, seus divisores são:

$$1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 10 \quad 20$$

e as contas que precisamos fazer foram bem menos trabalhosas!

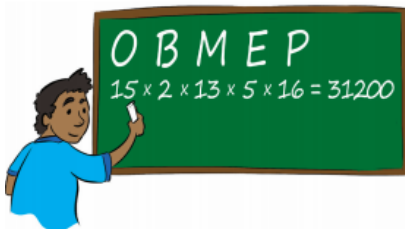
### Exercícios de Fixação

1. Encontre os números primos entre 0 e 30.
  2. Faça a decomposição em fatores primos dos seguintes números:  

|        |         |
|--------|---------|
| (a) 24 | (d) 47  |
| (b) 26 | (e) 110 |
| (c) 36 | (f) 253 |
  3. Encontre todos os divisores dos números fatorados no exercício anterior.
- 

### Exercícios Propostos

1. (OBM - 2000) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo várias trocas?
2. (OBMEP - 2013, adaptada) Cirilo associa a cada palavra um número, da seguinte maneira: ele troca cada letra por um número, usando a tabela abaixo e, em seguida, multiplica esses números.





5. (OBMEP - 2006) Cada um dos símbolos, quadrado e triângulo, representa um único algarismo. Se a multiplicação indicada a seguir está correta, então o valor de quadrado vezes triângulo é:

$$\begin{array}{r} \square \ 2 \ \square \\ \times \quad \square \\ \hline \Delta \ 6 \ \Delta \end{array}$$

6. (OBMEP - 2013) Na tabela há um número escondido na casa azul e a soma dos números da primeira linha é igual à soma dos números da segunda linha. Qual é o número escondido?

|   |   |   |   |    |    |    |    |    |      |
|---|---|---|---|----|----|----|----|----|------|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9  | 11 | 13 | 15 | 17 | 2013 |
| 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |      |

7. (OBM - 2005, adaptado) Perguntado, Arnaldo diz que 1 bilhão é o mesmo que um milhão de milhões. Professor Piraldo o corrigiu e disse que 1 bilhão é o mesmo que mil milhões. Qual é a diferença entre os valores dessas duas respostas?
8. (OBMEP - 2017) Vânia preencheu os quadradinhos da conta abaixo com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Ela usou todos os algarismos e obteve o maior resultado possível. Qual foi esse resultado?

$$\square\square\square + \square\square - \square\square\square$$

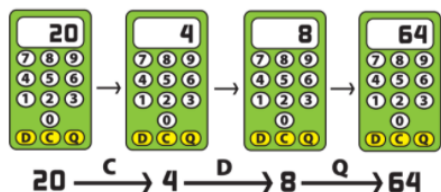
9. (OBMEP - 2005) Pedrinho escreveu todos os números inteiros compreendidos entre 100 e 999 cuja soma dos algarismos é 12. Por exemplo, os números 129 e 750 aparecem entre os números escritos.
- (a) Quantos números escritos têm apenas dois algarismos iguais?
- (b) Quantos números escritos são formados apenas por algarismos ímpares?
10. (OBM - 2013) Na multiplicação a seguir  $a, b, c$  e  $d$  são algarismos. Calcule  $b + c + d$ .

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times a3 \\ \hline 3bcd \end{array}$$

11. (OBMEP - 2010) Digamos que o peso de um número seja a soma de seus algarismos. Qual é o menor número que pesa 2 000?
12. (OBM - 2004) Qual é o maior valor da soma dos algarismos da soma dos algarismos de um número de três algarismos?
13. (OBMEP - 2012) A calculadora de Raquel é um pouco diferente. Além das 10 teclas numéricas de 0 a 9, ela só tem três teclas de operações:
- a tecla Q, que multiplica o número do visor por ele mesmo;
  - a tecla D, que multiplica o número do visor por 2;
  - a tecla C, que divide o número do visor por 5.

Raquel se diverte colocando um número inteiro no visor e produzindo novos números usando apenas as teclas de operações.

Por exemplo, começando com o número 20 e usando a sequência de teclas CDQ, Raquel obteve o número 64, como se pode ver na figura.



- (a) Raquel começou com 15 e obteve 18 apertando três teclas de operações. Qual foi a sequência de teclas que ela usou?
  - (b) Usando a sequência de teclas DCQC, Raquel obteve o número 7,2. Com qual número ela começou?
  - (c) Apresente uma maneira de Raquel obter o número 0,08 em sua calculadora, indicando o número inicial e a sequência de teclas de operações.
14. (OBM - 2017, adaptada) Na Terra dos Impas, somente os algarismos ímpares são utilizados para contar e escrever números. Assim, em vez dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,... os Impas tem os números correspondentes 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 31, 33,... (note que os números dos Impas tem somente algarismos ímpares). Por exemplo, se uma criança tem 11 anos, os Impas diriam que ela tem 31 anos.
- (a) Como os Impas escrevem o nosso numero 20?
  - (b) Numa escola desse lugar, a professora escreveu no quadro-negro a continha  $13 \times 5$ . Se você fosse um aluno Impa, o que escreveria como resultado?
  - (c) Escreva, na linguagem dos Impas, o número que na nossa representação decimal é escrito como 2017.

15. (OPM - 2006, adaptada) Para definir o código de barras de um produto, utiliza-se o seguinte esquema: multiplicamos cada dígito alternadamente por 1 e 3 e somamos os resultados, obtendo sempre um múltiplo de 10. Por exemplo, o código 4905370265546 pode ser utilizado em um produto, pois:

$$4 \times 1 + 9 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 3 \times 1 + 7 \times 3 + 0 \times 1 + 2 \times 3 + \\ 6 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 1 + 4 \times 3 + 6 \times 1 = 120.$$

Por outro lado, 4905370265564 não pode ser o código de um produto, pois

$$4 \times 1 + 9 \times 3 + 0 \times 1 + 5 \times 3 + 3 \times 1 + 7 \times 3 + 0 \times 1 + 2 \times 3 + \\ 6 \times 1 + 5 \times 3 + 5 \times 1 + 6 \times 3 + 4 \times 1 = 124.$$

Conferindo esta conta, o computador é capaz de detectar erros de digitação.

- (a) O último dígito do código de um produto é chamado dígito de verificação. O dígito de verificação que aparece na embalagem de um desodorante está ilegível. Abaixo, ele está indicado por um  $\diamond$ , qual é esse dígito?

789103304863 $\diamond$

- (b) Como você pode observar nos dois primeiros exemplos, os dois últimos dígitos trocaram de lugar. Esse é um dos erros mais comuns de digitação, a transposição. Mais precisamente, a transposição de dois dígitos consecutivos ocorre quando em vez de se digitar **ab** digita-se **ba**, onde **a** e **b** representam algarismos distintos. Sabendo disso, responda:
1. Um corretivo líquido tem código 7897254113302. Mostre que, mesmo que haja uma transposição entre os dígitos 7 e 2, obtemos um possível código de um produto. Ou seja, caso ocorra essa transposição, ela não será detectada.

2. Determine todos os pares de dígitos consecutivos distintos  $ab$  cuja transposição **ba** não é detectada pelo esquema acima em qualquer código. Observe que, pelo item anterior, 72 é um desses pares.
16. (OBMEP - 2017) Na conta armada, cada letra representa um algarismo, e letras diferentes representam algarismos diferentes. Qual é o algarismo que a letra T representa?

$$\begin{array}{r}
 \text{GOTA} \\
 \text{GOTA} \\
 \text{GOTA} \\
 \text{GOTA} \\
 + \text{GOTA} \\
 \hline
 \text{AGUA}
 \end{array}$$

17. (OBMEP - 2006) Colocando sinais de adição entre alguns dos algarismos do número 123456789 podemos obter várias somas. Por exemplo, podemos obter 279 com quatro sinais de adição:  $123 + 4 + 56 + 7 + 89 = 279$ . Quantos sinais de adição são necessários para que se obtenha assim o número 54?
18. Escreva o número 1991 usando apenas algarismos “4”. Você pode usar tantas operações de soma, subtração, multiplicação e divisão quanto forem necessárias.

A título de exemplo, o número 632 poderia ser escrito como

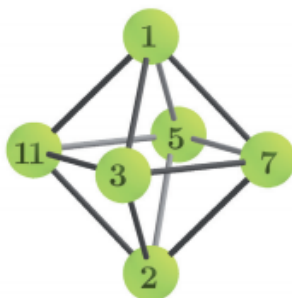
$$444 + 4 \times \left( 44 + 4 - \frac{4}{4} \right).$$

19. (OBMEP - 2013) Joãozinho derrubou suco em seu caderno e quatro algarismos da sentença que ele estava escrevendo ficaram borrados.

Quais são os valores dos algarismos borrados?

Comprei 18 livros; cada um custou  
 R\$ ~~3~~ ~~1~~ ~~1~~,93 e o total foi R\$ 3 ~~1~~ ~~2~~,7~~1~~

20. (OBMEP - 2017) Um objeto foi constituído com doze varetas iguais e seis bolinhas numeradas com 1, 2, 3, 5, 7 e 11, como na figura:



Uma formiguinha caminha pelas varetas, caminhando de bolinha em bolinha, a partir de uma bolinha inicial. Quando termina um passeio, ela multiplica todos os números das bolinhas que visitou e obtém um número para esse passeio. Por exemplo, ao final do passeio

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 1$$

ela obtém  $3 \times 1 \times 3 \times 2 \times 3 \times 11 \times 1 = 594$ .

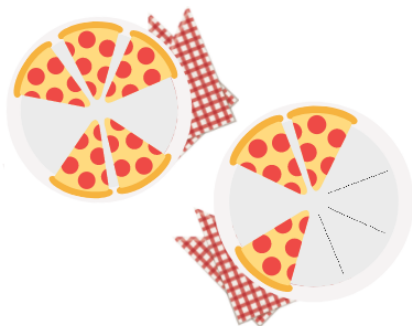
- Descreva um passeio no qual a formiguinha obtenha, ao final, o número 45.
- Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 52 ao final de um passeio.
- Explique por que a formiguinha nunca vai conseguir obter o número 40 ao final de um passeio.

- d) Quantos passeios diferentes a formiguinha pode fazer para obter, ao final, o número 30?

## Aula 3

# Fatores e Frações

As frações são números muito versáteis. Elas podem ser usadas para representar partes de um todo, números racionais, proporções, porcentagens e muito mais. Nesta aula, exploraremos os conceitos de múltiplos e divisores de números naturais para realizarmos as operações aritméticas entre valores fracionários.



### 3.1 Múltiplos e Divisores

Se uma divisão de  $a$  por  $b$  for **exata**, ou seja, não deixa resto ( $r = 0$ ), dizemos que  $a$  é **múltiplo** de  $b$  (ou  $b$  **divisível** por  $a$ ), e  $b$  é **divisor** (ou **fator**) de  $a$ .

Os **múltiplos** de um número são todos os valores que podemos encontrar em sua tabuada. Por exemplo, 5, 30 e 505 são múltiplos de 5 (ou, ainda, 5, 30 e 505 são divisíveis por 5), pois  $5 = 5 \times 1$ ,  $30 = 5 \times 6$  e  $505 = 5 \times 101$ .

Os **divisores** (ou **fatores**) de um número são todos os valores que dividem esse número sem deixar resto. Por exemplo, os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Note que um número tem uma **quantidade exata de divisores**, mas possui **infinitos múltiplos**.

### Múltiplos e Divisores

Se em uma divisão de  $a$  por  $b$  o resto  $r$  é igual a zero ( $r = 0$ ), ou seja,  $a = b \times q$ , dizemos que:

- $a$  é **múltiplo** de  $b$ ;
- $a$  é **divisível** por  $b$ ;
- $b$  **divide**  $a$ ;
- $b$  é **divisor** de  $a$ ;
- $b$  é **fator** de  $a$ ;

e essas afirmações são equivalentes.

---

## Exercícios de Fixação

1. Escreva todos os divisores positivos dos números:

- |         |          |
|---------|----------|
| (a) 24: | (d) 32:  |
| (b) 42: | (e) 35:  |
| (c) 47: | (f) 110: |

2. Escreva os 5 primeiros múltiplos dos números:

- |         |         |
|---------|---------|
| (a) 3:  | (d) 42: |
| (b) 7:  | (e) 32: |
| (c) 24: | (f) 1:  |

3. Nos itens a seguir, escreva ( V ) para verdadeiro e ( F ) para falso:

- (a) (   ) 60 é múltiplo de 12.      (g) (   ) 100 é múltiplo de 1000.  
(b) (   ) 60 divide 12.              (h) (   ) 84 é divisível por 13.  
(c) (   ) 60 é fator de 12.          (i) (   ) 11 divide 121.  
(d) (   ) 12 é múltiplo de 60.      (j) (   ) 49 é fator de 245.  
(e) (   ) 12 divide 60.              (k) (   ) 2021 divide 0.  
(f) (   ) 12 é fator de 60.          (l) (   ) 13 é fator de 69.
- 

## 3.2 Mínimo Múltiplo Comum

Os **múltiplos comuns** a dois números são os valores que aparecem simultaneamente em suas tabuadas. Por exemplo, vejamos os primeiros números da tabuada do 9 e do 15:

**Múltiplos de 9:** 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99...

**Múltiplos de 15:** 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105...

Então 45 e 90 são os dois primeiros múltiplos comuns de 9 e 15. O 45 é o **menor múltiplo comum** (abreviado por mmc) a 9 e 15, então o mmc de 9 e 15 é 45. Escrevemos essa informação da seguinte forma:  $\text{mmc}(9, 15) = 45$ .

**Lembre-se:** que se um número  $a$  é múltiplo de  $b$ , podemos também dizer que  $a$  é divisível por  $b$ . Dessa forma, também podemos dizer que o mínimo múltiplo comum de dois números é o menor número que é divisível pelos dois números.

Perceba que começamos escrevendo os primeiros múltiplos de 9 e 15, mas a lista não tem fim! Poderíamos continuar escrevendo tantos múltiplos quanto quiséssemos. Por isso, faz sentido pensarmos em um **mínimo múltiplo comum**, mas não faz sentido falarmos de um

“**máximo múltiplo comum**”, porque sempre podemos encontrar outro múltiplo maior.

Podemos também obter o mmc comparando mais do que dois números. Por exemplo, vejamos os múltiplos de 9, 15 e 30:

**Múltiplos de 9:** 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99...

**Múltiplos de 15:** 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105...

**Múltiplos de 30:** 30, 60, 90, 120, 150...

então  $\text{mmc}(9, 15, 30) = 90$ .

### Mínimo Múltiplo Comum (mmc)

- O **menor número** que é **múltiplo** dos números que estamos comparando é chamado de **Mínimo Múltiplo Comum**, ou simplesmente **mmc**.
- De forma equivalente, podemos dizer que o mmc é o **menor número** que é **divisível** pelos números que estamos comparando.

**Notação.** Se  $c$  é o mínimo múltiplo comum dos números  $a$  e  $b$ , escrevemos  $\text{mmc}(a, b) = c$ .

---

## Exercícios de Fixação

1. Escreva os múltiplos dos números abaixo, e encontre o seu mínimo múltiplo comum:

**Exemplo:**

Múltiplos de 20: 20, 40, 60, 80, 100, 120.

Múltiplos de 24: 24, 48, 72, 96, 120.

$\text{mmc}(20, 24) = 120$ .

(a) 15 e 21;

(c) 9 e 10;

(b) 16 e 28;

(d) 30 e 36.

---

### 3.2.1 MMC a Partir da Fatoração

Podemos encontrar o mmc de dois números de forma mais simples a partir da sua decomposição em fatores primos.

**Lembre-se:** que um número  $a$  é múltiplo de um número  $b$  se pudermos escrever  $a = b \times q$ , ou seja, para que  $a$  seja múltiplo de  $b$ ,  $b$  deve ser fator de  $a$ .

Veja nos exemplos a seguir como os números que estamos comparando aparecem entre os fatores do mmc:

- $\text{mmc}(2, 15) = 30$ :

$$30 = 2 \cdot 15;$$

$$30 = 15 \cdot 2.$$

- $\text{mmc}(10, 45) = 90$ :

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 9;$$

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45 \cdot 2.$$

- $\text{mmc}(10, 30) = 30$ :

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 3;$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \cdot 1.$$

Agora, para que o múltiplo encontrado seja o menor possível, não podemos ter nenhum outro fator “sobrando”. Por exemplo,  $90 = 2 \cdot 15 \cdot 3$  é um múltiplo de 2 e 15, mas não é o menor múltiplo possível, pois entre os fatores de 90 há um fator 3 sobrando.

Você poderia pensar então que para encontrar o mmc de 2 e 15 basta multiplicar os dois números, e não teríamos nenhum fator sobrando, obtendo  $\text{mmc}(2, 15) = 30$ . Mas observe que para os

números 10 e 45, se simplesmente multiplicarmos os dois números, obtemos  $10 \cdot 45 = 450$ , mas o mmc de 10 e 45 é, de fato, 90. Vamos comparar a fatoração dos números 10 e 45 para entender por que isso acontece:

- $10 = 2 \cdot 5$ ;

Então, para que o mmc de 10 e 45 tenha entre seus fatores o 10 é preciso que tenha os fatores do 10, ou seja, uma vez o fator 2 e uma vez o fator 5;

- $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$ ;

Então, para que o mmc de 10 e 45 tenha entre seus fatores o 45 é preciso que tenha os fatores do 45, ou seja, duas vezes o fator 3 e uma vez o fator 5.

No total, o mmc de 10 e 45 deve ter um fator 2, dois fatores 3 e um fator 5, ou seja,  $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$ . O fator 5 não deve se repetir, pois ambos os números fatorados precisam de apenas um desse fator. Assim, o número 450 possui um fator 5 sobrando e é um múltiplo comum de 10 e 45, mas não o menor deles.

#### De Forma Prática: calculando mmc através da fatoração

Para encontrar o mmc de dois números, devemos decompor ambos e multiplicar seus fatores. No caso de fatores que se repetem nas duas decomposições, os escrevemos apenas uma vez selecionando a **maior** potência.

Veja alguns exemplos:

- $\text{mmc}(9, 15) : 3^2 \cdot 5$

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2;$$

$$15 = 3 \cdot 5.$$

- $\text{mmc}(12, 42) : 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3;$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

- $\text{mmc}(308, 490) : 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11$

$$308 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11;$$

$$490 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

---

### Exercícios de Fixação

Encontre o mínimo múltiplo comum dos números a seguir usando a decomposição em fatores primos:

1.  $\text{mmc}(15, 21) =$

3.  $\text{mmc}(9, 10) =$

2.  $\text{mmc}(16, 28) =$

4.  $\text{mmc}(30, 36) =$

---

## 3.3 Máximo Divisor Comum

Os **divisores comuns** a dois números são os números que dividem os dois números que estamos comparando simultaneamente. Por exemplo, vejamos quais são os divisores comuns de 9 e 15:

**Divisores de 9:**  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{3}$ , 9.

**Divisores de 15:**  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{3}$ , 5, 15.

Então os divisores comuns de 9 e 15 são 1 e 3. O 3 é o **maior divisor comum** (abreviado por mdc) de 9 e 15, então o mdc de 9 e 15 é 3. Escrevemos da seguinte forma:  $\text{mdc}(9, 15) = 3$ .

**Lembre-se:** se um número  $a$  é divisor de  $b$ , podemos dizer que  $a$  é **fator** de  $b$ . Dessa forma, também podemos dizer que o máximo divisor comum de dois números é seu maior fator comum.

**Obs.:** Note que fatores não precisam ser necessariamente números primos. Por exemplo, 3 e 15 são fatores do número 30, mas apenas o 3 é um número primo.

Veja que os divisores de um número são uma quantidade finita de números, ou seja, podemos listar todos os divisores de um número. Então, podemos listar todos os divisores comuns de dois números. Dessa forma, não faria sentido falarmos de um “mínimo divisor comum” porque o 1 é divisor de qualquer número inteiro.

Podemos também obter o mdc da comparação de mais que dois números. Por exemplo, vejamos os divisores de 9, 15 e 30:

**Divisores de 9:**  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{3}$ , 9.

**Divisores de 15:**  $\boxed{1}$ ,  $\boxed{3}$ , 5, 15.

**Divisores de 30:**  $\boxed{1}$ , 2,  $\boxed{3}$ , 5, 6, 10, 15, 30.

então  $\text{mdc}(9, 15, 30) = 3$ .

### Máximo Divisor Comum

- O **Máximo Divisor Comum**, ou **mdc**, é o **maior número** que **divide** os números que estamos comparando.
- De forma equivalente, podemos dizer que o mdc é o **maior número** que é **fator** dos números comparados.

**Notação.** Se  $c$  é o máximo divisor comum dos números  $a$  e  $b$  escrevemos  $\text{mdc}(a, b) = c$ .

---

## Exercícios de Fixação

1. Escreva os divisores dos números abaixo, e encontre o seu máximo divisor comum:

**Ex.:** Divisores de 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20.

Divisores de 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

$$\text{mdc}(20, 24) = 4.$$

(a) 15 e 21;

(c) 9 e 10;

(b) 16 e 28;

(d) 30 e 36.

---

### 3.3.1 MDC a Partir da Fatoração

Também é possível encontrar o mdc de dois números a partir da sua decomposição em números primos.

**Lembre-se:** que um número  $b$  é **divisor** de um número  $a$  se  $a$  pode ser escrito por  $a = b \times q$ , ou seja, para que  $b$  seja divisor de  $a$ ,  $b$  deve ser fator de  $a$ .

Veja nos exemplos a seguir como o mdc aparece entre os fatores dos números que estamos comparando:

- $\text{mdc}(2, 15) = 1$ :

$$2 = 1 \cdot 2;$$

$$15 = 3 \cdot 5 = 1 \cdot 15.$$

- $\text{mmc}(10, 45) = 5$ :

$$10 = 5 \cdot 2;$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 9.$$

- $\text{mmc}(10, 30) = 10$ :

$$10 = 2 \cdot 5 = 10 \cdot 1;$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 3.$$

Então, no mdc de dois números devemos ter os fatores comuns aos dois números, e para que o divisor encontrado seja o maior possível, devemos pegar todos os fatores comuns aos dois números.

**De Forma Prática: calculando mdc através da fatoração**

Para encontrar o mdc de dois números, devemos decompor os números escolhidos e multiplicar os fatores comuns em suas decomposições. No caso de fatores que aparecem nas duas decomposições, utilizamos a menor potência.

Veja alguns exemplos:

- $mdc(9, 15) : 3$

$$9 = 3 \cdot 3 = 3^2;$$

$$15 = 3 \cdot 5.$$

- $mdc(12, 42) : 2 \cdot 3 = 6$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3;$$

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7;$$

- $mdc(308, 490) : 2 \cdot 7 = 14$

$$308 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11;$$

$$490 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2;$$

---

### Exercícios de Fixação

1. Encontre o máximo divisor comum dos números a seguir usando a decomposição em fatores primos:

(a)  $mdc(15, 21) =$

(c)  $mdc(9, 10) =$

(b)  $mdc(16, 28) =$

(d)  $mdc(30, 36) =$

---

**Exercício Resolvido 3.1.** Uma indústria de tecidos fabrica retalhos de mesmo comprimento. Após realizarem os cortes necessários, verificou-se que as duas peças restantes mediam 156 cm e 234 cm. O gerente de produção, ao ser informado das medidas, deu a ordem para que o funcionário cortasse o pano em partes iguais e de maior comprimento possível. Que tamanho devem ter os cortes?

**Solução.** O funcionário deve cortar as duas peças em pedaços do maior tamanho possível, sem deixar restos, e de forma que os pedaços das duas peças sejam iguais. Note que queremos encontrar o maior divisor comum das duas peças. Assim, fatorando o 156 e o 234, obtemos:

$$\begin{aligned}156 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 13 & 234 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 13 \\ \Rightarrow \text{mdc}(156, 234) &= 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78.\end{aligned}$$

Logo, o funcionário deve cortar as duas peças em pedaços de 78 cm de comprimento.

□

### 3.4 Mais Alguns Critérios de Divisibilidade

Na aula passada estudamos os **Critérios de Divisibilidade** pelos números de 2 a 9. Agora, podemos ampliar esse estudo com auxílio das propriedades que acabamos de aprender.

Sabemos que um número  $b$  divide  $a$  se  $b$  é fator de  $a$ , ou, de forma equivalente,  $a$  é divisível por  $b$  se  $b$  for um fator de  $a$ . Então, a partir da fatoração de um número, podemos saber se ele é divisível por outro sem precisarmos efetuar a divisão. Por exemplo, o número 5775 é divisível por 15? Fatorando 5775 temos:

$$5775 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 15 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11;$$

então 15 é fator de 5775 e, por tanto, 5775 é divisível por 15.

Perceba que no exemplo anterior, encontramos o fator 15 entre os fatores de 5775 encontrando os fatores 3 e 5 (ou seja, os fatores de 15). Dessa forma, dizer que 5775 é divisível por 15 é o mesmo que dizer que 5775 tem como fatores os números 3 e 5, ou seja, que 5775 é divisível por 3 e por 5.

Então outra forma de saber se um número  $a$  é divisível por  $b$  é descobrindo se os fatores de  $b$  dividem  $a$  simultaneamente. Vejamos alguns exemplos:

1. 1080 é divisível por 15?

- Os fatores de 15 são  $3 \cdot 5$ ;
- Pelo critério de divisibilidade do 3, 1080 é divisível por 3;
- Pelo critério de divisibilidade do 5, 1080 é divisível por 5;

Verificamos que 1080 é divisível pelos fatores de 15, então 1080 é divisível por 15.

2. 882 é divisível por 15?

- Os fatores de 15 são  $3 \cdot 5$ ;
- Pelo critério de divisibilidade do 3, 882 é divisível por 3;
- Pelo critério de divisibilidade do 5, 882 não é divisível por 5;

Verificamos que 882 não é divisível por todos os fatores de 15, então 882 não é divisível por 15.

3. 462 é divisível por 33?

- Os fatores de 33 são  $3 \cdot 11$ ;
- Pelo critério de divisibilidade do 3, 462 é divisível por 3;
- Como não sabemos o critério de divisibilidade do 11, podemos simplesmente fazer a divisão  $462 \div 11$ . Após efetuarmos a conta, sabemos que 462 é divisível por 11.

Verificamos que 462 é divisível pelos fatores de 33, então 462 é divisível por 33.

4. 460 é divisível por 20?

- Os fatores de 20 são  $2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$ ;
- Perceba que o fator 2 aparece duas vezes, então para que 460 seja divisível por 20, precisa ser divisível por 2 duas vezes, o que é equivalente a ser divisível por  $2 \cdot 2 = 4$ .

- Pelo critério de divisibilidade do 4, 460 é divisível por 4;
- Pelo critério de divisibilidade do 5, 460 é divisível por 5;

Verificamos que 460 é divisível pelos fatores de 20, então 460 é divisível por 20.

#### De Forma Prática: divisibilidade de $a$ por $b$

Um número  $a$  é divisível por  $b$  se for divisível por todos os fatores de  $b$  simultaneamente. Então para saber se  $a$  é divisível por  $b$ :

1. decompomos o número  $b$  em fatores primos;
2. para cada fator primo, tomamos o número com sua maior potência;
3. testamos os critérios de divisibilidade de cada fator encontrado;
4. se um dos fatores não tem critério de divisibilidade, podemos simplesmente dividir  $a$  por esse fator.

Além disso, se algum fator de  $a$  é divisível por  $b$  (ou por algum fator de  $b$ ), então  $a$  também é divisível por  $b$  (ou por esse fator).

---

### Exercícios de Fixação

1. 825 é divisível por 15?
2. 825 é divisível por 20?
3. 4920 é divisível por 40?
4. 1234560 é divisível por 210?

**Exercício Resolvido 3.2.** O número de cinco dígitos  $a202b$  é múltiplo de 90. Determine o valor dos dígitos  $a$  e  $b$ .

**Solução.** Para que o número  $a202b$  seja múltiplo de 90, é preciso que ele seja divisível por todos os fatores de 90 simultaneamente. Dessa forma, decompondo 90 temos  $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 9 \cdot 5$ . Então,  $a202b$  deve ser divisível por 2, 5 e 9.

Pelo critério de divisibilidade do 2,  $b$  deve ser um número par. Já pelo critério do 5,  $b$  é igual a 0 ou 5. Logo,  $b = 0$ .

Agora, para que  $a2020$  seja divisível por 9, a soma  $a+2+0+2+0 = a+4$  deve ser divisível por 9. Mas  $a$  é um dígito, então só pode assumir os valores de 0 a 9. Então  $a = 5$ .

□

**Exercício Resolvido 3.3.** O número  $2014 \times 2015 \times 2016 \times 2017 \times 2018 \times 2019 \times 2020 \times 2021$  é divisível por 210?

**Solução.** Para que o resultado da multiplicação  $2014 \times 2015 \times 2016 \times 2017 \times 2018 \times 2019 \times 2020 \times 2021$  seja divisível por 210 basta verificarmos se os fatores de 210 estão na multiplicação. Decompondo o 210 temos  $210 = 2^1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ . Então precisamos encontrar na multiplicação os fatores 3, 4, 5 e 7, ou seja, queremos encontrar entre os fatores multiplicados números divisíveis por 3, 4, 5 e 7.

- Pelo critério de divisibilidade do 3, 2019 é divisível por 3;
- Pelo critério de divisibilidade do 4, 2016 é divisível por 4;
- Pelo critério de divisibilidade do 5, 2020 é divisível por 5;
- Pelo critério de divisibilidade do 7, 2016 é divisível por 7;

então  $2014 \times 2015 \times 2016 \times 2017 \times 2018 \times 2019 \times 2020 \times 2021$  é divisível por 210.

□

## 3.5 Operações Aritméticas com Frações

### 3.5.1 Frações Irredutíveis

Quando encontramos uma fração equivalente dividindo o numerador e o denominador, estamos **simplificando** a fração. Por exemplo, simplificando  $\frac{16}{32}$ :

$$\frac{16}{32} \overset{\div 2}{=} \frac{8}{16}.$$

Esse processo é utilizado para encontrar **frações irredutíveis**, ou seja, frações em que não é possível dividir simultaneamente o numerador e denominador pelo mesmo número sem deixar resto. Essas frações são chamadas de **forma reduzida** da fração. A forma irredutível das frações  $\frac{16}{32}$  e  $\frac{8}{16}$  é:

$$\frac{8}{16} \overset{\div 8}{=} \frac{1}{2}.$$

Procuramos sempre simplificar as frações até que se tornem irredutíveis para que as contas feitas com elas sejam mais simples.

---

### Exercícios de Fixação

1. Simplifique as frações até a sua forma irredutível:

(a)  $\frac{8}{24} =$

(d)  $\frac{54}{18} =$

(b)  $\frac{28}{14} =$

(e)  $\frac{77}{242} =$

(c)  $\frac{52}{39} =$

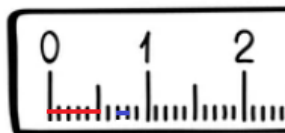
(f)  $\frac{55}{35} =$

### 3.5.2 Soma e Subtração

Para aplicarmos as operações de soma e subtração em quantidades fracionárias da maneira correta, precisamos entender que existem duas situações distintas que podemos encontrar.



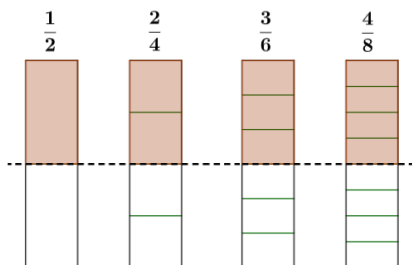
Considerando a nossa unidade de medida (u.m.) padrão como os centímetros, podemos contar cada um dos tracinhos pequenos da régua e descobrir que eles dividem nossa u.m. em 10 pedaços iguais. Então, representaremos a distância entre cada um desses pedacinhos como  $\frac{1}{10}$  de centímetro. Em particular, o traço que coincide com o ponto médio da u.m. é representado por  $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$  cm.



Tendo encontrado essas frações, a primeira situação com a qual nos deparamos é a soma e subtração de frações de mesmo denominador. Como todos os espacinhos representados por  $\frac{1}{10}$  possuem o mesmo tamanho e, conseqüentemente, mesmo denominador, podemos somá-los diretamente. Entretanto, ao observarmos o pedaço representado por  $\frac{1}{2}$ , percebemos que ele é maior que os representados por  $\frac{1}{10}$ . Nesse caso, teremos a soma e subtração de frações com denominadores diferentes e, por esse motivo, precisaremos manipular nossas frações para encontrarmos frações equivalentes a elas com mesmo denominador. Assim encontraremos valores que se enquadram no primeiro caso de soma e subtração apresentados.



Graficamente, estamos redividindo um mesmo inteiro em quantidades diferentes:



Esse é o princípio do método que iremos aprender! A soma e subtração de frações com denominadores diferentes é feita por meio da divisão conveniente de nossos inteiros. Ao nos depararmos com essas situações, iremos usar o mmc de seus denominadores para encontrarmos frações pertencentes à “tabuada” das frações originais.

O primeiro passo dessa transformação é encontrar o mmc dos denominadores originais, esse valor será o **denominador** das nossas novas frações. E os novos **numeradores**? Como vimos nas imagens anteriores, para encontrarmos frações equivalentes, devemos multiplicar ambas as partes da fração pelo mesmo número. Para isso acontecer, ao encontrarmos nosso mmc iremos dividi-lo pelos denominadores das frações iniciais para descobrimos por quantas vezes o denominador inicial foi multiplicado para chegar ao valor do mmc. O resultado da divisão entre o mmc e os denominadores deverá então ser multiplicado pelos respectivos numeradores. Veja alguns exemplos:

- $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ :

O mmc dos denominadores é  $\text{mmc}(4, 6) = 12$ . As frações equivalentes são:

- $\frac{3}{4} \rightarrow \frac{(12 \div 4) \times 3}{12} = \frac{9}{12}$ .

Então a fração equivalente a  $\frac{3}{4}$  que obtemos é  $\frac{9}{12}$ .

$$\circ \frac{1}{6} \rightarrow \frac{(12 \div 6) \times 1}{12} = \frac{2}{12}.$$

Então a fração equivalente a  $\frac{1}{6}$  que obtemos é  $\frac{2}{12}$ .

Assim, resolvendo a subtração, teremos:

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12}.$$

$$\bullet \frac{4}{5} - \frac{1}{6} + \frac{3}{10}:$$

O mmc dos denominadores é  $\text{mmc}(5, 6, 10) = 30$ . As frações equivalentes são:

$$\circ \frac{4}{5} \rightarrow \frac{(30 \div 5) \times 4}{30} = \frac{24}{30}.$$

$$\circ \frac{1}{6} \rightarrow \frac{(30 \div 6) \times 1}{30} = \frac{5}{30}.$$

$$\circ \frac{3}{10} \rightarrow \frac{(30 \div 10) \times 3}{30} = \frac{9}{30}.$$

Assim, resolvendo a expressão, teremos:

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{6} + \frac{3}{10} = \frac{24}{30} - \frac{5}{30} + \frac{9}{30} = \frac{24-5+9}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}.$$

---

## Exercícios de Fixação

1. Resolva as operações e simplifique até a forma irredutível:

(a)  $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} =$

(c)  $\frac{23}{7} + \frac{11}{11} =$

(d)  $\frac{27}{9} - \frac{18}{9} =$

(e)  $\frac{7}{3} - \frac{4}{5} =$

(b)  $\frac{3}{24} + \frac{20}{24} - \frac{2}{24} =$

(f)  $\frac{9}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$ 

---

### 3.5.3 Multiplicação

A multiplicação de frações será feita da mesma forma, sem depender da igualdade dos denominadores. Para multiplicar duas frações, multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador:

$$\bullet \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{4}{15};$$

$$\bullet \quad \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5 \cdot 1}{9 \cdot 7} = \frac{5}{63}.$$

Se vamos multiplicar frações que não estão na sua forma irredutível, iremos simplificá-las antes de fazer a multiplicação para que as contas fiquem mais simples:

$$\bullet \quad \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{15}.$$

Também podemos fazer uma simplificação entre o numerador de uma fração e o denominador de outra:

$$\bullet \quad \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{3}{25}.$$

**Lembre-se:** para esse segundo caso, devemos sempre usar o denominador de uma das frações e o numerador de outra, NÃO podemos simplificar dois numeradores ou dois denominadores.

### 3.5.4 Divisão

Assim como no caso das multiplicações, para aplicar a divisão entre frações não precisamos garantir a igualdade de seus denominadores. Entretanto, para podermos realizar essa operação precisaremos encontrar o **inverso multiplicativo** de uma das frações que pretendemos utilizar. Mas o que é isso?

O inverso multiplicativo de um número é dado pelo valor que multiplicado por nosso número resulta em 1. Ele pode ser denotado como  $a^{-1}$ .

$$\bullet \quad 17^{-1} = \frac{1}{17};$$

$$\bullet \quad 17 \times \frac{1}{17} = 1;$$

$$\bullet \quad \left(\frac{1}{145}\right)^{-1} = 145;$$

$$\bullet \quad 145 \times \frac{1}{145} = 1;$$

$$\bullet \quad \left(\frac{1}{68}\right)^{-1} = 68;$$

$$\bullet \quad \frac{1}{68} \times 68 = 1.$$

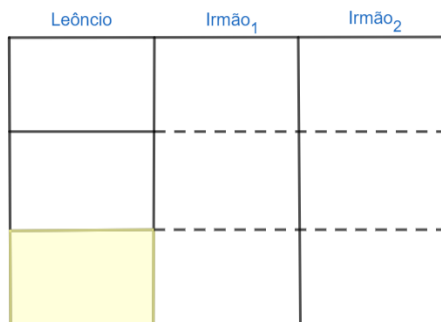
Em especial, os inversos multiplicativos de frações são dados pela fração que possui os valores do numerador e do denominador invertidos. Por exemplo, o inverso da fração  $\frac{2}{5}$  é  $\frac{5}{2}$ , e o inverso de  $\frac{1}{9}$  é  $\frac{9}{1} = 9$ .

Para entendermos a aplicação do inverso multiplicativo na divisão de frações, preste atenção a este problema:

Seu Lobato deixou o terreno de sua fazenda com herança para seus três filhos. Leôncio, o filho mais velho, resolveu dividir seu terreno em 3 partes iguais e usar uma delas para plantar milho. Como fazemos para descobrir qual a fração da área total em que o milho foi plantado?

Sabemos que o terreno de Leôncio está dividido em 3 partes iguais, entretanto, não temos ideia do que foi feito nas partes dos

outros dois irmãos. Por isso, as partes dos outros herdeiros foram divididas por linhas tracejadas.



Leônicio dividiu seu terço do terreno, em mais 3 pedaços. Por isso, podemos descrever a parte plantada com milho por:

$$\frac{1}{3} \div 3 = \frac{1}{9}.$$

Note que outra maneira de escrevermos essa mesma conta é:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Portanto, para dividirmos uma fração por um número qualquer, basta multiplicá-la pelo inverso desse número. Especificamente, digamos que que, para dividir duas frações, multiplicamos a primeira pelo **inverso da segunda**. Veja alguns exemplos:

- $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{2 \times 4} = \frac{1}{8};$
- $\frac{3}{6} \div 5 = \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{3 \times 1}{6 \times 5} = \frac{3}{30};$
- $\frac{5}{7} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{5 \times 4}{7 \times 3} = \frac{20}{21};$

$$\bullet \quad \frac{3}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 4} = \frac{9}{28}.$$

---

### Exercícios de Fixação

1. Resolva as multiplicações de frações. Faça as simplificações possíveis antes de multiplicar.

(a)  $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} =$

(d)  $\frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{3}{5} =$

(b)  $\frac{2}{6} \cdot \frac{15}{5} =$

(e)  $\frac{4}{6} \cdot \frac{13}{26} \cdot \frac{3}{2} =$

(c)  $\frac{11}{33} \cdot \frac{22}{26} =$

2. Resolva as divisões e simplifique as frações:

(a)  $\frac{4}{5} \div \frac{5}{7} =$

(c)  $\frac{25}{36} \div \frac{4}{15} =$

(d)  $\frac{6}{7} \cdot \frac{12}{5} =$

(e)  $\frac{121}{5} \div \frac{121}{5} =$

(b)  $\frac{21}{39} \div \frac{21}{24} =$

3. Resolva as expressões numéricas:

(a)  $\left(\frac{8}{9} - \frac{5}{18}\right) \cdot \frac{2}{3} =$

(b)  $\frac{4}{5} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} =$

$$(c) \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) \div \frac{2}{3} =$$

$$(d) \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{3}{5} \div \frac{1}{5} \right) =$$

$$(e) \frac{5}{7} - \frac{3}{7} \div \frac{9}{7} =$$

$$(f) \frac{3}{7} \div \frac{6}{5} + \frac{7}{5} =$$

---

### 3.5.5 Potência e raiz de frações

Agora que sabemos manipular melhor nossas frações, iremos adicionar novas propriedades às operações de potenciação e radiciação.

Considerando  $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$ , temos:

$$\bullet \quad {}^m\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{{}^m\sqrt{a}}{{}^m\sqrt{b}}$$

$$\bullet \quad \left( \frac{a}{b} \right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

---

### Exercícios de Fixação

1. Resolva as expressões abaixo:

$$(a) \sqrt{\frac{36}{16}} + 5 =$$

$$(b) \left( \frac{2}{3} \right)^3 + \left( \frac{7}{5} \right)^2 =$$

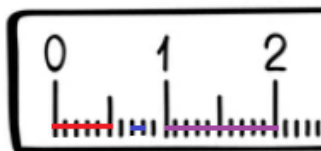
$$(c) \sqrt{\frac{2^2}{4}} + \left( \frac{6}{7} \right)^2 =$$

$$(d) \sqrt{\frac{2^6}{4^4}} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 =$$


---

### 3.5.6 Transformando Frações em Decimais

Vamos voltar ao primeiro exemplo dessa aula. Ao observarmos nossa régua, percebemos que cada uma das marcações pequenas equivale a  $\frac{1}{10}$  de centímetro, as médias a  $\frac{1}{2}$  cm e as marcações grandes a 1 centímetro.



Mas como podemos expressar esses valores se não em frações? Simples, iremos dividir nossos numeradores pelos denominadores. Nesse momento, podemos separar nossas frações em dois grupos. As que representam números inteiros e as que representam números racionais.

Para sabermos se uma fração representa um número inteiro ou não, basta descobrir se o **numerador** é múltiplo do **denominador**. Para isso, precisamos decompor nosso numerador em primos e descobrir se o denominador é um de seus divisores. Veja os exemplos:

- $\frac{35}{4}$ :

Começamos decompondo o numerador 35 em primos:

$$35 = 5 \cdot 7.$$

Os únicos divisores de 35 são: 1, 5, 7 e 35. Então, essa fração não resulta em um número inteiro, pois 4 não é divisor de 35.

- $\frac{144}{8}$ :

Começamos decompondo 144 em primos:

$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$$

Por meio dessa decomposição, sabemos que 8 é divisor de 144, pois  $2^3 = 8$ . Portanto, a fração  $\frac{144}{8}$  resulta em um inteiro.

- $\frac{429}{6}$ :

Começamos decompondo 429 em primos:

$$429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$$

Dessa forma, sabemos que 6 não é divisor de 429. Portanto, a fração  $\frac{429}{6}$  não resulta em um valor inteiro.

---

### Exercícios de Fixação

1. Descubra se as frações representam números inteiros ou racionais sem fazer a divisão entre o numerador e o denominador.

(a)  $\frac{12}{5} =$

(c)  $\frac{3}{6} =$

(b)  $\frac{104}{8} =$

(d)  $\frac{147}{7} =$

2. Represente os valores das frações abaixo em forma decimal:

(a)  $\frac{15}{8} =$

(d)  $\frac{3}{4} =$

(b)  $\frac{12}{5} =$

(e)  $\frac{7}{2} =$

(c)  $\frac{4}{16} =$

(f)  $\frac{42}{11} =$

3. (OBMEP - 2010) Qual é a ordem crescente correta das frações  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{4}{6}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{6}{5}$  e  $\frac{2}{5}$ ?
- 

### 3.5.7 Transformando Decimais em Frações

Por outro lado, às vezes, precisamos transformar números decimais em frações. Para essa manipulação, precisamos lembrar do funcionamento das **expressões numéricas**. Quando temos uma expressão com valores em ambos os lados do sinal de igualdade, precisamos manipulá-la sempre de maneira equalitária. Isto é, toda conta que for feita de um lado do sinal de igualdade deve ser feita da mesma maneira do lado oposto. Por exemplo:

$$5 + 3 = 2 + 6 \Rightarrow 5 + 3 - 2 = 2 + 6 - 2 \Rightarrow 5 + 1 = 2 + 4$$

Para transformar números decimais em frações, utilizaremos a mesma lógica. Iremos multiplicar o numerador e o denominador da nossa representação fracionária por 10 quantas vezes forem necessárias para que nosso número deixe de ter vírgula. Vejamos alguns exemplos:

- 5,4:

Sabemos que  $5,4 = \frac{5,4}{1}$ . Portanto, iremos multiplicar essa fração por 10 em ambos os membros:

$$\frac{5,4}{1} \times \frac{10}{10} = \frac{5,4 \times 10}{1 \times 10} = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$$

Descobrimos que a fração irredutível equivalente a 5,4 é  $\frac{27}{5}$ .

- 12,38:

Sabemos que  $12,38 = \frac{12,38}{1}$ . Portanto, iremos multiplicar essa fração por 10 em ambos os membros:

$$\frac{12,38}{1} \times \frac{10}{10} = \frac{12,38 \times 10}{1 \times 10} = \frac{123,8}{10}$$

Como nossa fração ainda possui um número com vírgula no seu numerador, iremos multiplicá-la por 10 novamente:

$$\frac{123,8}{10} \times \frac{10}{10} = \frac{123,8 \times 10}{10 \times 10} = \frac{1238}{100} = \frac{619}{50}$$

Portanto, a fração irredutível equivalente a 12,38 é  $\frac{619}{50}$ .

- 4,950:

Sabemos que  $4,950 = \frac{4,950}{1}$  e que esse é um número com 3 casas decimais. Portanto, pelos exemplos passados, podemos concluir que teremos que multiplicá-lo por 10 três vezes. Ou, então, podemos multiplicá-lo uma vez por 1000.

$$\frac{4,950}{1} \times \frac{1000}{1000} = \frac{4,950 \times 1000}{1 \times 1000} = \frac{4950}{1000} = \frac{2475}{500} = \frac{495}{100} = \frac{99}{20}.$$

Portanto, a fração irredutível equivalente a 4,950 é  $\frac{99}{20}$ .

---

### Exercícios de Fixação

1. Represente os valores abaixo em forma de frações irredutíveis.

(a)  $1,5 =$

(d)  $5,6 =$

(b)  $12,4 =$

(e)  $7,12 =$

(c)  $1,20 =$

(f)  $2,460 =$

**Exercícios Propostos**

1. (OBMEP - 2012) A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é 0,48. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma?

(a) 24      (b) 37      (c) 40      (d) 45      (e) 48

2. (OBM - 2014) Numa classe do sexto ano, a professora sabe que todo grupo que montar com 13 alunos terá pelo menos uma menina e todo grupo que formar com 21 alunos terá pelo menos um menino. Sendo o número de alunos desta classe o maior possível, qual é a razão entre o número de meninos e o número de meninas desta classe?

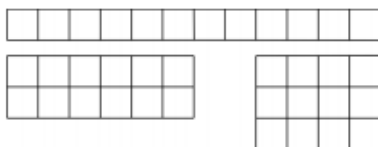
(a) 13:21      (b) 13:34      (c) 3:5      (d) 3:8      (e) 1:2

3. (OBMEP - 2005) A capacidade do tanque de gasolina do carro de João é de 50 litros. As figuras mostram o medidor de gasolina do carro no momento de partida e no momento de chegada de uma viagem feita por João. Quantos litros de gasolina João gastou nesta viagem?



4. (OBMEP - 2010) Qual é o valor de  $1 + \frac{1}{1 - \frac{2}{3}}$ ?

5. (OBMEP - 2018) Senhor Namm assou 252 biscoitos, senhora Clancy assou 105 biscoitos e senhor Palavas assou 168 biscoitos. Cada um deles colocou os biscoitos em pacotes com o mesmo número de biscoitos. Qual é o maior número de biscoitos que um pacote poderia ter?
6. (OBMEP - 2008) A figura mostra os três retângulos diferentes que podem ser construídos com 12 quadradinhos iguais.



Quantos retângulos diferentes podem ser construídos com 60 quadradinhos iguais?

- (a) 3                      (b) 4                      (c) 5                      (d) 6                      (e) 7
7. (OBMEP) Um sapo salta sobre uma régua numerada em centímetros. Ele inicia no ponto zero e salta de 6 em 6 centímetros. Entre 100 cm e 200 cm, em quantos números ele pisa?
8. (OBMEP - 2007) O produto de dois números de dois algarismos cada um é 1728. Se o máximo divisor comum (mdc) deles é 12, quais são esses números?
9. O MMC de 12, 15, 20 e  $k$  é 420. Qual é o menor valor possível de  $k$ ?
10. O elevador de um prédio que vai do térreo ao 20º andar (sendo o térreo o andar 0) tem dois botões. O elevador sobe 13 andares quando se aperta o primeiro botão e desce 9 andares quando se aperta o segundo (um botão não funciona se não existirem andares suficientes para subir ou descer). Partindo

do 16<sup>o</sup> andar, quantos andares do prédio **não** é possível acessar através do elevador?



11. (OBMEP - 2010) Qual é o valor do produto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) ?$$

12. (OBMEP - 2018) Uma máquina maluca transforma duas frutas em uma fruta, da seguinte maneira:

- Transforma duas maçãs em uma laranja;
- Transforma duas laranjas em uma laranja;
- Transforma uma maçã e uma laranja em uma maçã.

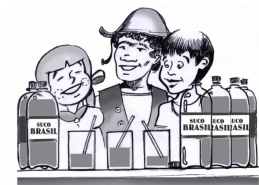


- (a) Quantas vezes a máquina deve ser usada para transformar três maçãs em uma maçã?
- (b) Explique como usar essa máquina algumas vezes para transformar três maçãs e quatro laranjas em uma maçã.

- (c) Começando com 2018 laranjas e 517 maçãs, a máquina foi usada repetidamente até sobrar apenas uma fruta. Explique por que essa fruta só pode ser uma maçã.
13. (OBMEP - 2020) Uma escola com 862 alunos participará de uma gincana, cujas regras são:
- O número de inscritos tem que ser um número entre  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{7}{9}$  do total de alunos da escola;
  - Como os alunos serão divididos em grupos com 11 alunos, o número de inscritos deverá ser múltiplo de 11.

Quantas são as possíveis quantidades de inscritos desta escola?

14. (OBMEP - 2006) Diadorim, Mimita e Riobaldo dividiram todo o conteúdo de uma garrafa de suco em três copos iguais, enchendo metade do copo de Diadorim, um terço do copo de Mimita e um quarto do copo de Riobaldo.
- Como cada um queria um copo cheio de suco, eles abriram outras garrafas iguais a primeira até encher completamente os copos. Quantas garrafas a mais eles tiveram que abrir?
  - Se o suco de uma garrafa tivesse sido dividido igualmente entre eles, que fração de cada copo conteria suco?



15. (OBM - 2011) Dizemos que dois ou mais números são irmãos quando têm exatamente os mesmos fatores primos. Por exemplo, os números  $10 = 2 \times 5$  e  $20 = 2^2 \times 5$  são irmãos, pois têm 2 e 5 como seus únicos fatores primos. O número 60 tem quantos irmãos menores do que 1000?
16. Na Krugerrândia, a empresa responsável pelo transporte urbano em ônibus oferece dois tipos de passe: Múltiplo de 2 e Múltiplo de 4. Em ambos os casos, o passageiro recebe um único passe, no qual está impresso o tipo. O controle da quantidade de viagens realizadas é feito eletronicamente, e o passe fica retido pela máquina ao término das viagens permitidas. O passe Múltiplo de 2 custa Kr\$3,10 e dá direito a duas viagens quaisquer e o Múltiplo de 4 custa Kr\$5,90 e dá direito a quatro viagens quaisquer. Para definir o preço de cada passe, a empresa computou apenas o gasto com a confecção do passe (que é o mesmo para os dois tipos) e o gasto correspondente as viagens a que dá direito cada passe.
- (a) Qual é o gasto com a confecção de cada passe?
  - (b) A empresa quer criar o passe Múltiplo de 8, que dará direito a oito viagens quaisquer. De acordo com as informações apresentadas, quanto custará o passe Múltiplo de 8?
17. (OBMEP - 2015) Carlinhos completou 5 voltas e meia correndo ao longo de uma pista circular. Em seguida, inverteu o sentido e correu mais quatro voltas e um terço, faltando percorrer 40 metros para chegar ao ponto de início. Quantos metros tem essa pista de corrida?
18. (OBMEP - 2007) Um algarismo é *afilhado* de um número natural se ele é o algarismo das unidades de algum divisor desse número. Por exemplo, os divisores de 56 são 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28 e 56, logo os afilhados de 56 são 1, 2, 4, 6, 7 e 8.
- (a) Quais são os afilhados de 57?



- (b) Ache um número que tenha 7 e 9 como afilhados, mas não 3. Quais são os afilhados desse número?
- (c) Explique porque 2 e 5 são afilhados de qualquer número que tenha 0 entre seus afilhados.
- (d) Explique porque 8 é afilhado de qualquer número que tenha 0 e 9 entre seus afilhados.
19. Você conhece o critério de divisibilidade por 11? Veja só:
- O número 93918 é divisível por 11 pois  $8 - 1 + 9 - 3 + 9 = 22$  e 22 é divisível por 11;
  - O número 4851 é divisível por 11 pois  $1 - 5 + 8 - 4 = 0$  e 0 é divisível por 11;
  - O número 63502 não é divisível por 11 pois  $2 - 0 + 5 - 3 + 6 = 10$  que não é divisível por 11.
- (a) Qual é o menor número natural de 5 algarismos que é divisível por 11?
- (b) Qual é o menor número natural de 5 algarismos distintos que é divisível por 11?
20. (OBM - 1998) Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em sequência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis por 7 ou por 13.

## Aula 4

# Álgebra

Na matemática é comum nos depararmos com problemas em que precisamos encontrar valores que não conhecemos. Para resolver esses problemas, usamos **ferramentas algébricas**. Você consegue entender o problema abaixo? Sabe encontrar sua solução?

$$\text{🌺} + \text{🌺} + \text{🌺} = 60$$

### 4.1 Operações com Incógnitas

Lembra sobre quando falamos da invenção dos sistemas de contagem? Há muito tempo, os pastores associavam suas ovelhas à pedras. O que fazemos com **incógnitas** é semelhante. Utilizamos letras para representar valores ainda desconhecidos. Por exemplo, imagine que sua mãe lhe deu 15 reais para ir ao mercado comprar bolachas. Chegando lá, você comprou três pacotes e recebeu R\$ 1,50 de troco. Quando chega em casa, você deixa as bolachas e o dinheiro na mesa e vai jogar bola com seus amigos na quadra perto de casa. Sem perguntar à você, sua mãe pode descobrir quanto foi pago em cada pacote.

Quando se depara com 3 pacotes de bolacha e 1,5 reais em cima da mesa, ela pode escrever a seguinte **equação**:

$$3 \cdot \text{PACOTE DE BOLACHA} + 1,5 = 15$$

Como sabemos que aplicar a mesma operação dos dois lados de uma igualdade não altera seu valor, resolvemos essa conta como:

$$3 \cdot \text{PACOTE DE BOLACHA} + 1,5 - 1,5 = 15 - 1,5$$

$$3 \cdot \text{PACOTE DE BOLACHA} \cdot \frac{1}{3} = 13,5 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \text{PACOTE DE BOLACHA} = 4,5$$

E é assim que sua mãe descobre que você pagou R\$ 4,50 em cada pacote de bolachas sem lhe perguntar nada.

Vejamos, agora, algumas formalizações desse tipo de contas.

#### 4.1.1 Expressões algébricas

Na aula de Operações Aritméticas, aprendemos que **expressões numéricas** são uma junção de números e operações aritméticas. Por exemplo:

- $2 + 4$ ;
- $(12 + 34) \times 5 - \frac{6}{7}$ ;
- $2 - 5 \div 3$ ;
- $9 \times (5 - 7) \div 2 - 8$ .

Por sua vez, **expressões algébricas** serão as junções de números, operações aritméticas e letras. Quando não conhecemos um valor, representamos sua existência por uma letra chamada de **incógnita**. Por exemplo, podemos dizer que existem  $x$  estrelas no céu, ou que há  $n$  alunos na sala. Não sabemos o valor exato de  $x$  nem de  $n$ , mas sabemos que eles existem.

Quando temos um número junto a uma incógnita sem nenhuma operação representada entre eles, entendemos que o número está

multiplicando a incógnita. Assim,  $2x = 2 \cdot x$ . O mesmo vale para números e incógnitas que se encontram ao lado de parênteses como  $2x(5 - 9) = 2x \cdot (5 - 9)$  e  $5(2a + 7) = 5 \cdot (2a + 7)$ . Outros exemplos de expressões algébricas são:

- $2a$ ;
- $5b + \frac{5b}{3} \div 2$ ;
- $9x + 5$ ;
- $\frac{3a}{4}(4 + 5b)$ .

---

### Exercícios de Fixação

1. Em cada item, escreva (N) para as expressões numéricas e (A) se para as expressões algébricas:

- |                                      |                                      |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| (a) (    ) $6z$ ;                    | (h) (    ) $2 + \frac{2}{5} - 32y$ ; |
| (b) (    ) $\frac{x}{8} + 32$ ;      | (i) (    ) $13 \div (11x - 2y)$ ;    |
| (c) (    ) $2 + 5$ ;                 | (j) (    ) $5z + 9$ ;                |
| (d) (    ) $5 - 7 + 3$ ;             | (k) (    ) $71 + \frac{1}{2} - 8$ ;  |
| (e) (    ) $2x + \frac{2}{5} - 32$ ; | (l) (    ) $2 + \frac{2}{5} - 32x$ ; |
| (f) (    ) $7a + 14b + 21c$ ;        |                                      |
| (g) (    ) $11 - 11$ ;               |                                      |

---

#### 4.1.2 Operações aritméticas em expressões algébricas

Se nos depararmos com uma expressão algébrica em que todos os termos acompanhem a mesma incógnita, iremos **somar ou subtrair** as parcelas realizando a operação indicada entre os números que acompanhem as incógnitas, e repetiremos a letra:

- $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$ .

- $b + 3b - 2b = (1 + 3 - 2)b = 2b$ .
- $a + 3 + 5a - 2 = a + 5a + 3 - 2 = (1 + 5)a + 3 - 2 = 6a + 1$ .

Isso acontece por causa da **propriedade distributiva**. Logo falaremos dela, mas antes precisamos nos atentar a uma regrinha! As parcelas envolvidas nas somas e subtrações devem sempre acompanhar a mesma incógnita. Na expressão  $2 + x + 5 + 3x$ , por exemplo, não podemos simplesmente somar todas as parcelas porque elas não são todas semelhantes entre si.

Podemos pensar nessas representações como alunos de diferentes escolas em um passeio. Vamos imaginar que a escola **Azul** e a escola **Vermelha** fizeram uma excursão para um parque de diversões no mesmo dia. Ao final do passeio, todos os alunos estão misturados em um grande grupo, mas devem voltar para o ônibus que irá para a sua escola.

Seguindo essa lógica, vamos associar os números que não acompanham incógnitas aos alunos da escola **Azul**. Eles devem todos se juntar para entrar no ônibus certo. Já aqueles números que acompanham a incógnita  $x$  são da escola **Vermelha** e, por isso, devem se manter separados dos alunos da escola **Azul**, mas juntos entre si.

Reorganizando os dados da nossa expressão de maneira conveniente obtemos:

$$2 + x + 5 + 3x = 2 + 5 + x + 3x = 7 + x \cdot (1 + 3) = 7 + 4x$$

Por sua vez, as contas de **multiplicação e divisão** podem ser feitas entre números de grupos diferentes. Isso acontece por causa das propriedades **comutativa** e **distributiva**.

#### Propriedade Comutativa

- $2 \cdot 3 = 6 = 3 \cdot 2$ ;
- $10 \cdot 4 = 40 = 4 \cdot 10$ ;
- $5 \cdot x = 5x = x \cdot 5$ ;
- $13 \cdot y = y \cdot 13$ .

## Propriedade Distributiva

- $2(a + 3) = 2 \cdot a + 2 \cdot 3 = 2a + 6;$
- $(10 + b) \div 5 = 10 \div 5 + b \div 5 = 2 + \frac{b}{5};$
- $\left(\frac{a}{3} + \frac{1}{2}\right)2 = \frac{a}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2a}{3} + 1.$

Sabendo dessas propriedades, podemos observar como as contas entre parcelas com e sem incógnitas são feitas entre si. Nós efetuamos a operação entre os números e repetimos as incógnitas:

- $2x \cdot 3 = (2 \cdot x) \cdot 3 = 2 \cdot (x \cdot 3) = 2 \cdot (3 \cdot x) = (2 \cdot 3) \cdot x = 6x;$
- $5 \cdot 2a = 5 \cdot (2 \cdot a) = (5 \cdot 2) \cdot a = 10a;$
- $10b \div 2 = \frac{10b}{2} = \frac{10}{2}b = 5b;$
- $\frac{1}{3} \cdot 6y = \frac{1}{3} \cdot (6 \cdot y) = \left(\frac{1}{3} \cdot 6\right) \cdot y = \frac{6}{3} \cdot y = 2y.$

Essas regras também são utilizadas na resolução de expressões algébricas em que incógnitas são acompanhadas por frações.

- $\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}x = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right)x = \frac{2+1}{5}x = \frac{3}{5}x;$
- $2a + \frac{2}{3}a = \left(2 + \frac{2}{3}\right)a = \left(\frac{3 \cdot 2 + 2}{3}\right)a = \frac{8}{3}a;$
- $b - \frac{1}{3}b = \left(1 - \frac{1}{3}\right)b = \frac{3 \cdot 1 - 1}{3}b = \frac{2}{3}b;$
- $\frac{1}{5}a \cdot \frac{3}{8} = \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{8}\right)a = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 8}a = \frac{3}{40}a;$

- $\left(2x - \frac{1}{7}\right) \cdot \frac{3}{8} = 2x \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2x \cdot 3}{8} - \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 8} = \frac{6x}{8} - \frac{3}{56};$
- $2 \cdot \frac{2a + 5}{3} = \frac{2(2a + 5)}{3} = \frac{2 \cdot 2a + 2 \cdot 5}{3} = \frac{4a + 10}{3};$

**Obs.:** Perceba que só fizemos a divisão de uma parcela com incógnita por uma parcela que contém apenas números. A divisão de um número por uma parcela com incógnita  $\left(\frac{5}{2a}\right)$  ou de uma parcela com incógnita por outra também com incógnita  $\left(\frac{3a}{2a}\right)$  são operações diferentes, e não as estudaremos nesse curso.

## 4.2 Equações Algébricas

**Equações** são expressões matemáticas que representam uma igualdade, ou seja, tudo que está escrito do lado esquerdo do sinal de igual (=) deve ter o mesmo valor do que está expresso do lado direito. Se essas igualdades são escritas utilizando apenas números, então são **equações numéricas** como:



- $2 + 6 = 3 + 5;$
- $93 - 43 = 100 - 50;$
- $19 - \frac{9}{3} = 30 - 14;$
- $1.005 + 320 = 1.000 + 325.$

Por sua vez, se essas igualdades possuem incógnitas, então são chamadas de **equações algébricas**:

- $4x + 2 = 92;$
- $\frac{g}{3} = 9;$
- $19a + 1 = 3a - 14;$
- $\frac{32k}{5} = 2.$

Equações, tanto numéricas quanto algébricas, funcionam como uma balança: toda operação aritmética (adição, subtração, multipli-

cação e divisão) feita de um lado da igualdade deve ser feita também do outro.

**Atenção!** Lembre-se que não existe divisão por zero! Essa é a única operação que não pode ser feita dos dois lados da equação.

### 4.2.1 Resolvendo Equações

Como comentamos anteriormente, incógnitas são valores desconhecidos. Entretanto, se esses valores estão sendo apresentados em uma equação podemos, na maior parte dos casos, encontrar seu valor. Considere a equação:  $2a - 5 = 9$ . Encontraremos o valor de  $a$  ao **isolar a incógnita**, ou seja, vamos manipular a equação de forma que tenhamos  $a = [\text{número}]$ .

Primeiro procuramos deixar todas letras em um lado da equação e os números do outro. Vamos olhar apenas para a expressão do lado esquerdo da equação:  $2a - 5$ . Queremos eliminar o  $-5$ , para que desse lado da equação tenhamos apenas a parcela com a incógnita. Para eliminá-lo, vamos usar a operação inversa da subtração, adicionando 5 à expressão:

$$2a - 5 + 5 = 2a + 0 = 2a$$

Dessa forma eliminamos o  $-5$  do lado esquerdo. Mas, lembre-se que estamos trabalhando com uma equação, então para poder somar 5 ao lado esquerdo, como desejamos, devemos somar esse valor também ao lado direito, para que se mantenha o equilíbrio. Então, a operação que realizamos na equação é:

$$\begin{aligned} 2a - 5 &= 9 \\ \Rightarrow 2a - 5 + 5 &= 9 + 5 \\ \Rightarrow 2a + 0 &= 14 \\ \Rightarrow 2a &= 14 \end{aligned}$$

Agora temos as parcelas com letras de um lado, e as parcelas numéricas do outro. Precisamos então eliminar o fator 2, que aparece multiplicando a incógnita  $a$ . Para isso, aplicaremos a operação inversa da multiplicação, dividindo a equação por 2.

$$\begin{aligned}
 2a &= 14 \\
 \Rightarrow 2a \div 2 &= 14 \div 2 \\
 \Rightarrow \frac{2a}{2} &= \frac{14}{2} \\
 \Rightarrow a &= 7
 \end{aligned}$$

Podemos perceber que para isolar a incógnita  $a$  em um dos lados da equação realizamos **operações inversas**. Precisávamos “nos livrar” do termo  $(-5)$  e, para isso, somamos 5. Da mesma maneira, quando tínhamos  $2a = 14$ , precisávamos “nos livrar” do  $(2)$  que multiplicava a incógnita e para isso dividimos ambas as expressões por 2. A tabela abaixo apresenta as inversas entre as quatro operações aritméticas elementares:

| Operação      | Inversa    |
|---------------|------------|
| Adição        | Subtração  |
| Multiplicação | Divisão    |
| Potenciação   | Radiciação |

Outro artifício que utilizamos ao resolver exercícios que envolvem equações algébricas é a **prova real**. Essa manipulação consiste em substituir o valor encontrado para a incógnita na equação inicial:

$$\begin{aligned}
 2a - 5 &= 9 \\
 2 \cdot 7 - 5 &= 14 - 5 = 9
 \end{aligned}$$

Como chegamos ao mesmo resultado em ambas as expressões, de fato encontramos o valor correto da incógnita.

Vamos resolver a equação abaixo:

$$5x + 2x - 9 + \frac{1}{3} = 3x + 17 + \frac{8}{6}$$

Primeiramente, simplificamos as expressões de cada lado da equação:

$$\begin{aligned}\Rightarrow 7x + \frac{3 \cdot (-9) + 1}{3} &= 3x + \frac{6 \cdot 17 + 8}{6} \\ \Rightarrow 7x + \frac{(-26)}{3} &= 3x + \frac{110}{6} \\ \Rightarrow 7x - \frac{26}{3} &= 3x + \frac{55}{3}\end{aligned}$$

Agora, deixaremos as parcelas com incógnitas de um lado da igualdade e as parcelas que contêm apenas números do outro:

$$\begin{aligned}7x - \frac{26}{3} &= 3x + \frac{55}{3} \\ \Rightarrow 7x - \frac{26}{3} - 3x &= 3x + \frac{55}{3} - 3x \\ \Rightarrow 7x - 3x - \frac{26}{3} &= 3x - 3x + \frac{55}{3} \\ \Rightarrow 4x - \frac{26}{3} &= 0 + \frac{55}{3} \\ \Rightarrow 4x - \frac{26}{3} &= \frac{55}{3}\end{aligned}$$

Então, passaremos as parcelas que contêm apenas números para o lado direito:

$$\begin{aligned}\Rightarrow 4x - \frac{26}{3} + \frac{26}{3} &= \frac{55}{3} + \frac{26}{3} \\ \Rightarrow 4x + 0 &= \frac{55 + 26}{3} \\ \Rightarrow 4x &= \frac{81}{3} = 27\end{aligned}$$

Por fim, iremos dividir ambos os lados por 4:

$$\begin{aligned}\Rightarrow 4x \div 4 &= 27 \div 4 \\ \Rightarrow \frac{4x}{4} &= \frac{27}{4} \\ \Rightarrow x &= \frac{81}{12} = \frac{27}{4}\end{aligned}$$

Para confirmar que encontramos o valor correto, faremos a prova real:

$$\begin{aligned}5x + 2x - 9 + \frac{1}{3} &= 3x + 17 + \frac{8}{6} \\ \Rightarrow 5 \cdot \frac{27}{4} + 2 \cdot \frac{27}{4} - 9 + \frac{1}{3} &= 3 \cdot \frac{27}{4} + 17 + \frac{8}{6} \\ \frac{135}{4} + \frac{54}{4} - \frac{26}{3} &= \frac{81}{4} + \frac{110}{6} \\ \frac{189}{4} - \frac{26}{3} &= \frac{3 \cdot 81 + 2 \cdot 110}{12} \\ \frac{3 \cdot 189 - 4 \cdot 26}{12} &= \frac{463}{12} \\ \frac{463}{12} &= \frac{463}{12}\end{aligned}$$

Como chegamos ao mesmo número, sabemos que nossas contas estão corretas e  $x$  realmente vale  $\frac{27}{4}$ .

---

### Exercícios de Fixação

1. Simplifique as expressões algébricas:

(a)  $2x + 3x - x =$

(b)  $2x - 3x + 6 + 8 - 6x + \frac{2}{3} =$

(c)  $a - \frac{a}{3} - 2 \cdot 5a =$

(d)  $3a - a + 6a \div 3 - \frac{3}{5}a - 8 - 6 =$

(e)  $27t + \frac{1}{5} \times 25 - 2 - 25 \div 5 - \frac{23}{3}t + 4t \div 2 =$

2. Em cada item, determine o valor da incógnita e tire a prova real:

$$(a) \quad 2x - 5 = 11$$

$$(b) \quad 5x + 2 - \frac{3}{5} = -6x - 9$$

$$(c) \quad \frac{5a}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{5a}{3} - \frac{5}{3}$$

$$(d) \quad 6 - \frac{4}{3} \cdot 21 = 11b - \frac{13}{3}$$

$$(e) \quad 2 \cdot \frac{a+1}{3} = 1$$

$$(f) \quad 27t + \frac{1}{5} \times 25 - 2t - 25 \div 5 - \frac{23}{3}t + 4t \div 2 = 0$$

$$(g) \quad 2x - 5 = x + \frac{2}{3}$$

---

Para utilizar as operações inversas na resolução de equações costumamos dizer que “passamos o número para o outro lado da equação”. Isto é, o número que desejamos eliminar será passado para a expressão do outro lado da igualdade e, por isso, terá sua operação invertida. Vamos resolver nossos exemplos dessa maneira:

- $2a - 5 = 9$ :

$$\Rightarrow 2a = 9 + 5 \Rightarrow 2a = 14 \Rightarrow a = 14 \div 2 \Rightarrow a = 7.$$

- $5x + 2x - 9 + \frac{1}{3} = 3x + 17 + \frac{8}{6}$  :

$$\Rightarrow 5x + 2x = 3x + 17 + \frac{8}{6} + 9 - \frac{1}{3} \Rightarrow 5x + 2x = 3x + 27$$

$$\Rightarrow 5x + 2x - 3x = 27 \Rightarrow 4x = 27 \Rightarrow x = \frac{27}{4}.$$

Agora que aprendemos a resolver equações, você começará a perceber que em alguns exercícios o uso dessas expressões não é fundamental para encontrar a resposta, pois é possível resolvê-los

utilizando apenas operações simples. Entretanto, montar equações usando incógnitas ajuda a tornar a resolução mais clara e organizada. Veja um exemplo:

**Exercício Resolvido 4.1.** (OBMEP – 2014) Lúcia e Antônio disputaram várias partidas de um jogo no qual cada um começa com 5 pontos. Em cada partida, o vencedor ganha 2 pontos e o derrotado perde 1 ponto, não havendo empates. Ao final, Lúcia ficou com dez pontos e Antônio ganhou exatamente três partidas. Quantas partidas eles disputaram ao todo?

**Solução.** A incógnita que queremos encontrar nessa questão é o número de partidas jogadas, vamos chamá-la de  $x$ . Como não há empates,

$$x = \text{partidas vencidas por Antônio} + \text{partidas vencidas por Lúcia}$$

Lúcia perde um ponto por cada derrota, então ela perdeu 3 pontos com as partidas que Antônio venceu. Como ela começou com 5 pontos e perdeu 3,  $5 - 3 = 2$ , para que a sua pontuação final seja de 10 pontos, ela deve ter ganhado 8 pontos, ou seja, vencido 4 partidas.

Assim, o número de partidas jogadas foi  $x = 3 + 4 = 7$  partidas.

□

---

## Exercícios de Fixação

1. Resolva as equações a seguir:

(a)  $2\left(\frac{b}{5} - 1\right) = 3$

(d)  $\frac{3}{7} \cdot 2y - 3 = 0$

(b)  $5x \div 2 = 5$

(e)  $\frac{2x}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 6$

(c)  $2 \cdot \frac{2}{3}x = 54$

2. Resolva os seguintes exercícios utilizando equações:

- (a) Determine um numero cujo dobro de seu antecessor, menos 3 e igual a 25.
- (b) A soma de quatro números naturais consecutivos é 62. Determine esses números.
- (c) Se um retângulo tem 20 *cm* de comprimento e 100 *cm*<sup>2</sup> de área, qual a medida de sua largura?

3. E se adicionarmos mais informações à imagem do início desta atividade? Você ainda sabe resolvê-la?

$$\begin{array}{rcccl} \text{🌺} & + & \text{🌺} & + & \text{🌺} & = & 60 \\ \text{🌺} & + & \text{🌺} & + & \text{🌺} & = & 30 \end{array}$$

4. E agora?

$$\begin{array}{rcccl} \text{🌺} & + & \text{🌺} & + & \text{🌺} & = & 60 \\ \text{🌺} & + & \text{🌺} & + & \text{🌺} & = & 30 \\ \text{🌺} & - & \text{🌺} & = & 3 \\ \text{🌺} & + & \text{🌺} & \times & \text{🌺} & = & ? \end{array}$$

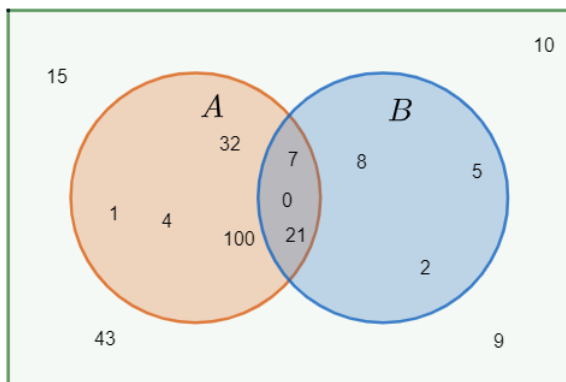
---

Agora, iremos aprender quatro operações básicas entre conjuntos: a união, a intersecção (ou interseção) e a diferença de conjuntos e o complementar a um conjunto. Para então aprendermos sobre o Diagrama de Venn.

### 4.3 Propriedades de conjuntos

Para compreendermos de forma plena as operações entre conjuntos e o uso do Diagrama de Venn, precisamos aprender sobre o **Conjunto Universo**. Este conjunto representa todos os elementos que estão sendo considerados em uma situação.

O conjunto das frutas que Magali vai comprar no mercado é dado por  $F = \{\text{maça}, \text{abacaxi}, \text{uva}, \text{laranja}, \text{maracujá}\}$ , já o conjunto das verduras que ela irá comprar é  $V = \{\text{batata}, \text{tomate}, \text{repolho}, \text{alface}, \text{alho}\}$ . Portanto, o conjunto universo da lista de compras de Magali é  $C = \{\text{maça}, \text{abacaxi}, \text{uva}, \text{laranja}, \text{maracujá}, \text{batata}, \text{tomate}, \text{repolho}, \text{alface}, \text{alho}\}$ . Por sua vez, se trabalharmos com conjuntos numéricos, também podemos identificar os elementos de cada conjunto separadamente.



Na figura podemos observar os conjuntos  $A = \{0, 1, 4, 7, 21, 32, 100\}$ ,  $B = \{0, 2, 5, 7, 8, 21\}$  e  $U = \{0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 15, 21, 32, 43, 100\}$ . Note que em  $U$  são apresentados todos os elementos de  $A$  e de  $B$ , e ainda, os elementos 9, 10, 15 e 43.

Outra característica útil ao utilizarmos conjuntos é a **quantidade de elementos em cada região**. Iremos denotar esta quantidade com um #.

Para descobrir quantos elementos tem o conjunto  $A$ , basta contar a quantidade de elementos em sua região. É importante lembrar

que a interseção entre dois conjuntos faz parte de ambos, então não podemos esquecê-la. Dessa forma, o conjunto  $A$  tem 7 elementos e  $\#B = 6$ .

Por sua vez, nosso universo  $U$  possui 14 elementos. Veja que esse resultado não é o mesmo que obtemos ao somar os elementos de  $A$  e  $B$  e acrescentar os 4 elementos que estão fora dos dois conjuntos. Contando dessa forma deixamos de considerar que alguns elementos pertencem a mais de um conjunto simultaneamente. Por exemplo, o elemento 21, que está nos 2 conjuntos, seria contado 2 vezes.

Para evitar este tipo de problema, precisamos aprender mais sobre as operações entre conjuntos e a representação deles em forma de diagrama.

### 4.3.1 Operações com conjuntos

Assim como existem as operações entre números, podemos trabalhar operações entre conjuntos. As manipulações que aprenderemos hoje são: união, diferença, interseção e complementar.

#### União

A união de dois conjuntos funciona de forma semelhante à soma dos números que aprendemos anteriormente. Nessa operação, iremos encontrar como resposta um novo conjunto que contém todos os elementos dos conjuntos envolvidos na união. Iremos sinalizar essa operação como  $\cup$ . Considerando os conjuntos:

$$A = \{1, 4, 7, 14, 19, 21\} \text{ e } B = \{3, 5, 9, 13\}$$

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 13, 14, 19, 21\}$$

No caso de um elemento se repetir em dois ou mais conjuntos que estão sendo unidos, iremos representá-lo apenas uma vez no conjunto solução. Dados:

$$C = \{2, 6, 12, 20\} \text{ e } D = \{3, 5, 6, 11, 12\}$$

$$C \cup D = \{2, 3, 5, 6, 11, 12, 20\}$$

Esses elementos que estão presentes em ambos os conjuntos manipulados são especiais. Eles representam a **intersecção** dos conjuntos.

## Intersecção

A intersecção de conjuntos é uma propriedade muito importante para nós. Os elementos de uma intersecção são aqueles contidos de maneira simultânea em dois ou mais conjuntos. Esta operação é sinalizada por  $\cap$ . Tome como exemplo os conjuntos

$$A = \{2, 6, 12, 20\} \text{ e } B = \{3, 5, 6, 11, 12\}$$

$$A \cap B = \{6, 12\}$$

Quando dois conjuntos não apresentarem valores em comum, diremos que sua intersecção é vazia. E utilizaremos o símbolo  $\emptyset$  para representar a falta de elementos. Podemos observar esta situação utilizando os conjuntos:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}, B = \{11, 12, 13, 14\} \text{ e } C = \{110, 120, 130, 140\}$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

Também podemos encontrar a intersecção entre mais de dois conjuntos. Veja o exemplo abaixo.

**Exemplo 4.1.** Seja  $C$  o conjunto dos números ímpares,  $D$  o conjunto dos números primos e  $E$  o conjunto dos múltiplos de 7. Então, temos:

- $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots\}$
- $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$
- $E = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, \dots\}$

Temos várias intersecções entre os conjuntos:

- $C \cap D = \{3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$
- $C \cap E = \{7, 21, 35, \dots\}$
- $D \cap E = \{7\}$
- $C \cap D \cap E = \{7\}$

## Diferença

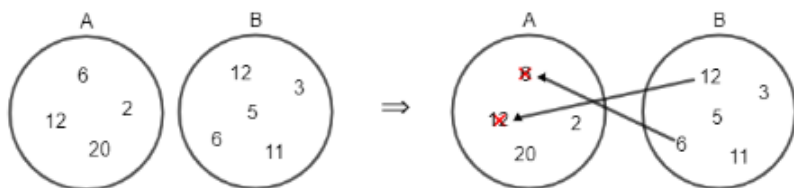
A diferença entre conjuntos é a operação em que consideramos todos os elementos que pertencem a um conjunto  $X$ , mas não pertencem ao conjunto  $Y$ . Representamos a operação de diferença entre os conjuntos  $X$  e  $Y$  como:  $(X - Y)$ .

Tome como exemplo os conjuntos

$$A = \{2, 6, 12, 20\} \text{ e } B = \{3, 5, 6, 11, 12\}$$

$$A - B = \{2, 20\}$$

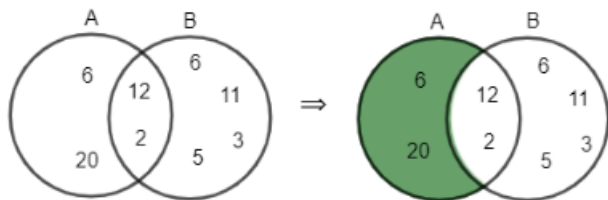
Repare que os números 3, 5 e 11 não entram no conjunto diferença de  $A$  e  $B$ . Isso acontece, pois nesta operação estamos eliminando os elementos que pertencem a  $B$  de  $A$ .



Entretanto, como já aprendemos sobre a intersecção de conjuntos, podemos pensar nessa operação como  $A - B = A - (A \cap B)$ . Isso se dá, pois queremos tirar de  $A$  os elementos que pertencem a  $B$ , e esses são exatamente os elementos que compõe a intersecção dos dois conjuntos.

**Atenção!** Na operação de diferença de conjuntos, a ordem dos fatores importa. Então,

$$(A - B) \neq (B - A)$$



## Complementar

O complementar a um conjunto é composto por todos os elementos que fazem parte do universo que estamos trabalhando, mas não estão contidos dentro do conjunto que estamos trabalhando. Para representar tal conjunto utilizaremos uma letra “C” sobrescrita a letra que identifica o conjunto manipulado. O complementar de um conjunto E, por exemplo, será denotado por  $E^C$ .

Agora, considerando o conjunto  $A = \{0, 2, 5, 7\}$  contido dentro do conjunto universo  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ . Pela definição de conjunto complementar, temos que o complementar de A é composto por todos os elementos que fazem parte do conjunto Universo, mas que não estão em A.

$$A^C = \{1, 3, 4, 6, 8\}$$

## Exercícios de Fixação

1. Escreva a união e a intersecção dos seguintes conjuntos:
  - (a)  $A = \{0, 1, 2, 5, 7\}$  e  $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
  - (b)  $C = \{2, 4, 6, 8\}$  e  $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
  - (c)  $E = \{21, 22, 23, 24, 25\}$  e  $F = \{21, 22, 23, 24, 25\}$
  - (d)  $G = \{17, 19, 23, 56, 84, 791\}$  e  $H = \{12, 15, 17, 32, 45, 789, 831\}$

2. Para cada um dos itens, faça  $A - B$  e depois  $B - A$ .

Compare as respostas. Podemos dizer que  $(A - B) = (B - A)$  sempre? Justifique.

(a)  $A = \{8, 15, 21, 34, 62\}$  e  $B = \{2, 7, 8, 14, 20, 21, 22\}$

(b)  $C = \{71, 72, 73, 77, 85\}$  e  $D = \{56, 70, 72, 76, 77, 84, 85\}$

(c)  $E = \{16, 17, 18, 19, 20\}$  e  $F = \{21, 22, 23, 24, 25\}$

(d)  $G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  e  $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

3. Considere o conjunto Universo:

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Escreva o complementar dos seguintes conjuntos:

(a)  $A = \{0, 1, 2, 3\}$

(b)  $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

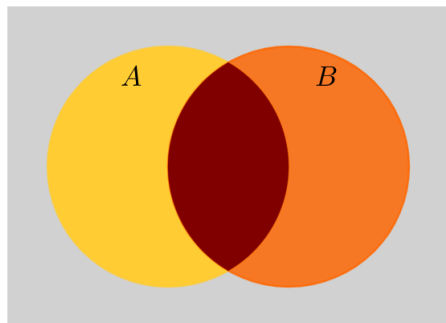
(c)  $C = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

(d)  $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

---

### 4.3.2 Diagrama de Venn

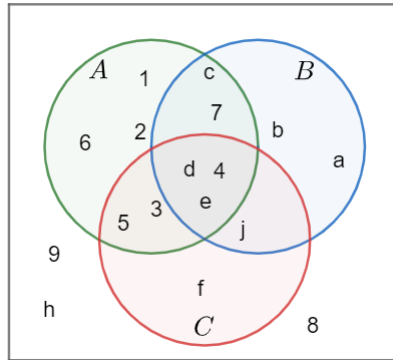
Muitas vezes precisamos estudar a interação entre dois ou mais conjuntos de forma simultânea. Uma das formas de simplificar este processo é através da representação gráfica de tais conjuntos. Para isso, utilizamos o **Diagrama de Venn**.



Na imagem acima, temos a representação de um Diagrama de Venn arbitrário com 2 conjuntos,  $A$  e  $B$ . Nele, é possível observar 4 áreas distintas:

- A área em amarelo representa os elementos que pertencem apenas ao conjunto  $A$ ;
- Na área em laranja, estão os elementos contidos apenas no conjunto  $B$ ;
- Na região marrom, escrevemos os elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos  $A$  e  $B$ , ou seja, os elementos de  $A \cap B$ ;
- Por fim, na região cinza, escrevemos os elementos que não pertencem a nenhum dos conjuntos, mas estão presentes no Conjunto Universo estudado.

Sabendo dessas propriedades e das operações que acabamos de aprender, podemos descrever a figura abaixo em que trabalhamos um diagrama com três conjuntos:



Os conjuntos que compõe o diagrama são:

- $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, c, d, e\};$
- $B = \{4, 7, a, b, c, d, e, j\};$
- $C = \{3, 4, 5, d, e, f, j\}.$

Suas interseções são:

- $A \text{ e } B: \{4, 7, c, d, e\};$
- $B \text{ e } C: \{4, d, e, j\};$
- $A \text{ e } C: \{3, 4, 5, d, e\};$
- $A, B \text{ e } C: \{4, d, e\}.$

E o conjunto Universo é

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, f, h, j\}.$$

Iremos, agora, observar alguns exercícios que utilizam de diagramas para sua resolução.

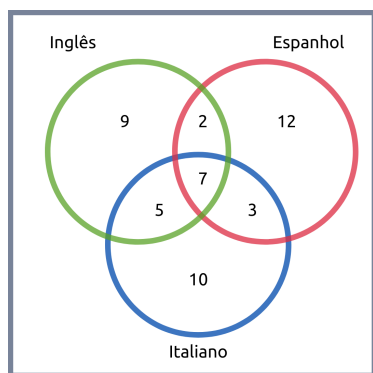
**Exercício Resolvido 4.2.** Em um curso de idiomas, foi feita uma pesquisa com os alunos para verificar quais línguas estrangeiras eles gostariam de aprender. O resultado da pesquisa foi:

- 23 gostariam de aprender inglês;
- 24 gostariam de aprender espanhol;
- 25 gostariam de aprender italiano;

- 12 gostariam de aprender inglês e italiano;
- 10 gostariam de aprender italiano e espanhol;
- 9 gostariam de aprender inglês e espanhol;
- 7 gostariam de aprender inglês, espanhol e italiano.

Quantos estudantes foram entrevistados?

**Solução.** Inicialmente, vamos representar as informações encontradas em um diagrama de Venn. Cada um dos círculos abaixo representa um dos idiomas. Dentro, está indicada a quantidade de alunos que desejam aprender aquele idioma.



Repare que as quantidades foram colocadas de acordo com o interesse: os que queriam aprender inglês são 23, mas desses, 2 também querem aprender o espanhol, 5 querem aprender também italiano e 7 querem aprender espanhol e italiano junto com o inglês. Logo, dos 23 somente 9 desejam aprender inglês exclusivamente. O mesmo raciocínio foi utilizado para preencher os diagramas do espanhol e do italiano.

Assim, para descobrir quantos estudantes foram entrevistados ao todo, basta observarmos os números que estão contidos no diagrama e somá-los. O número de estudantes  $n$  é

$$n = 9 + 2 + 7 + 5 + 12 + 3 + 10$$

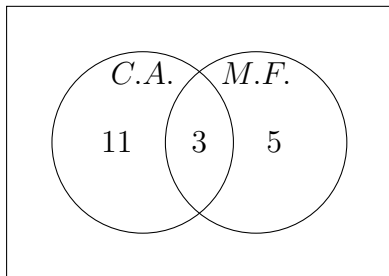
$$n = 48 \text{ estudantes}$$

□

**Exercício Resolvido 4.3.** Na Guerra das Vingadoras, Mulher de Ferro e Capitã Americana enfrentaram os vilões do time de Thanous. Alguns vilões elas conseguiram derrotar sozinhas, e outros, mais poderosos, elas venceram trabalhando em dupla. Sabe-se que 14 vilões foram derrotados pela Mulher de Ferro e 8 pela Capitã Americana. Sabe-se ainda que 3 vilões foram derrotados pelas duas heroínas. Se todos os vilões foram derrotados por pelo menos uma delas, quantos vilões faziam parte do time de Thanous?

- (A) 14      (B) 17      (C) 19      (D) 22      (E) 25

**Solução.** Vamos construir o diagrama de Venn para analisar quantos vilões as heroínas derrotaram sozinhas ou em dupla. Sabemos que 3 vilões foram derrotados pelas duas heroínas, então colocamos o 3 na interseção dos dois conjuntos. Agora, os 14 vilões que a Capitã Americana derrotou são a soma dos vilões que ela derrotou sozinha com aqueles que ela derrotou em dupla. Para que essa soma resulte 14, ela deve ter derrotado  $14 - 3 = 11$  vilões sozinha. Da mesma forma, os vilões que a Mulher de Ferro derrotou sozinha foram  $8 - 3 = 5$ .



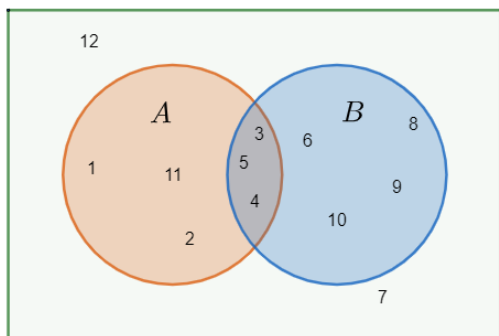
Assim, elas derrotaram os  $11 + 3 + 5 = 19$  vilões da equipe de Thanous (alternativa C).

□

## Exercícios de Fixação

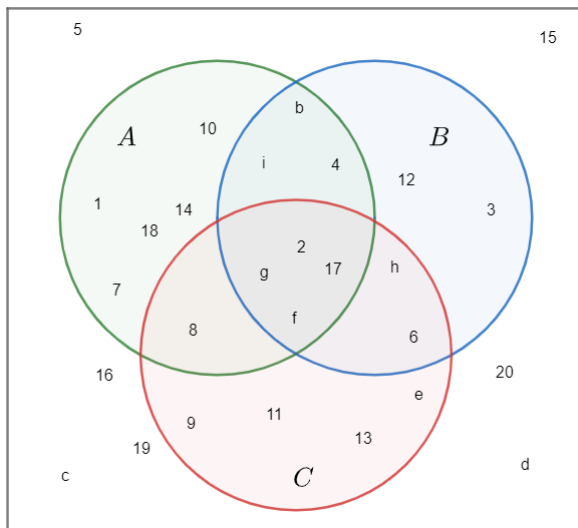
1. Para cada item, escreva os conjuntos indicados:

(a)



- $A =$
- $B =$
- Interseção de  $A$  e  $B$ :
- Conjunto Universo:  $U =$

(b)

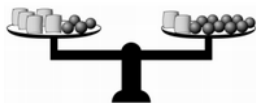


- $A =$
- $B =$
- $C =$
- Interseção de  $A$  e  $B$ :
- Interseção de  $A$  e  $C$ :
- Interseção de  $B$  e  $C$ :
- Interseção de  $A$ ,  $B$  e  $C$ :
- Conjunto Universo  $U =$

### Exercícios Propostos

1. (OBMEP - 2006) A balança da figura está em equilíbrio com bolas e saquinhos de areia em cada um de seus pratos. As

bolas são todas iguais e os saquinhos também. O peso de um saquinho de areia é igual ao peso de quantas bolas?



2. (OBMEP - 2015) João possui mais que 30 e menos que 100 chocolates. Se ele organizar os chocolates em linhas de 7, sobrá um. Caso ele os organize em linhas de 10, sobrá 2. Quantos chocolates ele possui?
3. (OBM - 2015) Carlos e seus dois amigos, Danilo e Edson, foram ao cinema. Carlos pagou a entrada de todos, Danilo pagou a pipoca e o suco para todos e Edson pagou o estacionamento do carro. Para acertar as contas, Danilo e Edson pagaram R\$ 8,00 e R\$ 14,00, respectivamente, para Carlos, pois a despesa total de cada um foi de R\$ 32,00. Qual era o preço da entrada no cinema?
4. (OBMEP - 2013) Todos os 40 alunos de uma turma responderam sim ou não a duas perguntas: "Você gosta de Português?" e "Você gosta de Matemática?" Responderam sim à primeira pergunta 28 alunos, responderam sim à segunda pergunta 22 alunos, enquanto 5 alunos responderam não às duas perguntas. Quantos alunos responderam sim às duas perguntas?  
a) 5                      b) 7                      c) 13                      d) 15                      e) 25
5. (OBM - 2004) A soma de dois números primos  $a$  e  $b$  é 34 e a soma dos primos  $a$  e  $c$  é 33. Quanto vale  $a + b + c$ ?
6. (OBMEP - 2013) As colegas de sala Ana, Alice e Aurora foram comprar seus livros de Matemática. Alice percebeu que havia esquecido sua carteira. Ana e Aurora pagaram pelos três livros; Ana contribuiu com R\$43,00 e Aurora com R\$68,00. Quanto Alice deve pagar para Ana e para Aurora, respectivamente?



7. (OBM - 2004, adaptada) Um artesão começa a trabalhar às 8 h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos. O seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão para de trabalhar às 12 h mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?
8. (OBMEP - 2012) João fez uma viagem de ida e volta entre Pirajuba e Quixajuba em seu carro, que pode rodar com álcool e com gasolina. Na ida, apenas com álcool no tanque, seu carro fez 12 km por litro e na volta, apenas com gasolina no tanque, fez 15 km por litro. No total, João gastou 18 litros de combustível nessa viagem. Qual é a distância entre Pirajuba e Quixajuba?
9. (OPM - 2008) A Páscoa é celebrada no primeiro domingo após a primeira Lua cheia do Outono e pode ocorrer entre 22 de março e 25 de abril. Existem vários métodos para determinar o dia em que o domingo de Páscoa cai. Um deles é o método de Gauss, descrito a seguir para os anos no intervalo de 1901 a 2099. Sejam
- A o resto da divisão do ano por 19;
  - B o resto da divisão do ano por 4;
  - C o resto da divisão do ano por 7;
  - D o resto da divisão de  $19A + 24$  por 30;
  - E o resto da divisão de  $2B + 4C + 6D + 5$  por 7.

Desta forma:

- Se  $D + E > 9$ , então o dia é  $D + E - 9$  e o mês é abril;
- Caso contrário, o dia é  $D + E + 22$  e o mês é março.

Em que dia e mês será o domingo de Páscoa em 2077, ano do centenário da OPM?

10. (OBMEP - 2012) Se  $A$  e  $B$  representam Algarismos diferentes e o valor de  $A \times A + A$  é o número de dois Algarismos  $AB$ , qual é o valor de  $B \times B + B$  ?

a) A              b) B              c) AB              d) AA              e) ABA

11. (OBM - 2006) Ao redor de um grande lago existe uma ciclovia de 45 *km* de comprimento, na qual sempre se retorna ao ponto de partida se for percorrida num único sentido. Dois amigos partem de um mesmo ponto com velocidades constantes de 20 *km/h* e 25 *km/h*, respectivamente, em sentidos opostos. Quando se encontram pela primeira vez, o que estava correndo a 20 *km/h* aumenta para 25 *km/h* e o que estava a 25 *km/h* diminui para 20 *km/h*. Quanto tempo o amigo que chegar primeiro ao ponto de partida deverá esperar pelo outro?
12. (OBMEP - 2020) Em uma frutaria, Jaime percebeu que uma laranja custa o mesmo que meia maçã mais meio real. Percebeu também que um terço de uma maçã custa o mesmo que um quarto de uma laranja mais meio real. Com o valor de 5 laranjas mais 5 reais, quantas maçãs Jaime consegue comprar?
13. (OPRM - 2018) Na fase final de uma competição matemática 10 alunos competem. A prova tem 3 questões. Dos 10 alunos 9 acertam a primeira questão, 8 acertam a segunda questão e 6 acertam a terceira questão. Qual é o menor número possível de participantes que acertaram todas as questões?

a) Nenhum              b) 1              c) 2              d) 3              e) 4

14. (OBM - 2013) Em uma prova de múltipla escolha, Júlia acertou 100 das 128 questões possíveis. Ela verificou que a maior quantidade de questões consecutivas que ela acertou é  $N$ . Qual é o valor mínimo para  $N$ ?
15. (OPM - 2005) Na Microlândia, há quatro times de futebol. O regulamento do campeonato microlandense de futebol, ou como é chamado carinhosamente pelos seus habitantes, o Microlândião, é o seguinte: na fase classificatória, cada um dos quatro times joga com todos os outros três exatamente uma vez. Em cada jogo, uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e uma derrota vale zero pontos. As duas equipes que conseguirem as maiores quantidades de pontos são classificadas para a grande final do Microlândião. Caso seja necessário, há um sorteio para definir as equipes classificadas. Por exemplo, se os times têm 9, 4, 4 e 0 pontos, respectivamente, há um sorteio para definir a segunda equipe que participará da final.
- (a) Qual é a menor pontuação possível de uma equipe classificada para a final?
- (b) Qual é a maior pontuação possível de uma equipe que não foi classificada para a final?
16. (OBM - 2014) Numa sala completa, quando a professora perguntou se os alunos tinham estudado para a prova, vários alunos disseram que sim e os 15 restantes disseram que não. Quem não estuda sempre mente, quem estuda às vezes mente, às vezes diz a verdade. Se 23 alunos estudaram para a prova e 32 mentiram, quantos alunos tem a sala?
- a) 38                      b) 40                      c) 42                      d) 44                      e) 55
17. (OBM - 2008) Três carros com velocidades constantes cada um, na mesma estrada, passam no mesmo momento por Brasília. Ao viajar 100 quilômetros, o carro  $A$  passa por Americanópolis, 20 quilômetros a frente do carro  $B$  e 50 quilômetros a frente do carro  $C$ . Quando o carro  $B$  passar por Americanópolis, quantos quilômetros estará a frente do carro  $C$ ?

18. (OBM - 2014) Joana foi comprar 20 canetas e comparou os preços em duas lojas: na loja *A*, cada caneta custa 3 reais, mas há uma promoção de 5 canetas pelo preço de 4, e na loja *B*, cada caneta custa 4 reais, mas a cada 5 canetas compradas, como brinde ela pode levar até mais duas de graça. Tentando fazer a melhor escolha entre comprar somente na loja *A* ou somente na loja *B*, quanto ela pode economizar?
19. (OPRM - 2018) Numa cidade há 2014 habitantes, uns nunca dizem a verdade e os restantes nunca mentem. Nas últimas eleições para a Câmara dos Vereadores, havia três candidatos e cada habitante tinha preferência por um único candidato. O boletim de voto continha três questões: Prefere o João do supermercado? Prefere o Quim do café? Prefere o José da padaria? Cada um dos habitantes respondeu às três questões. Se foram apurados 3000 “Sim”, quantos habitantes que nunca mentem há na cidade?
- a) 986                      b) 1028                      c) 1500                      d) 2014
- e) Não há dados suficientes
20. (OBM - 2006) No planeta POT o número de horas por dia é igual a número de dias por semana, que é igual ao número de semanas por mês, que é igual ao número de meses por ano. Sabendo que em POT há 4096 horas por ano, quantas semanas há num mês?

# Aula 5

## Combinatória

### 5.1 Padrões e Sequências

Padrões e sequências estão muito presentes no nosso dia a dia, embora muitas vezes não nos demos conta disso. Quer ver só?

Quando ligamos a TV no futebol e o narrador fala o nome de todos os jogadores de um time segundo a posição em que cada jogador joga. É uma sequência! Ah, e o padrão? É a posição que cada um tem em campo! Nessa aula, iremos entender um pouco mais sobre a matemática por trás desses padrões e sequências.



### 5.2 Padrões

Imagine a seguinte situação: Ana nomeia as formigas que passam por sua janela: Carla Aninha, Roberta Beninha, Paola Ceninha, Denise Deninha. . . Que nome ela dará à próxima formiga que passar?



Não temos dicas sobre o primeiro nome da próxima formiga, porque os primeiros nomes foram escolhidos de forma **aleatória**. Mas se você pensou que ela terá dois nomes, e que o segundo nome será “Eninha”, entendeu a lógica usada por Ana: nomes compostos, com o segundo nome começando com as letras em ordem alfabética e terminando com “ninha”. Ana usou um **padrão** que nos permite deduzir informações que não foram ditas.

Os padrões são lógicas de composição de coisas - como os nomes das formigas, padrões de pintura, padrões de números - e por meio deles podemos prever o “próximo passo”.

Exemplo.  $\triangle \clubsuit \triangle$

Resposta.  $\triangle \clubsuit \triangle \clubsuit$ .

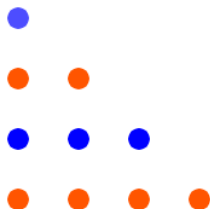
É mais difícil explicar padrões do que percebê-los! Você consegue descobrir qual é o próximo passo dos seguintes padrões?

1. 2, 4, 8, 16,

2.  $\triangle \clubsuit \diamond \spadesuit \heartsuit \square \triangle \clubsuit \diamond$

3.  $\heartsuit \heartsuit \heartsuit, \heartsuit \heartsuit \heartsuit, \heartsuit \heartsuit \heartsuit,$

4.



5.



6.  $\triangle$ ,  $\clubsuit$ ,  $\diamond$ ,  $\spadesuit$ ,  $\heartsuit$ ,  $\blacksquare$ ,  
 $\triangle$ ,  $\clubsuit\clubsuit$ ,  $\diamond\diamond\diamond$ ,  $\spadesuit\spadesuit\spadesuit\spadesuit$ ,  $\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$ ,

Se você não conseguiu identificar todos os padrões, não se preocupe! Alguns são mesmo desafiadores... Tente voltar neles depois.

### 5.3 Sequências

Por sua vez, uma **sequência** ou, **sucessão**, é uma ordem de objetos ou elementos que pode ser finita ou infinita. Considere uma competição de Matemática entre as equipes abaixo. A colocação final dos grupos foi:

- **1º lugar** – Equipe  $\alpha$  Fibonacci.
- **2º lugar** – Equipe  $\beta$  Tales.
- **3º lugar** – Equipe  $\gamma$  Newton.
- **4º lugar** – Equipe  $\phi$  Euclides.

Dessa forma, podemos escrever a classificação da seguinte maneira: (Equipe  $\alpha$  Fibonacci, Equipe  $\beta$  Tales, Equipe  $\gamma$  Newton e Equipe  $\phi$  Euclides). Essa ordem forma uma **sequência**. Observe que se adicionarmos outras equipes, teremos uma sequência diferente, bem como se alterarmos a ordem das equipes, pois a ordem da colocação é importante.

Note que os termos de uma sequência são escritos entre parênteses, e separados por vírgula ou ponto e vírgula. Abaixo podemos ver outros exemplos de sequências:

1. (1, 2, 3, 4, 5).
2. (2, 4, 6, 8, ...).
3. (Banheiro, Cozinha, Lavanderia, Quarto, Sala).
4. (a, e, i, o, u).
5. (1; 1, 1; 1, 11; 1, 111; 1, 1111; 1, 11111; ...).

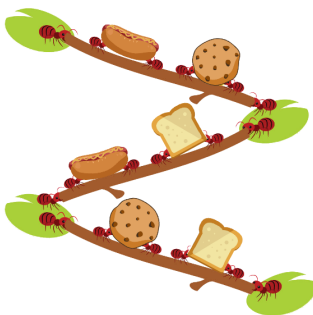
Cada elemento de uma sequência é chamado de **termo**. No exemplo 1, podemos afirmar que a sequência tem 5 termos dados por 1, 2, 3, 4 e 5. Nesse caso, dizemos que a sequência é **finita**, pois podemos determinar o número de termos que possui. As sequências 3 e 4 também são finitas. Já as sequências 2 e 5 têm incontáveis termos, como indicam as reticências (...), por isso são ditas **infinitas**.

Muitas vezes, os termos de uma sequência se repetem ou seguem um determinado padrão. É o que veremos a seguir.

## 5.4 Padrões em Sequências

Voltamos agora à situação que imaginamos no início da aula. Ainda entretida com as formigas, Ana percebe que elas formam uma grande trilha carregando alimentos até seu formigueiro. Muito

organizadas, as formigas tomam um padrão para realizar o seu trabalho:



Elas levam os 3 tipos de lanche - pão, cookie e cachorro-quente - sempre na mesma ordem, formando uma sequência: (pão, cookie, cachorro-quente, pão, cookie, cachorro-quente, ...). Como há um padrão que se repete nessa sequência, podemos descobrir qual é o próximo alimento a ser levado olhando apenas para o anterior. Assim, sabemos que o 7º alimento é um pão, pois o anterior foi um cachorro-quente.

E se quisermos saber qual será o 11º lanche a ser carregado? Vamos fazer uma tabela:

| 1º                                                                                  | 2º                                                                                  | 3º                                                                                  | 4º                                                                                  | 5º                                                                                  | 6º                                                                                  | 7º                                                                                  | 8º                                                                                  | 9º                                                                                  | 10º                                                                                 | 11º                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Veja que no 4º termo o padrão (pão, cookie, cachorro-quente) se inicia mais uma vez, assim como no 7º e no 10º, em que o alimento carregado é o pão. Assim, entre o 1º e o 11º termo o padrão se repete completamente três vezes e sobram ainda dois termos que não completam uma nova sequência do padrão.

Poderíamos obter esse resultado sem precisar escrever cada termo da sequência. Basta observar o termo que queremos descobrir e o **período da sequência**, ou seja, de quantos em quantos termos

o padrão se repete. Para a sequência de alimentos das formigas o padrão se repete a cada 3 lanches, então o período da sequência é 3. Fazendo a divisão  $11 \div 3$  obtemos quociente 3 e resto 2. O quociente nos diz quantas vezes o padrão se repete completamente até o  $11^\circ$  termo, e o resto nos diz quantos termos tem no próximo padrão, que ficará incompleto. Dessa forma, sabemos que o  $11^\circ$  termo é igual ao  $2^\circ$  alimento, o cookie.

Com esse raciocínio podemos descobrir qualquer termo da sequência, até mesmo o  $2020^\circ$ ! Fazendo a divisão  $2020 \div 3$ , obtemos quociente 673 e resto 1. Dessa forma o padrão se repete 673 vezes, e o  $2020^\circ$  termo da sequência é igual ao primeiro alimento, o pão.

E quantos pães foram levados para o formigueiro até o  $2020^\circ$  alimento? Como o padrão se repetiu 673 vezes, e em cada um o pão foi levado uma vez, o formigueiro tem 673 pães mais um pão (o termo do resto da divisão), ou seja, 674 pães.

Vamos descobrir qual será o  $999^\circ$  lanche. Realizando a divisão  $999 \div 3$ , obtemos quociente 333 e resto 0. Veja que o padrão se repete completamente 333 vezes e não sobram termos depois disso. Então o  $999^\circ$  termo é o último termo do padrão, o cachorro-quente.

Para obtermos informações sobre o  $n^\circ$  termo dessa sequência, dividimos  $n$  pelo período:

- O **resto** nos diz qual é o  $n^\circ$  termo;

se  $r = 0$ , o  $n^\circ$  termo é igual ao último elemento do padrão

se  $r = 1$ , o  $n^\circ$  termo é igual ao primeiro elemento

se  $r = 2$ , o  $n^{\circ}$  termo é igual ao segundo elemento, e assim por diante

- O **quociente** nos diz quantas vezes o padrão se repete completamente até o  $n^{\circ}$  termo.

**Atenção!** Em algumas sequências, o padrão só começa depois de alguns termos. Nos casos em que o padrão da sequência só se repita depois de um determinado termo, devemos considerar apenas a parte da sequência em que o padrão aparece. Veja um exemplo.

**Exercício Resolvido 5.1.** Ana entrou de férias! Elas começaram no dia 10 de Dezembro e vão até 14 de fevereiro. Como é uma menina muito organizada, Ana já planejou como vai aproveitar o seu tempo. Nos primeiros 8 dias, ajudará seus pais na horta de casa. Depois deve seguir o seguinte cronograma, que se repete a cada 5 dias: no  $1^{\circ}$  dia, ir ao cinema; no  $2^{\circ}$ , ficar em casa lendo; no  $3^{\circ}$ , assistir a filmes na TV; no  $4^{\circ}$ , ir ao parque; e no  $5^{\circ}$ , jogar video game. O que Ana fará no seu último dia de férias?

**Solução.** Entre 10 de Dezembro e 14 de Fevereiro se passam 22 dias em Dezembro, 31 em Janeiro e 14 em Fevereiro, totalizando  $22 + 31 + 14 = 67$  dias de férias. Esse é o tamanho da nossa sequência. Porém, ela começa a repetir o padrão do cronograma apenas a partir do  $9^{\circ}$  dia, de modo que a parte da sequência que segue o padrão possui  $67 - 8 = 59$  termos. É **apenas nessa parte** que devemos aplicar o raciocínio desenvolvido acima.

O último dia das férias de Ana é o último termo dessa parte da sequência, ou seja, o  $59^{\circ}$  termo. Agora basta dividir 59 por 5 (o tamanho do padrão): obtemos quociente 11 e resto 4.

Assim, no último dia de férias Ana fará o mesmo que no  $4^{\circ}$  dia do seu cronograma: irá ao parque.

□

**Exercício Resolvido 5.2.** Encontre o  $99\,999^{\circ}$  termo da sequência  $(a, b, c, a, b, c, \dots)$ .

**Solução.** O período é 3. A divisão  $99\,999 \div 3$  tem quociente  $33\,333$  e resto 0, então o  $99\,999^{\circ}$  termo é igual ao último termo do padrão:  $c$ .

□

**Exercício Resolvido 5.3.** (OBM - 2003) Considere a sequência oscilante:

$1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, \dots$

Qual é o  $2020^{\circ}$  termo desta sequência?

**Solução.** A sequência  $1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2$  começa a se repetir a partir do  $9^{\circ}$  termo, então seu período é 8. Fazendo a divisão  $2020 \div 8$ , obtemos quociente 252 e resto 4. Ou seja, até o  $2020^{\circ}$  termo, a sequência se repete completamente 252 vezes, e sobram ainda 4 termos após sua última repetição completa. Esses 4 termos são, em ordem, 1, 2, 3 e 4, e portanto o  $2020^{\circ}$  termo da sequência é 4.

□

---

### Exercício de Fixação

1. Para cada item, encontre o período da sequência e o valor do termo indicado:

(a)  $3030^{\circ}$  termo da sequência  $(1, 22, 333, 4444, 1, 22, 333, \dots)$ .

(b)  $123\,456\,789^{\circ}$  termo da sequência  $(M, S, K, M, S, K, M, \dots)$ .

(c)  $32\,123^{\circ}$  termo da sequência  $(\triangle, \blacklozenge, \heartsuit, \blacksquare, \triangle, \blacklozenge, \heartsuit, \blacksquare, \dots)$ .

(d)  $293\,102\,345\,231\,940^{\circ}$  termo da sequência  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 5, 2, 3, \dots)$ .

## 5.5 Progressão Aritmética

Como vimos até então, podemos ter sequências de todo o tipo de objetos: dias, alimentos, números, nomes, cores, e muitas outras. Agora, trabalharemos exclusivamente com sequências de números. Uma das principais é a Progressão Aritmética (PA), onde os números estão ordenados seguindo uma **razão** (ou uma lógica!).

Observe as seguintes sequências:

$$(1, 6, 9, 14, 43 \dots)$$
$$(1, 6, 11, 16, 21 \dots).$$

Podemos observar que a segunda sequência parece ter “mais sentido” que a primeira. Isso porque conseguimos prever quais são os números que seguem nela. Já na primeira sequência, os números parecem não apresentar nenhuma lógica, de forma que não podemos imaginar quais são os seus próximos termos.

Vamos então descobrir os próximos termos da segunda sequência. Observe que cada termo a partir do segundo é obtido somando 5 ao termo anterior:  $6 = 1 + 5$ ,  $11 = 6 + 5$ ,  $16 = 11 + 5$ , e assim por diante. Então o próximo termo dessa sequência é  $21 + 5 = 26$ , e o termo seguinte é  $26 + 5 = 31$ , e poderíamos seguir encontrando tantos termos quanto quiséssemos.



Note que encontramos a lógica da sequência: ela progride com seus termos pulando de 5 em 5. Temos aqui uma **Progressão Aritmética (PA)**: uma sequência numérica em que cada termo é formado pela **soma** do termo anterior com algum valor pré-definido. Esse é um exemplo de PA **crescente**.

Vejamos mais alguns exemplos de Progressões Aritméticas:

- $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ .
- $(3, 7, 11, 15, 19)$ .

- $(101, 123, 145, 167, \dots)$ .

O valor pré-definido que somamos a cada termo de uma sequência é chamado de **razão**, e representado pela letra  $r$ . Assim, as razões dos exemplos são  $r = 1$ ,  $r = 4$  e  $r = 22$ , respectivamente.

Note que podemos obter a razão de uma PA subtraindo um termo qualquer do termo seguinte. Assim, se tomarmos o quarto termo do segundo exemplo, temos que  $r = 19 - 15 = 4$ . E veja que devemos obter esse resultado partindo de qualquer um dos termos:  $r = 7 - 3 = 11 - 7 = 15 - 11 = 19 - 15 = 4$ .

Será que é possível termos uma PA com razão zero? Note que, ao somarmos zero a cada termo, ele não se altera. Então teríamos uma sequência sempre com o mesmo número, por exemplo:

$$(2, 2, 2, 2, \dots)$$

$$(1234, 1234, 1234, \dots).$$

E então, será que essas sequências são PAs? A resposta é sim! E essas sequências são chamadas **constantes**.

Além desse, podemos construir um outro tipo de PA. Ao invés de somarmos a cada termo um valor fixo, podemos **subtraí-lo**. Obteremos então uma sequência em que os valores vão **diminuindo** a cada termo, formando uma PA **decrecente**:

$$(25, 23, 21, \dots)$$

$$(123, 112, 101, 90, \dots)$$

$$(5, 4, 3, 2, \dots).$$

Para escrever a razão de PAs decrescentes, escrevemos o sinal  $(-)$  antes da razão, pois estamos subtraindo o valor dos termos. Assim, a razão das sequências acima são  $r = -2$ ,  $r = -11$  e  $r = -1$ , respectivamente. Se seguirmos subtraindo os termos das progressões decrescentes, chegaremos em **números negativos**.

**Exercícios de fixação**

1. Quantos termos de uma PA são necessários para descobrirmos sua razão? Justifique!
2. E se tivermos a razão de uma PA, qual a quantidade mínima de termos que precisamos para saber qual é a sequência? Justifique!
3. Qual é a razão das seguintes PAs?
  - (a)  $(11, 33, 55, 77, \dots)$ .  $r =$
  - (b)  $(77, 55, 33, 11, \dots)$ .  $r =$
  - (c)  $(77, 77, 77, \dots)$ .  $r =$
  - (d)  $(1, 2, \dots)$ .  $r =$
  - (e)  $(100, 1000, \dots)$ .  $r =$
4. Construa a PA infinita em que:
  - (a) O primeiro termo é 5 e  $r = 6$ .
  - (b) O primeiro termo é 15 e  $r = -1$ .
  - (c) O segundo termo é 100 e  $r = 0$ .
  - (d) Os dois primeiros termos são 44 e 55.
  - (e) Os dois primeiros termos são 55 e 44.
5. Crie uma sequência diferente das citadas acima que seja considerada uma PA.
6. Diga se cada uma das sequências é uma PA.
  - (a)  $(1, 2, 3, 4, 5)$ .
  - (b)  $(1, 2, 4, 7, 15, \dots)$ .

- (c)  $(8, 16, 24, 32, 40, \dots)$ .
- (d)  $(7, 14, 28, 56, \dots)$ .
- (e) Os múltiplos de 5.
- (f) Os números primos.
- (g) Os números pares.
- (h) Os divisores de 45.
- (i) Os números ímpares.

7. Qual a soma dos números de 1 a 20?

### 5.5.1 Um Desafio (Aparentemente!) Exaustivo

Imagine que o professor do POTI propôs um desafio à turma: “Quero ver quem encontra primeiro a soma de todos os números de 1 a 100!”. O que você faria para ganhar?

Esse mesmo desafio foi proposto para uma turma de alunos muito bagunceiros no século XVIII, e, surpreendentemente, um aluno o resolveu em apenas alguns minutos! Você consegue imaginar como ele fez isso?

Esse aluno tão esperto se chamava Gauss, que depois se tornou um matemático muito famoso! E para resolver essa soma, ele escreveu os números em ordem crescente, e, logo abaixo, escreveu-os novamente, mas em ordem decrescente:

|     |    |    |    |     |    |    |    |     |
|-----|----|----|----|-----|----|----|----|-----|
| 1   | 2  | 3  | 4  | ... | 97 | 98 | 99 | 100 |
| 100 | 99 | 98 | 97 | ... | 4  | 3  | 2  | 1   |



Em seguida, Gauss percebeu que a soma dos números na vertical era sempre a mesma:

|   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|   | 1   | 2   | 3   | 4   | ... | 97  | 98  | 99  | 100 |
| + | 100 | 99  | 98  | 97  | ... | 4   | 3   | 2   | 1   |
|   | 101 | 101 | 101 | 101 | ... | 101 | 101 | 101 | 101 |

Observe que o número 101 aparece 100 vezes na soma. Então, para sabermos o valor da soma de todos aqueles números, basta calcularmos  $101 \times 100$ . Mas veja que somamos todos os números de 1 a 100 de forma duplicada, pois cada um deles aparece na primeira e na segunda linha. Assim, para chegarmos à soma dos 100 primeiros números, devemos dividir o resultado anterior por 2:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 = \frac{101 \times 100}{2} = 5050.$$

**Exemplo 5.1.** Imagine que, agora, o professor do POTI lança um segundo desafio para a turma: encontrar a soma de todos os múltiplos de 6 com dois algarismos. Será que conseguimos encontrar o resultado usando a mesma ideia de Gauss?

Vamos primeiro encontrar os valores que queremos somar. Os números de 2 algarismos são aqueles entre 10 e 99. O primeiro múltiplo de 6 entre esses é o 12, e o último é o 96. Observe então que temos a seguinte PA:

$$(12, 18, 24, 30, \dots, 78, 84, 90, 96).$$

Somando os termos como Gauss fez, temos:

|   |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
|   | 12  | 18  | 24  | 30  | ... | 78  | 84  | 90  | 96  |
| + | 96  | 90  | 84  | 78  | ... | 30  | 24  | 18  | 12  |
|   | 108 | 108 | 108 | 108 | ... | 108 | 108 | 108 | 108 |

Agora, precisamos saber quantas vezes a soma 108 aparece na conta acima. Note que ela aparece uma vez para cada termo da PA, então, precisamos descobrir quantos termos tem essa PA.

Para isso, contamos quantas vezes somamos a razão. Por exemplo, para os primeiros 4 termos da PA (12, 18, 24 e 30) somamos a razão (6) 3 vezes: uma vez a cada termo, exceto para o primeiro:

$$12 \xrightarrow{+6} 18 \xrightarrow{+6} 24 \xrightarrow{+6} 30.$$

Por outro lado, podemos saber quantas vezes a razão foi somada subtraindo o primeiro termo do último e dividindo o resultado pela razão:

$$30 - 12 = 18 \rightarrow 18 \div 6 = 3.$$

Voltando para o desafio da turma, vejamos quantas vezes a razão foi somada na PA entre 6 e 96:

$$96 - 12 = 84 \rightarrow 84 \div 6 = 14.$$

Então, há  $14 + 1 = 15$  termos nessa PA (um termo para cada vez que somamos a razão mais o primeiro termo). Logo, a soma 108 aparece 15 vezes. Como somamos a PA de forma duplicada, o resultado é  $\frac{108 \times 15}{2} = 810$ .

**Exercício Resolvido 5.4.** (OBM - 2008) Para construir o arranjo triangular a seguir, que tem 2020 linhas, obedeceu-se a uma certa regra:

```

      O
     OB
    OBM
   OBMO
  OBMOB
 OBMOBM
OBMOBMO

```

- (a) Quantas vezes a palavra OBM aparece completamente na maior coluna desse arranjo?

**Solução.** A maior coluna do arranjo, a coluna mais à direita do triângulo, tem 2020 linhas. Obtemos a palavra OBM completamente a cada três linhas. Como  $2020 \div 3 = 673,33 \dots$  o total de vezes que a palavra aparece completamente na coluna é 673.

□

(b) Quantas vezes a letra O aparece no arranjo?

**Solução.** Esse item é desafiador, então não se preocupe se você não entender a resolução em uma primeira leitura.

Observe as diagonais em que aparecem as letras O:



Na primeira diagonal, a letra O aparece em cada uma das linhas do arranjo. Como são 2020 linhas, ela aparece 2020 vezes nessa diagonal. A segunda diagonal de Os começa 3 linhas abaixo da primeira, e, portanto, tem  $2020 - 3 = 2017$  letras. Seguindo a mesma ideia, a terceira diagonal terá 2014 letras O.

Do item a, sabemos que na última coluna aparecem 673 vezes a letra O para as palavras OBM completas. Como a divisão de 2020 por 3 deixa resto 1, sabemos que além das 673 vezes em que a palavra OBM aparece completa, há ainda mais uma letra O na coluna. Dessa forma, ela aparece 674 vezes na última coluna, então temos 674 diagonais de Os. Assim, queremos somar:

$$2020 + 2017 + 2014 + \dots + 7 + 4 + 1.$$

Da aula de hoje, sabemos que podemos efetuar essa soma da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccccccc}
 & 2020 & 2017 & 2014 & \dots & 7 & 4 & 1 \\
 + & 1 & 4 & 7 & \dots & 2014 & 2017 & 2020 \\
 \hline
 & 2021 & 2021 & 2021 & \dots & 2021 & 2021 & 2021
 \end{array}
 .$$

A soma 2021 aparece 674 vezes, mas precisamos dividi-la por 2 pois somamos duas vezes a sequência. Então, o número de vezes em que a letra O aparece no arranjo é

$$\frac{2021 \cdot 674}{2} = 681\,077.$$

□

### Exercícios de fixação

1. Determine quantos termos tem cada PA:

- (a)  $(3, 6, 9, \dots, 60, 63)$ .
- (b)  $(30, 41, 52, \dots, 173)$ .
- (c)  $(10, 11, 12, \dots, 98, 99, 100)$ .
- (d)  $(1007, 1014, \dots, 1700)$ .

2. Determine a soma:

- (a) De todos os números de 1 a 200.
- (b) De todos os termos da PA  $(3, 5, 7, \dots, 2017, 2019, 2021)$ .
- (c) De todos os múltiplos de 3 com 3 algarismos.

3. Calcule a soma de todos os números positivos ímpares até 2007 menos a soma de todos os números positivos pares até 2007.

## 5.6 Contagem

Assim como os padrões e as sequências, a contagem está muito presente no nosso dia a dia. Podemos contar, por exemplo, quantas pessoas fazem parte de uma turma, ou quantos anos uma pessoa tem. Existem diversas formas de contar, por exemplo, se as pessoas de uma turma estão dispostas em filas iguais, eu posso multiplicar o número de filas pelo número de pessoas por fila para saber o total de pessoas.

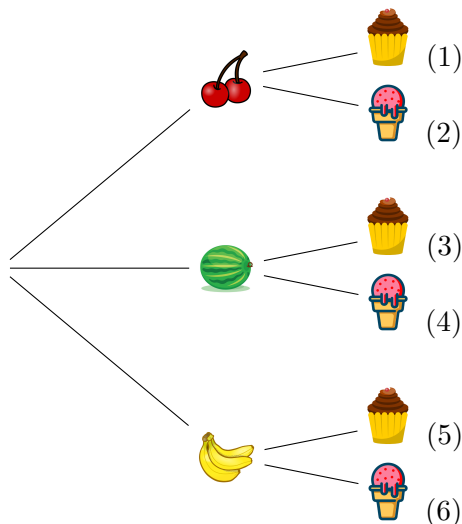
### 5.6.1 Quantas opções eu tenho?

Mais do que objetos, nessa aula, aprenderemos a contar **possibilidades**. “De quantas formas eu posso fazer uma escolha?” Essa é uma questão muito comum nas Olimpíadas de Matemática.

**Exemplo 5.2.** Ana vai fazer uma pausa nos seus estudos, enquanto faz um lanche. Ela quer comer uma fruta e um doce de sobremesa, e está em dúvida sobre o que escolher. Ela tem na sua casa cereja, melancia e banana, e de sobremesa, cupcake e sorvete de morango. De quantas formas diferentes ela pode escolher o seu lanche?



Podemos pensar em cada possibilidade que Ana tem, escolhendo primeiro a fruta, e depois a sobremesa. Veja o diagrama:



Vamos chamar esse diagrama de **árvore de possibilidades**. Cada caminho é uma das opções que Ana tem para escolher seu lanche. Por exemplo, ela pode comer uma banana e um cupcake (caminho 5), ou uma cereja e um sorvete (caminho 2). Note que **todas** as possibilidades estão representadas na árvore.

Ela tem 3 opções de fruta, e, **para cada** fruta, 2 opções de sobremesa. Veja que a conta que precisamos fazer para encontrar as possibilidades é  $3 \times 2$ .

Para esse exemplo foi possível contar as possibilidades caso a caso. Mas suponha agora que Ana tenha 6 opções de fruta, e 10 opções de sobremesa. Montar cada uma das possibilidades que ela tem para combinar as frutas com as sobremesas seria muito trabalhoso. Mas podemos saber quantas possibilidades são contando da mesma forma que no exemplo anterior: Ana tem 6 possibilidades para escolher a fruta, e **para cada** fruta, 10 possibilidades para escolher a sobremesa. Então, no total ela tem  $6 \times 10 = 60$  possibilidades.

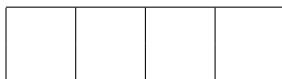
Para resolver esse problema, usamos a ideia do **Princípio Multiplicativo**, que veremos a seguir.

## 5.7 Princípio Multiplicativo

Por sua vez, o **Princípio Multiplicativo**, também chamado de Princípio Fundamental da Contagem (PFC), é utilizado para resolver problemas em que temos mais de uma possibilidade para escolher.

Para encontrar a solução usando esse princípio, devemos multiplicar o número de possibilidades de cada decisão a ser tomada para sabermos o número de possibilidades total. Veja mais uma situação em que usamos o Princípio Multiplicativo:

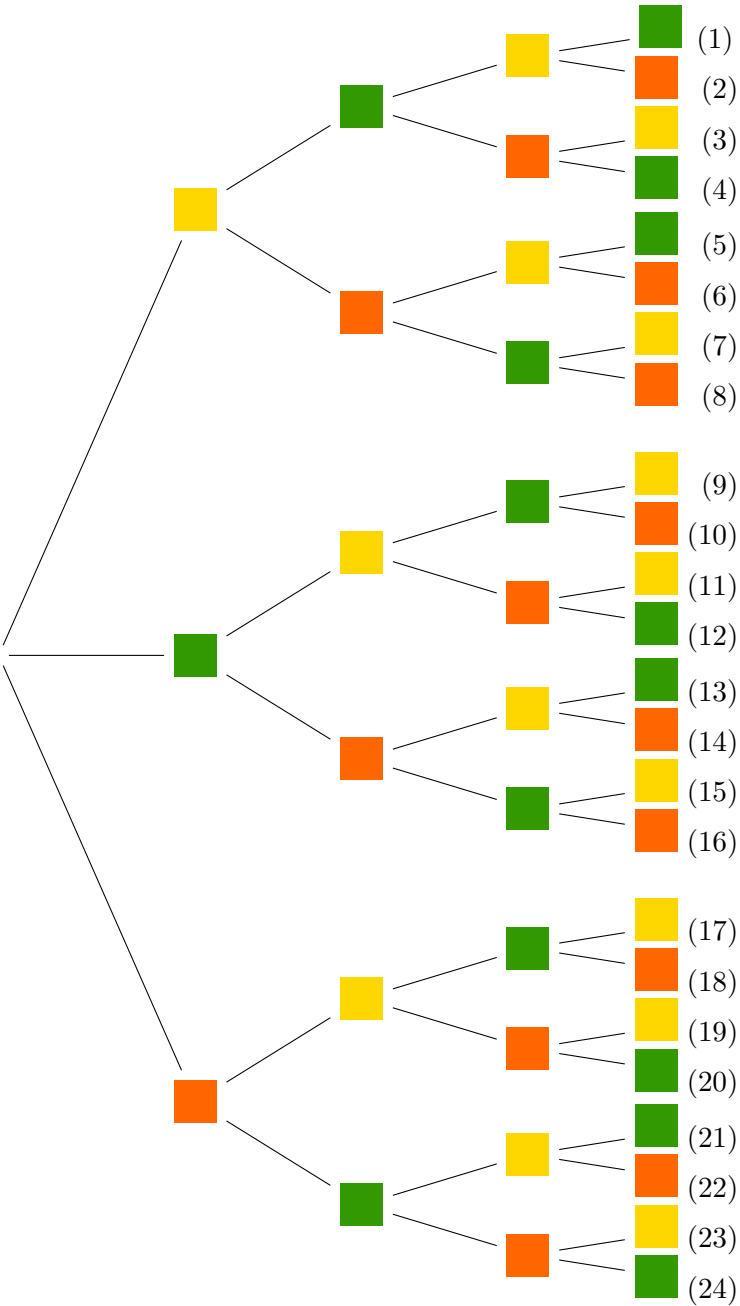
**Exemplo 5.3.** De quantos modos diferentes podemos pintar um tabuleiro  $1 \times 4$  usando apenas três cores, sem pintar casas vizinhas da mesma cor?



**Solução.** Vamos pensar nas possibilidades de pintar cada casa do tabuleiro.

- Para a primeira casa, não há restrições, então temos 3 opções de cores;
- Para a segunda, temos agora uma restrição, já que a cor da primeira casa já foi escolhida, e não podemos pintar a segunda casa com a mesma cor que a primeira. Restam então 2 opções para a segunda casa;
- Para a terceira e quarta casas, da mesma forma, teremos 2 opções para cada, uma vez que a cor da casa à esquerda já foi escolhida.

Assim, pelo Princípio Multiplicativo, multiplicamos as opções para cada casa:  $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$  modos diferentes de pintar o tabuleiro. Considere as cores amarelo, verde e laranja. Veja como ficaria a árvore de possibilidades para esse exercício.



□

**Exemplo 5.4.** Quantos números pares de dois algarismos existem?

**Solução.** Nessa questão, não precisamos contar os números um a um (felizmente!). Vamos pensar nos valores que cada um dos algarismos pode assumir, e usar o Princípio Multiplicativo.

Note que para o algarismo das dezenas, temos 9 possibilidades: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Observe que não podemos atribuir o dígito 0, pois assim o número teria apenas um algarismo.

Para o algarismo das unidades, como o número deve ser par, podemos ter: 0, 2, 4, 6 e 8. Então, há 5 possibilidades.

Assim, no total existem  $9 \times 5 = 45$  números pares de dois algarismos.

□

---

### Exercícios de Fixação

1. De quantos modos diferentes podemos pintar um tabuleiro  $1 \times 3$  usando apenas três cores, sem pintar casas vizinhas da mesma cor? E um tabuleiro  $1 \times 5$ ?
2. Tadeu tem uma camiseta azul e uma preta, e 3 bermudas: uma roxa, uma branca, e uma vermelha. Faça a árvore de possibilidades com todas as formas que ele pode se vestir.
3. De quantas formas diferentes 6 carros podem ser estacionados nas 6 vagas de um estacionamento?
4. Tomé vai pintar as 4 paredes do seu quarto, cada uma de uma cor diferente. De quantas formas ele pode pintar tendo 6 cores diferentes?
5. Quantos números naturais de dois algarismos distintos existem?
6. De quantos modos 3 pessoas podem sentar-se em 5 cadeiras em fila?

## 5.8 Calculando possibilidades

Existem diversas maneiras de resolver exercícios de contagem. Entre elas, encontramos o **método da fila**, no qual precisamos separar as possibilidades em casos, e a resposta final será a soma das possibilidades obtidas em cada caso.

### 5.8.1 Contando em fila

Para resolver alguns problemas de contagem, devemos transformá-los em problemas de contagem em fila para facilitar a resolução.



Suponha que você e mais quatro amigos vão ao cinema. Na hora de comprar os ingressos vocês formam uma fila. De quantas formas possíveis vocês podem formar essa fila?

Existem cinco lugares na fila, e você pode escolher qualquer um dos cinco lugares. Já a segunda pessoa a entrar na fila tem apenas quatro escolhas, já que ela não pode estar no mesmo lugar que você. A terceira pessoa tem apenas três escolhas. A quarta pessoa apenas duas escolhas. Finalmente, a quinta pessoa tem apenas uma opção. Sendo assim, o número de formas de se formar a fila é  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ .

Esse processo é conhecido na Matemática como **fatorial**. Essa operação é feita com números naturais positivos e é representada por “ $n!$ ”. O fatorial de um número é calculado pela multiplicação desse número por todos os seus antecessores até chegar ao número 1.

Por exemplo, o fatorial de 4 é representado por  $4!$  e é calculado da seguinte forma:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Se você fosse ao cinema com nove amigos, poderia usar o mesmo raciocínio para encontrar de quantas maneiras vocês poderiam se sentar em uma fileira de cadeiras:

$$10 \cdot 9 \cdots 2 \cdot 1 = 3628800$$

Como existem dez lugares, você tem dez modos de escolher, a próxima pessoa apenas nove, pois não pode ocupar o mesmo lugar que você, a próxima oito, e assim por diante.

Dessa forma, podemos enunciar que: *O número de formas de se colocar  $n$  objetos distintos em uma fila com  $n$  lugares é  $n!$ .*

Com esse enunciado podemos resolver diversos problemas de contagem.

**Exemplo 5.5.** De quantas formas podemos colocar oito livros distintos numa estante?

**Solução.** Como colocaremos os livros em fila na estante, a resposta é  $8!$ .

□

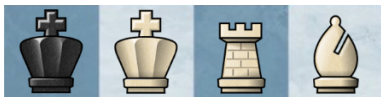
**Exemplo 5.6.** Dezesete pessoas estão apostando uma corrida. Supondo que duas ou mais não cheguem ao mesmo tempo na linha de chegada, quantos são os resultados possíveis para essa corrida?

**Solução.** Como cada corredor chega sozinho na linha de chegada, podemos comparar o resultado com uma fila: o vencedor é o primeiro da fila, o segundo colocado é o segunda da fila, e assim por diante. Como o número de formas de colocar dezessete pessoas em fila é  $17!$ , esse é o número de resultados possíveis para essa corrida.

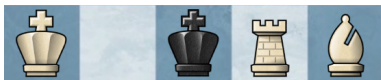
□

## O Método da Fila

Suponha que você queira determinar de quantas formas podemos colocar um rei branco, uma torre branca, um bispo branco e um rei preto num tabuleiro  $1 \times 4$ . Essa é fácil! Como as peças são distintas e formam uma fila, a resposta é  $4! = 24$ .



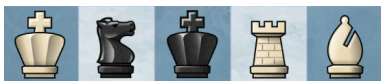
Mas o que aconteceria se o tabuleiro fosse  $1 \times 5$ ?



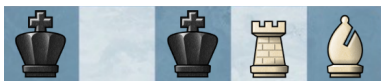
A resposta não é mais  $4!$ , pois as casas vazias fazem a diferença, e não temos mais uma fila no sentido em que estávamos tratando.

Nessas horas basta ser criativo. Podemos solucionar o segundo caso imaginando que o espaço vazio que sobraré é uma peça!

Imagine que você vai colocar um rei branco, uma torre branca, um bispo branco, um cavalo preto e um rei preto num tabuleiro  $1 \times 5$ .



De quantas formas podemos fazer isso? Como todas as peças são distintas, então a resposta é  $5!$ . Removendo o cavalo caímos no problema anterior. E se os dois reis fossem pretos?



Como os objetos não são distintos, não podemos afirmar que o resultado seja  $5!$ . Essa seria a resposta caso os reis fossem diferentes.

Mas, onde está o problema? Vamos enumerar os reis e ver algumas combinações possíveis.



Como podemos ver nas duas situações, estamos contando o mesmo caso duas vezes: esse é o problema de supor que as peças são diferentes quando não são. Como corrigimos isso? Vamos esquecer as outras peças do tabuleiro, e focar apenas na ordem em que os reis estão, da esquerda para a direita. Observe que cada uma das configurações possíveis do tabuleiro se mantém a mesma quando trocamos a ordem dos reis 1 e 2. Ao contar todas as configurações, incluímos essas repetições dobradas de cada uma, e então, para compensar, devemos dividir o resultado por 2. Logo, a resposta final é  $\frac{5!}{2}$ .

## 5.9 Anagramas

Um **anagrama** de uma palavra é uma outra palavra formada pelas mesmas letras (mesmo que essa nova palavra não tenha significado). Por exemplo, são anagramas da palavra VETORES as palavras SORVETE e STERVOE. Observe que ambas as palavras possuem uma le-



tra V, uma letra T, uma letra O, uma letra R, uma letra S e duas letras E.

Podemos pensar no anagrama como um embaralhamento das letras da palavra original. Nosso objetivo agora é encontrar o número de anagramas de algumas palavras. Vamos considerar que a própria palavra é um anagrama de si mesma.

**Exemplo 5.7.** Quantos anagramas a palavra VETOR possui?

**Solução.** Podemos pensar nas letras de um anagrama como objetos em fila. No caso, os objetos são as letras V, E, T, O e R, como são 5 objetos distintos, a resposta é  $5!$ .

□

**Exemplo 5.8.** Quantos anagramas a palavra LUTADORES possui?

**Solução.** Pensando nos anagramas como 9 objetos distintos em fila, temos que a resposta é  $9!$ .

□

**Exemplo 5.9.** Quantos anagramas a palavra ALEGRE possui?

**Solução.** Aqui temos uma pequena diferença em relação aos casos anteriores. A palavra ALEGRE possui duas letras repetidas. Vamos tratar isso como tratamos com as peças de xadrez no tabuleiro. Primeiramente consideramos todas as letras distintas (enumeramos as letras E como  $E_1$  e  $E_2$ ), e em seguida removemos as contagens repetidas. O número de formas de colocar 6 objetos em fila é  $6!$ , mas como duplicamos as soluções considerando as letras E como distintas, devemos dividir a solução por 2 e a resposta é  $\frac{6!}{2}$ .

□

Todo anagrama deve ser tratado dessa forma. Primeiro supomos que todas as letras são distintas, caindo no caso da fila. Em seguida, removemos os casos de contagem repetida.

---

### Exercícios de fixação

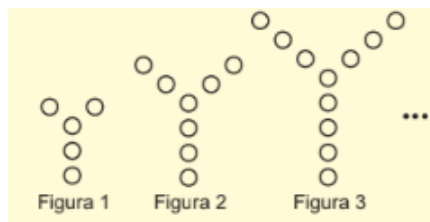
1. Encontre a quantidade de anagramas das seguintes palavras:
    - (a) Garfo.
    - (b) Caderno.
    - (c) Quadrado.
    - (d) Velocidade.
    - (e) Geometria.
    - (f) (seu primeiro nome).
  2. De quantos modos diferentes podem ser escolhidos um presidente e um secretário de um conselho que tem 12 membros?
  3. Quando jogamos duas vezes a mesma moeda, qual a possibilidade de obtermos duas vezes a face cara?
  4. Ao lançar duas moedas, qual a chance de tirarmos uma cara e uma coroa? E de obtermos duas coroas?
- 

### Exercícios Propostos

|                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
| Fácil                                                                               | Médio                                                                               | Difícil                                                                             | Desafio                                                                             |

1. (OBM - 2004) De quantos modos diferentes podemos pintar (usando apenas uma cor) as casas de um tabuleiro  $4 \times 4$  de modo que cada linha e cada coluna possua exatamente uma casa pintada?
2. (OBM - 2018) Considere abaixo as sequencias de números inteiros que possuem as duas propriedades a seguir:
  - Os dois primeiros termos são dados.

- Cada um dos termos seguintes é o resto da divisão por 9 do produto dos dois termos anteriores.
- (a) Qual é o vigésimo termo da sequência 2, 3, ...?
- (b) Qual é o 2018º termo da sequência 1, 2, ...?
- (c) Apresente duas sequências cujo 2018º termo é igual a 1.
3. (OBMEP - 2019) Observe a sequência de figuras abaixo, todas elas com a forma da letra Y. Seguindo este padrão, quantas bolinhas terá a 15ª figura?



4. Quantos anagramas possui a palavra OLIMPIÁDA? (desconsidere o acento)
5. (OBMEP - 2009) Luis escreveu a sequência de números naturais a partir de 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...

Quando ele escreveu o algarismo 3 pela 25ª vez?

6. (OBMEP - 2013) Ariadne brinca com números de dois ou mais algarismos. Ela soma, aos pares, os algarismos do número, da esquerda para a direita, e escreve os resultados em ordem; em seguida, ela repete a brincadeira com o novo número e assim por diante. Se ela chegar a um número com um único algarismo, a brincadeira acaba. Por exemplo, de 294 ela obtém 1113, pois  $2 + 9 = 11$  e  $9 + 4 = 13$ . Depois de 1113 ela obtém 224, pois  $1 + 1 = 2$ ,  $1 + 1 = 2$  e  $1 + 3 = 4$ , e assim

por diante. Essa brincadeira acaba com 1 (faça as contas):  
 $249 \rightarrow 11113 \rightarrow 224 \rightarrow 46 \rightarrow 10 \rightarrow 1$ .

- (a) Escreva a sequência que começa com 4125.
  - (b) Escreva os seis primeiros números da sequência que começa com 995.
  - (c) Qual é o  $103^{\circ}$  número da sequência que começa com 33333?
7. O alfabeto da Tanzunlândia é formado por apenas três letras: A, B e C. Uma palavra na Tanzunlândia é uma sequência com no máximo 4 letras. Quantas palavras existem neste país?
8. (OBMEP - 2012) Numa aula de Matemática, a professora inicia uma brincadeira escrevendo, no quadro-negro, um número. Para continuar a brincadeira, os alunos devem escrever outro número, seguindo as regras abaixo:
- Se o número escrito só tiver um algarismo, ele deve ser multiplicado por 2.
  - Se o número escrito tiver mais de um algarismo, os alunos podem escolher entre apagar o algarismo das unidades ou multiplicar esse número por 2.

Depois que os alunos escrevem um novo número, a brincadeira continua com este número, sempre com as mesmas regras. Veja a seguir dois exemplos desta brincadeira, um começando com 203 e o outro com 4197:

$$203 \xrightarrow{\text{dobra}} 406 \xrightarrow{\text{apaga}} 40 \xrightarrow{\text{apaga}} 4 \dots$$

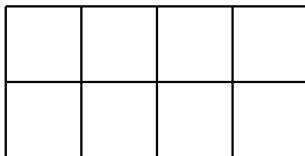
$$4197 \xrightarrow{\text{apaga}} 419 \xrightarrow{\text{dobra}} 838 \xrightarrow{\text{apaga}} 83 \dots$$

- (a) Comece a brincadeira com o número 45 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.

- (b) Comece agora a brincadeira com o número 345 e mostre uma maneira de prosseguir até chegar ao número 1.
- (c) Explique como chegar ao número 1 começando a brincadeira com qualquer número natural diferente de zero.
9. (OBMEP - 2007) Quantos fósforos são necessários para formar o oitavo termo da sequência, cujos três primeiros termos são mostrados abaixo?



10. (???) De quantas formas podemos colocar 4 bolas verdes e 4 bolas amarelas em um tabuleiro  $4 \times 4$  de modo que cada coluna e cada linha possua exatamente uma bola de cada cor?
11. (OBMEP - 2006) Em um mesmo lado de uma rua serão construídas 6 casas vizinhas. As casas podem ser de tijolo ou de madeira, mas como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras se pode planejar a construção dessas casas?
12. (OBMEP - 2014) Pepi deve colocar todos os números de 1 a 8 no seguinte tabuleiro de modo que a soma dos dois números colocados em cada coluna seja sempre o mesmo valor  $S$ .



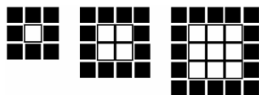
- (a) Mostre a Pepi um modo de colocar os números.
- (b) Convença Pepi de que o único valor possível para  $S$  é 9.
- (c) Calcule a quantidade de formas em que Pepi pode colocar os números.

13. (OBM - 2012) Numa sequência, cada termo, a partir do terceiro, é a soma dos dois termos anteriores mais próximos. O segundo termo é igual a 1 e o quinto termo vale 2005. Qual é o sexto termo?
14. (??) Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química, e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-lo?
15. (IME - 1998) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e um apenas do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.  
**Observação:** A ordem dos homens deve ser considerada.
16. (AIME - 1996) Duas casas de um tabuleiro  $7 \times 7$  são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas equivalentes se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?
17. (OBMEP - 2006) O desenho abaixo mostra o mapa de um país (imaginário) constituído por cinco estados. Deseja-se colorir esse mapa com as cores verde, azul e amarela, de modo que dois estados vizinhos não possuam a mesma cor. De quantas maneiras diferentes o mapa pode ser pintado?



18. (OBMEP - 2006) Uma sequência de mosaicos quadrados é construída com azulejos quadrados pretos e brancos, todos do

mesmo tamanho, como se segue: o primeiro é formado por um azulejo branco cercado por azulejos pretos, o segundo de quatro azulejos brancos cercados por azulejos pretos; e assim sucessivamente, como indica a figura. Se numa sequência de mosaicos formada de acordo com esta regra forem usados 80 azulejos pretos, quantos serão os azulejos brancos utilizados?



19. (OBMEP - 2012) Um número  $A$  de dois algarismos é um supernúmero se é possível encontrar dois números  $B$  e  $C$ , ambos também de dois algarismos, tais que:

- $A = B + C$ ;
- soma dos algarismos de  $A = (\text{soma dos algarismos de } B) + (\text{soma dos algarismos de } C)$ .

Por exemplo, 35 é um supernúmero. Duas maneiras diferentes de mostrar isto são  $35 = 11 + 24$  e  $35 = 21 + 14$ , pois  $3 + 5 = (1 + 1) + (2 + 4)$  e  $3 + 5 = (2 + 1) + (1 + 4)$ . A única maneira que 21 é um supernúmero é  $21 = 10 + 11$ .

- (a) Mostre de duas maneiras diferentes que 22 é um supernúmero e de três maneiras diferentes que 25 é um supernúmero.
  - (b) De quantas maneiras diferentes é possível mostrar que 49 é um supernúmero?
  - (c) Quantos supernúmeros existem?
20. (Portal da OBMEP) Use os dedos de uma mão para contar da seguinte maneira: o polegar é o primeiro, o indicador é o segundo e assim por diante até o mindinho, que é o quinto. Agora inverta a ordem para continuar, de modo que o anelar é o sexto, o dedo do meio é o sétimo, o indicador é o oitavo e

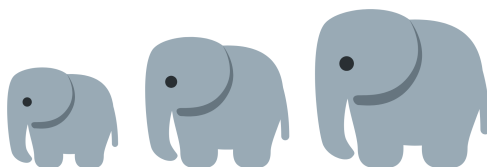
o polegar é o nono. Inverta a orientação novamente voltando para o dedo mindinho, de modo que o indicador é o décimo e assim por diante. Se você continuar a contar dessa forma, indo e voltando, com os dedos de uma mão, qual dedo será o milésimo?



## Aula 6

# Proporção e Porcentagem

Como comentamos algumas vezes, as frações têm diversos significados e, conseqüentemente, são utilizadas em diversas manipulações matemáticas. A proporção e a porcentagem também podem ser vistas como aplicações de frações.



### 6.1 Proporção

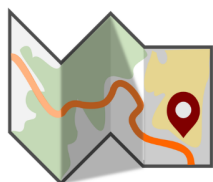
Quando falamos em proporção buscamos encontrar a relação existente entre duas ou mais grandezas. Entendemos que grandeza é tudo que pode ser medido ou contado. Alguns exemplos de grandeza são: o volume, a massa, a superfície, o comprimento, a capacidade, a velocidade, o tempo, entre outros. Por outro lado, não podemos medir matematicamente coisas como pensamentos e sentimentos, portanto não são grandezas.

As grandezas podem ter suas medidas aumentadas ou diminuídas. Por exemplo, eu posso estabelecer uma relação de proporção

entre a distância de dois lugares em um mapa e a distância real entre esses lugares, ou entre a velocidade média de um carro e o tempo para realizar uma viagem.

### 6.1.1 Proporção Direta

Na proporção direta, duas grandezas crescem ou decrescem na mesma velocidade. Vejamos um exemplo.



Ana tem um mapa, e mede a distância entre a sua cidade, Pomo, e 4 cidades que quer conhecer: Amoreira, Bergamoteira, Caramboleira e Damasqueira. Ela faz uma tabela comparando a distância que mediu no mapa com a distância real:

| Cidade       | Distância no mapa (cm) | Distância real (Km) |
|--------------|------------------------|---------------------|
| Amoreira     | 1                      | 50                  |
| Bergamoteira | 2                      | 100                 |
| Caramboleira | 3                      | 150                 |
| Damasqueira  | 12                     | 600                 |

À medida que a distância no mapa aumenta, a distância real também aumenta, e na mesma proporção. Observe que, quando a distância no mapa dobra, a distância real também é dobrada como da primeira para a segunda linha da tabela; quando a distância no mapa triplica, a real também é triplicada como da primeira para a terceira linha, e assim por diante.

Essa manipulação, em que relacionamos uma medida grande a uma medida menor visando fazer sua representação, é chamada de **escala**. No mapa de Ana, cada centímetro equivale à 50 quilômetros, ou seja, quaisquer dois pontos que distem um centímetro no mapa estão à 50 quilômetros de distância no espaço real. Iremos verificar essa proporção com os dados da tabela escrevendo frações da forma:

$$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{Distância real}}$$

$$1^{\text{a}} \text{ linha} \quad \frac{1}{50}$$

$$3^{\text{a}} \text{ linha} \quad \frac{3}{150} = \frac{1}{50}$$

$$2^{\text{a}} \text{ linha} \quad \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$$

$$4^{\text{a}} \text{ linha} \quad \frac{4}{200} = \frac{1}{50}$$

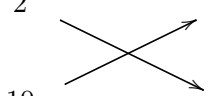
A fração obtida através de qualquer uma das linhas é sempre a mesma, pois nossos valores são diretamente proporcionais. Essa propriedade das escalas nos permitem encontrar medidas desconhecidas. Por exemplo, suponha que Ana se mudou de cidade e, depois de muitos anos, sua neta Sara encontra o mapa que ela havia produzido quando era mais nova. Agora, todas as informações estão meio borradas, mas ainda é possível ler a distância real até Bergamoteira.

Sara quer descobrir a distância real entre Pomo e a cidade de Embaubeira, local onde ela nasceu. Medindo o mapa, ela descobre que Embaubeira fica a 10 cm da cidade de sua avó Ana. Organizando essas informações, ela obtém:

| Distância no mapa | Distância real |
|-------------------|----------------|
| 2                 | 100            |
| 10                | $x$            |

Sara sabe que a proporção entre a distância na vida real e a distância representada no mapa sempre se mantém. Por isso, ela pode obter o valor desconhecido através da multiplicação. Ela irá multiplicar os valores das linhas de forma cruzada e igualar os valores obtidos. Ou seja, ela irá multiplicar o valor da distância no mapa de uma linha com o valor da distância real da outra.

| Distância no mapa | Distância real |
|-------------------|----------------|
| 2                 | 100            |
| 10                | $x$            |



$$\Rightarrow 2 \cdot x = 10 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 100}{2} \Rightarrow x = 500.$$

Podemos tirar a prova real dessa conta escrevendo a fração entre as distâncias:

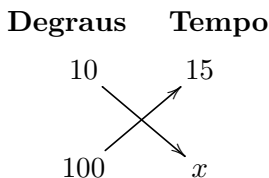
$$\frac{\text{Distância no mapa}}{\text{Distância real}} = \frac{10}{500} = \frac{1}{50}$$

Portanto, o valor encontrado está correto. A distância de Pomo à Embaubeira é de 500 km.

**Exercício Resolvido 6.1.** Rosa e Maria começam a subir uma escada de 100 degraus no mesmo instante. Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos e Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Quando uma delas chegar ao último degrau, quanto tempo faltará para a outra completar a subida?

**Solução.** Estamos analisando as grandezas números de degraus e tempo. Veja que se Rosa e Maria decidirem subir uma escada com mais degraus, elas levarão mais tempo. Então, à medida que uma grandeza aumenta, a outra também aumenta: a proporção é direta. Vamos calcular quanto tempo elas levarão para subir os 100 degraus:

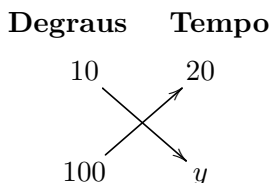
- Rosa sobe 10 degraus a cada 15 segundos. Assim:



$$\Rightarrow 10 \cdot x = 100 \cdot 15 \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 15}{10} \Rightarrow x = 150.$$

Então, para subir os 100 degraus Rosa leva 150 segundos.

- Maria sobe 10 degraus a cada 20 segundos. Assim:



$$\Rightarrow 10 \cdot y = 100 \cdot 20 \Rightarrow y = \frac{100 \cdot 20}{10} \Rightarrow y = 200.$$

Então, para subir os 100 degraus, Maria leva 200 segundos.

Logo, o tempo que faltará para Maria terminar de subir as escadas depois que Rosa tiver completado a subida é  $200 - 150 = 50$  segundos.

□

### 6.1.2 Proporção Inversa

Na proporção inversa, uma grandeza cresce na mesma velocidade que a outra decresce. Imagine que Ana e Sara estão planejando uma viagem e, para isso, fazem uma tabela do tempo que levaria para chegar de Pomo à Damasqueira de acordo com a velocidade em que viajassem:

| Velocidade (Km\h) | Tempo de viagem (h) |
|-------------------|---------------------|
| 25                | 24                  |
| 50                | 12                  |
| 100               | 6                   |

Veja que, à medida em que a velocidade aumenta, o tempo de viagem diminui: se a velocidade dobra, o tempo de viagem cai pela metade (como da terceira para quarta linha da tabela); se a velocidade quadruplica, o tempo de viagem cai para um quarto (como da segunda para a quarta linha), e assim por diante. Agora, não

podemos mais escrever frações e igualá-las, pois as grandezas são inversas. Portanto, iremos comparar os valores de duas linhas consecutivas.

$$\frac{Velocidade_1}{Velocidade_2} \qquad \frac{Tempo\ de\ viagem_1}{Tempo\ de\ viagem_2}$$

$$1^a \text{ e } 2^a \text{ linhas} \qquad \frac{25}{50} = \frac{1}{2} \qquad \frac{24}{12} = \frac{2}{1}$$

$$2^a \text{ e } 3^a \text{ linhas} \qquad \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \qquad \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$$

Quando comparamos as frações que utilizam valores de uma mesma grandeza encontramos sempre os mesmos resultados, nesse caso, a velocidade nos retorna  $\frac{1}{2}$  e o tempo 2. E, quando comparamos os resultados das frações de uma grandeza com os da outra, encontramos valores inversos.

Então, se só pudéssemos utilizar como base o tempo de viagem para a velocidade de 25 km/h, podemos descobrir quanto tempo levará se viajarmos a 75 km/h.

| Velocidade | Tempo de viagem |
|------------|-----------------|
| 25         | 24              |
| 75         | $x$             |

Se quando as medidas são diretamente proporcionais, nós multiplicamos cruzado. Agora, iremos multiplicar os valores que estão na mesma linha e igualar os resultados:

| Velocidade | Tempo de viagem |
|------------|-----------------|
| 25         | → 24            |
| 75         | → $x$           |

$$\Rightarrow 75 \cdot x = 25 \cdot 24 \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 24}{75} = 8.$$

Podemos verificar nossa resposta por meio das frações que aprendemos:

$$\frac{Velocidade_1}{Velocidade_2} = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{Tempo \text{ de viagem}_1}{Tempo \text{ de viagem}_2} = \frac{24}{8} = \frac{3}{1}$$

Como os valores encontrados são inversos, o resultado encontrado para nossa incógnita está correto. E sabemos que a viagem levará 8 horas se a velocidade do carro for de 75 km/h.

**Exercício Resolvido 6.2.** Paulinho e sua irmã saem ao mesmo tempo de casa para a escola. Paulinho vai de bicicleta, a uma velocidade média de 18 km/h, e sua irmã vai com uma moto. Ela chega 20 minutos antes de Paulinho. Neste momento, quantos quilômetros ainda faltam para Paulinho chegar?

**Solução.** Como Paulinho ainda andarás por 20 minutos depois que sua irmã chegou à escola, o que temos de descobrir é qual a distância percorrida por Paulinho durante esses 20 minutos. Mas, sua velocidade média é de 18 km/h, o que significa que a cada 1 hora (ou seja, a cada 60 minutos) Paulinho percorre 18 km. Se a cada 60 minutos Paulinho percorre 18 km, em 20 minutos quantos quilômetros ele andarás?

Vamos verificar se essa proporção é direta ou inversa. À medida que o tempo em que Paulinho anda aumenta, a distância percorrida também aumenta. Então, temos uma proporção direta.

**Tempo gasto (min)**

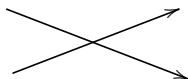
60

**Distância percorrida (km)**

18

20

$x$



$$\Rightarrow 60 \cdot x = 20 \cdot 18 \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 18}{60} \Rightarrow x = 6.$$

Portanto, em 20 minutos Paulinho andar  6 km, ou seja, faltará 6 km para ele chegar   escola.

□

---

### Exercícios de Fixação

1. Verifique se a relação de proporção   direta ou inversa, e resolva os problemas:
  - a) 3 pacotes de bolacha custam R\$25,00. Quanto custam 7 pacotes?
  - b) Ana leva uma hora para resolver 15 exercícios. Quanto tempo ela levará para resolver 50 exercícios? E quantos exercícios ela consegue fazer em meia hora?
  - c) Bolt e Flecha são lesmas que adoram correr. Elas então apostam uma corrida. Bolt corre a 50 cm/h e termina a corrida em 2 horas. Flecha termina em 5 horas. A que velocidade Flecha correu?
  - d) Carla fez uma festa para 10 pessoas, e encomendou 50 docinhos. Agora ela quer dar uma festa para 25 pessoas, e comprar a quantidade de docinhos na mesma proporção. Quantos docinhos ela deve encomendar?
  - e) Um carro usa 12 litros de gasolina para percorrer um trajeto de 84 quilômetros. Quantos quilômetros ele percorre com 1 litro de gasolina?
  - f) Na Lotomat o pr mio principal mensal tem sempre o mesmo valor e é dividido igualmente entre todos os acertadores. Em Janeiro, houveram 50 acertadores e cada

um ganhou R\$200,00. Em Fevereiro, houve outro sorteio e, dessa vez, cada acertador ganhou R\$500,00. Quantos acertadores houveram em Fevereiro?

- g) Em uma aventura, Dora vai atravessar um rio. Ela tem um mapa de escala 1:10000 e mede a largura do rio representado no mapa. Se ela mediu 2,3 cm, qual a distância real que ela precisará percorrer, em quilômetros?
- h) 25 funcionários levam 150 dias para construir determinado prédio. Se uma construtora o quisesse pronto em 100 dias, quantos funcionários seriam necessários *no mínimo*?
- i) O celular de Carlos tinha 100% de bateria quando ele começou a jogar. Ele verificou que após uma hora jogando, a bateria estava em 75%. Quantas horas Carlos ainda poderá jogar antes que a bateria de seu celular acabe completamente?

2. A escala de um mapa é uma fração que mostra a relação da distância no mapa para a distância real. O numerador leva o valor 1, e representa a distância no mapa. O denominador indica, na mesma unidade de medida, a distância real. Por exemplo, um mapa com escala 1:1000 em centímetros indica que 1 centímetro no mapa representa 1000 centímetros (ou 10 metros) na distância real. Sabendo que  $1 \text{ km} = 100000 \text{ cm}$ , qual a escala do mapa de Ana, em centímetros? (**Dica:** Use proporção para converter as medidas).
- 

## 6.2 Porcentagem

Você certamente já ouviu falar em porcentagem. No shopping, no banco, nos jornais, até mesmo na bateria do nosso celular... É

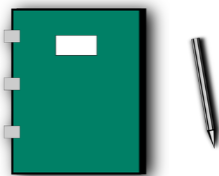
fácil percebê-la no nosso dia a dia. A porcentagem é uma fração que sempre terá denominador igual a 100. Ou seja, ela é uma **razão** que representa uma quantidade em relação a 100. Por exemplo, se eu tiver 50% de suco em uma garrafa, tenho  $\frac{50}{100}$  de suco. Ainda,  $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ , então eu tenho metade da garrafa de suco.

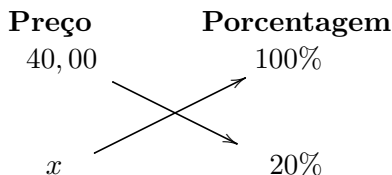
As frações com numerador menor que o denominador representam uma parte do todo como no caso de meio  $\left(\frac{50}{100}\right)$ , um quarto  $\left(\frac{25}{100}\right)$  entre outras. O número 1 representa o total, pois é equivalente à fração  $\frac{100}{100}$ . Por sua vez, se tivermos uma fração com numerador maior que o denominador, teremos uma quantidade maior do que 1. Por exemplo, se uma receita pede  $\frac{3}{2}$  de xícara de farinha de trigo, então teremos de colocar  $\frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$  de farinha na massa, ou seja, uma xícara inteira mais meia xícara de farinha. Mais ainda, podemos representar essa quantidade como:

$$1 + \frac{1}{2} = 1 + 0,5 = 100\% + 50\% = 150\%.$$

Vamos treinar com um exemplo. Imagine que Alice passa por uma loja e vê o aviso logo na porta: “Todos os itens com 20% de desconto!”. Ela então decide entrar e se interessa por um caderno e por um lápis. Antes do desconto, os objetos custavam R\$ 40,00 e R\$ 1,00, respectivamente.

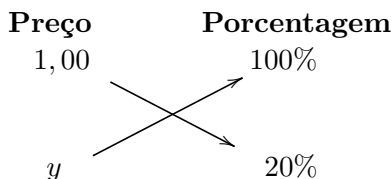
Para calcular o novo preço dos produtos, pensamos que o preço original corresponde a 100%. Precisamos descobrir quanto vale 20% desse preço, ou seja, qual o valor do desconto? Observe que quanto maior a porcentagem, maior o valor do desconto, então estamos trabalhando com uma proporção direta. Logo, podemos descobrir o desconto do caderno:





$$\Rightarrow 100 \cdot x = 40 \cdot 20 \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 20}{100} \Rightarrow x = 8,00 \text{ reais.}$$

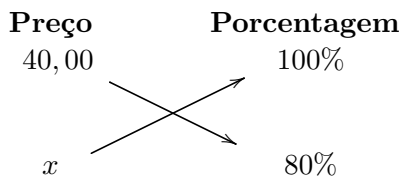
E do lápis:



$$\Rightarrow 100 \cdot y = 1 \cdot 20 \Rightarrow y = \frac{1 \cdot 20}{100} \Rightarrow y = 0,20 \text{ reais.}$$

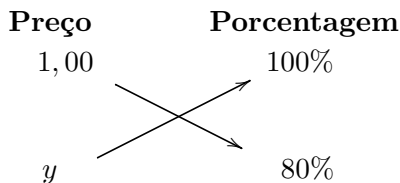
Portanto, os novos preços desses produtos serão o resultado dos preços antigos menos os descontos: R\$ 32,00 e R\$ 0,80.

Também poderíamos calcular o novo preço de forma mais direta. Sabendo que o desconto dado é de 20%, então o novo preço será 80% do preço original. Dessa forma, calculamos o preço do caderno por:



$$\Rightarrow 100 \cdot x = 40 \cdot 80 \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 80}{100} \Rightarrow x = 32,00 \text{ reais.}$$

E o preço do lápis:



$$\Rightarrow 100 \cdot y = 1 \cdot 80 \Rightarrow y = \frac{1 \cdot 80}{100} \Rightarrow y = 0,80 \text{ reais.}$$

Veja que Alice terá desconto de 8 reais no caderno, mas de apenas 20 centavos no lápis. Isso acontece porque o desconto é **proporcional** ao preço do produto: quanto mais caro custar, maior será o desconto.

Podemos, também, calcular o valor de uma porcentagem sobre uma quantidade de forma mais direta, apenas multiplicando o valor inicial pela fração da porcentagem que queremos descobrir. Por exemplo, para calcular os descontos sobre os valores dos objetos que Alice irá comprar, efetuamos

$$40,00 \cdot \frac{20}{100} = 40,00 \cdot 0,2 = 8,00 \text{ reais.}$$

$$1,00 \cdot \frac{20}{100} = 1,00 \cdot 0,2 = 0,20 \text{ reais.}$$

**De forma prática:** Podemos calcular a porcentagem de um valor de duas formas:

- Através da proporção, considerando o valor inicial como 100% e calculando de forma cruzada a proporção direta.
- Multiplicando o valor inicial pela fração relativa à porcentagem que queremos calcular.

### 6.2.1 Quantos Porcento?

Sabemos que porcentagem é uma forma de fração, e que frações representam partes de um todo. Mas, tendo uma quantidade, como saber que porcentagem ela representa do total?

Simples! Encontramos uma fração que represente essa quantidade. Podemos construí-la escrevendo no numerador a quantidade que queremos representar, e, no denominador, a quantidade total. Por exemplo, vamos calcular a porcentagem de meninas na sala de Leandro. A quantidade que buscamos é o número de meninas, e a quantidade total é o número de alunos na sala. Se há 15 meninas, e 25 alunos no total, então a fração que procuramos é  $\frac{15}{25}$ .



Agora, precisamos encontrar uma fração equivalente a essa, com denominador 100: a fração percentual dessa quantidade. Para isso, iremos dividir o valor do novo denominador pelo antigo, e multiplicar o resultado obtido pelo numerador antigo, assim encontramos o novo denominador da fração equivalente:

$$\frac{15}{25} \rightarrow \frac{(100 \div 25) \cdot 15}{100} = \frac{60}{100}.$$

Portanto, a fração equivalente a  $\frac{15}{25}$  é  $\frac{60}{100}$ , e a porcentagem de meninas na sala de Leandro é de 60%.

Outra forma de encontrar essa fração é efetuando a divisão da fração inicial, e multiplicando o resultado por  $\frac{100}{100}$ :

$$\frac{15}{25} = 15 \div 25 = 0,6 \Rightarrow 0,6 \cdot \frac{100}{100} = \frac{60}{100} = 60\%.$$

Vamos observar as resoluções de mais alguns exercícios:



**Exercício Resolvido 6.3.** Após anos de dedicação e esforço, Bruna recebeu a boa nova: aumento de 25% no seu salário! Muito animada, ela decidiu juntar dinheiro para visitar sua avó na França. Mantendo o seu gasto mensal de R\$2 250,00, ela guarda o restante do seu novo salário para a viagem e, em apenas 3 meses, conseguirá os R\$4 500,00 necessários. Se acaso o seu chefe não tivesse reconhecido o seu trabalho e não tivesse lhe concedido o aumento, quanto tempo ela levaria para juntar o dinheiro da via-

gem?

**Solução.** Vamos analisar calmamente a história, para não nos perdermos. Bruna levará 3 meses para juntar R\$4 500,00: ou seja, ela consegue guardar  $\frac{4\,500}{3} = 1\,500$  por mês. Se somarmos esse valor aos R\$2 250,00 que ela gasta normalmente, descobrimos que o novo salário de Bruna é:  $1\,500 + 2\,250 = 3\,750$  reais.

Esse é o valor *depois* do aumento de 25%. Temos que descobrir quanto ela ganhava *antes* do aumento. Note que aqui temos de raciocinar de modo *inverso*: ao invés de calcularmos a porcentagem sabendo o valor original de um produto, queremos descobrir o valor original sabendo apenas a quantia *depois* de aplicada a porcentagem.

Para resolver esse problema, pensemos do seguinte modo. A quantia original (que, por não sabermos qual é, chamaremos de  $x$ ) continua a corresponder ao 100%. Já a nova quantia (os 3 750 do

salário de Ana após o aumento) corresponde ao valor original mais os 25% de aumento:  $100\% + 25\% = 125\%$ . Assim, obtemos a seguinte proporção:

| Salário  | Porcentagem |
|----------|-------------|
| $x$      | $100\%$     |
| $3\,750$ | $125\%$     |

$$\Rightarrow x = \frac{3\,750 \cdot 100}{125} = 3\,000.$$

Ou seja, antes do aumento Bruna ganhava R\$3 000,00. Nesse caso, como ela gasta R\$2 250,00 para suas despesas cotidianas, sobriariam a cada mês  $3\,000 - 2\,250 = 750$  reais para ele guardar para a viagem, e ela levaria  $\frac{4\,500}{750} = 6$  meses para juntar todo o dinheiro necessário.

□

**Exercício Resolvido 6.4.** Diamantino colocou três litros de água e um litro de refresco em um recipiente. O refresco é composto de 20% de suco de laranja e 80% de água. Depois de misturar tudo, que porcentagem do volume final representa o suco de laranja?

**Solução.** 1 dos 4 litros no recipiente é de refresco, ou seja, o refresco representa  $\frac{1}{4}$  do total da mistura no recipiente. Entretanto, apenas  $20\% = \frac{20}{100}$  do refresco é composto de suco de laranja.

Portanto, apenas  $\frac{20}{100} \cdot \frac{1}{4} = \frac{20}{400} = \frac{1}{20}$  do total no recipiente é suco de laranja.

Agora, basta calcular a porcentagem correspondente a  $\frac{1}{20}$ . Vamos fazer isso dos dois modos vistos acima.

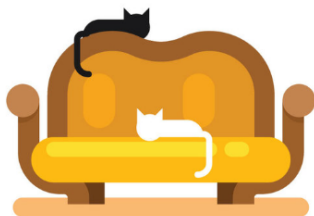
$$\bullet \quad \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{(100 \div 20) \cdot 1}{100} = \frac{5}{100};$$

$$\bullet \quad \frac{1}{20} = 1 \div 20 = 0,05 \Rightarrow 0,05 \cdot \frac{100}{100} = \frac{5}{100}.$$

Logo, a porcentagem do volume final de suco de laranja no recipiente é de 5%.

□

**Exercício Resolvido 6.5.** Os gatos Tomé e Tadeu estão dormindo no sofá. Tomé chegou antes, e quando Tadeu chegou, ocupou um quarto da superfície que havia sobrado. Os dois juntos ocupam exatamente a metade da superfície do sofá. Qual parte da superfície total está ocupada por Tadeu?



**Solução.** Vamos chamar de  $x$  o espaço do sofá que Tomé ocupava. Note que se o espaço de todo o sofá corresponde a 1, então o espaço que restou depois de Tomé ocupar  $x$  é  $1 - x$ . Tadeu ocupou  $\frac{1}{4}$  dessa quantidade, ou seja:

$$\frac{1}{4} \cdot (1 - x) = \frac{1 - x}{4}.$$

Tomé e Tadeu ocuparam juntos metade do sofá. Então:

$$x + \frac{1 - x}{4} = \frac{1}{2}.$$

Veja que através dessa equação podemos calcular o valor do espaço  $x$  ocupado por Tomé:

$$\begin{aligned}x + \frac{1-x}{4} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{4 \cdot x + 1 - x}{4} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{3x+1}{4} &= \frac{1}{2} \Rightarrow 4 \cdot \frac{3x+1}{4} = 4 \cdot \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 3x+1 &= 2 \Rightarrow 3x = 2-1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Então o espaço ocupado por Tomé é de  $\frac{1}{3}$  do sofá. Para descobrir o espaço ocupado por Tadeu, basta substituir o valor de  $x \left(\frac{1}{3}\right)$  na expressão  $\frac{1-x}{4}$ , que representa o espaço que ele ocupou. Assim:

$$\frac{1-x}{4} = \frac{1-\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

Então, o espaço ocupado por Tadeu é de  $\frac{1}{6}$  do sofá.

□

---

### Exercícios de Fixação

- Qual a porcentagem de números primos entre:
  - Os 10 primeiros números naturais?
  - Os 20 primeiros números ímpares?
  - Os 50 primeiros números naturais?
  - Os 1000 primeiros números pares?
- Encontre a porcentagem equivalente às seguintes frações:

(a)  $\frac{1}{5} :$

(d)  $\frac{49}{50} :$

(b)  $\frac{9}{30} :$

(e)  $\frac{57}{150} :$

(c)  $\frac{1}{4} :$

3. Após implementar várias medidas de incentivo ao turismo em Tangamandápio, Jaiminho, o novo prefeito da cidade, conseguiu com que ela aumentasse em 40% o turismo local em relação ao ano passado, recebendo 42 000 turistas. Quantas pessoas visitaram Tangamandápio no ano passado?
4. Em um certo país com 14 milhões de habitantes, 0,15% da população contraiu uma gripe. Quantos habitantes não contraíram essa gripe?

---

## 6.3 Juros simples

Maria recebe uma mesada de R\$10,00 de seus pais. Certo dia, ela foi à livraria e viu o livro que queria comprar em promoção, custando R\$20,00. Como sua mesada não seria suficiente para comprar o item, ela pediu o valor restante emprestado à sua mãe.



A mãe da menina concordou em emprestar o dinheiro, com a condição de que no mês seguinte, ela devolvesse o valor emprestado mais R\$1,00. Assim, Maria receberia R\$10,00 hoje e no próximo mês, pagaria R\$11,00 à mãe.

O valor cobrado a mais pela mãe de Maria é chamado de juros.

### 6.3.1 Juros

O juro é um acréscimo calculado sobre uma quantidade de dinheiro que foi investida, aplicada ou emprestada. Ele é o “lucro” que o dono do dinheiro recebe por ter emprestado ou aplicado o valor.

Essa quantidade inicial de dinheiro é chamada de **capital**. Para calcular os juros sobre o capital, utilizamos a **taxa de juros**, que aparece na forma de porcentagem. Quando isso ocorre, dizemos que os juros incidem sobre o capital.

Os juros são calculados sempre levando em consideração o **tempo** que o capital ficou aplicado ou emprestado. Após o final do período de tempo combinado, a quantia final a ser paga é composta pelo valor do capital mais o valor dos juros e é chamado de **montante**.



No caso da Maria, o capital emprestado pela mãe dela é R\$10,00, o valor do juro é de R\$1,00, o período de tempo é de 1 mês e o montante que a menina terá que devolver é  $10,00 + 1,00 = \text{R}\$11,00$ .

Existem dois tipos de juros: o **simples** e o **composto**. A seguir, vamos aprender mais sobre os juros simples.

### 6.3.2 Juros Simples

No juro simples a taxa de juros sempre incide sobre o capital emprestado ou investido.

Para calcular esse tipo de juros, devemos multiplicar o capital pela taxa de juros e pelo tempo que a operação vai durar. Utilizamos a seguinte fórmula:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Na qual:

- $J$  = juros
- $C$  = capital
- $i$  = taxa de juros
- $t$  = tempo da operação

#### Atenção!

- A taxa de juros sempre deve seguir a mesma unidade de tempo da operação. Se a operação é mensal, a taxa deve ser ao mês. Se for anual, a taxa deve estar ao ano.
- Precisamos dividir a taxa por 100 quando colocamos na fórmula, para retirar o símbolo da porcentagem.

**Exercício Resolvido 6.6.** Considere um capital de R\$20.000,00 aplicado durante 60 dias à taxa de 2% ao mês. Qual será o valor resultante dos juros?

**Solução.** Seguindo a fórmula do juro simples, temos que:

- $C = 20.000$
- $t = 60$
- $i = 2 \div 100 = 0,02$

Porém, repare que a nossa taxa está ao mês, enquanto o tempo está em dias.

Para resolver esse problema, devemos ajustar o período de tempo. Sabemos que 1 mês tem 30 dias, portanto, basta fazer  $t = 60 \div 30 = 2$ . Ou seja,  $t = 2$  meses. Aplicando na fórmula, obtemos:

$$J = 20.000 \cdot 0,02 \cdot 2$$

$$J = 800$$

O juro resultante é de R\$800,00.

□

### 6.3.3 Montante de Juros Simples

Vimos, no exemplo de Maria, que o montante é o valor do capital somado com os juros que ele rendeu após certo período de tempo. Assim, podemos escrever essa fórmula simplesmente como:

$$M = C + J$$

Na qual:

- $M$  = montante
- $J$  = juros
- $C$  = capital

**Exercício Resolvido 6.7.** O capital de R\$530,00 foi aplicado à taxa de juros simples de 3% ao mês. Qual o valor do montante após 5 meses?

**Solução.** Sabemos, do enunciado que:

- $C = 530$
- $t = 5$
- $i = 3 \div 100 = 0,03$

Sabemos também, da fórmula do montante que  $M = C + J$ . Portanto, precisamos encontrar o valor dos juros que o capital rendeu nesses 5 meses.

Aplicando a fórmula do juro simples, temos:

$$J = 530 \cdot 0,03 \cdot 5$$

$$J = 79,50$$

O juro resultante em 5 meses é de R\$79,50. Agora, basta aplicar na fórmula do montante:

$$M = 530 + 79,50$$

$$M = 609,50$$

O montante após 5 meses é de R\$609,50.

□

---

### Exercícios de Fixação

1. Quanto rendeu um capital de R\$600,00, aplicado a juros simples, com taxa de 2,5% ao mês, no final de 1 ano e 3 meses?
2. Um capital de R\$800,00, aplicado a juros simples com uma taxa de 2% ao mês, resultou no montante de R\$880,00 após um certo tempo. Qual foi o tempo da aplicação?
3. Um capital, aplicado a juros simples, rendeu, à taxa de 25% ao ano, juros de R\$1.100,00 depois de 24 meses. Qual foi esse capital?

4. Se uma mercadoria cujo preço é de R\$200,00 for paga em 6 meses, com uma taxa de 2% ao mês, quanto será pago de juros simples?
- 

### Exercícios Propostos

1. (OBMEP) Um fabricante de chocolate cobrava R\$ 5,00 por uma barra de 250 gramas. Recentemente o peso da barra foi reduzido para 200 gramas, mas seu preço continuou R\$ 5,00. Qual foi o aumento percentual do preço do chocolate desse fabricante?
2. (OBMEP) Luana quer fazer um bolo. Olhando na internet ela encontrou a seguinte receita.

| BOLO DE CHOCOLATE              |
|--------------------------------|
| INGREDIENTES                   |
| 1 copo de leite                |
| 4 colheres de chocolate em pó  |
| 3 colheres de farinha de trigo |
| 2 ovos                         |
| 1 pacote de fermento           |
| 1 pitada de sal                |

Ela viu que esta receita serve 8 pessoas. Como ela pretende fazer este bolo para repartir com seus 31 colegas de sala, quais quantidades ela deverá usar de cada ingrediente?

3. (OBMEP - 2012) A professora Luísa observou que o número de meninas de sua turma dividido pelo número de meninos dessa mesma turma é 0,48. Qual é o menor número possível de alunos dessa turma?
- (a) 24  
(b) 37  
(c) 40  
(d) 45  
(e) 48
4. (OBMEP - 2013) Ângela tem uma caneca com capacidade para  $\frac{2}{3}$  L de água. Que fração dessa caneca ela encherá com  $\frac{1}{2}$  L de água?
5. (OBMEP - 2010) Uma farmácia dá desconto de 30% sobre o preço de tabela de todos os medicamentos que vende. Ao adquirir um remédio cujo preço de tabela é R\$ 120,00, quanto reais uma pessoa irá pagar?
6. (OBM - ) Em uma certa cidade, a razão entre o número de homens e mulheres é 2:3, e entre o número de mulheres e crianças é 8:1. Qual é a razão entre o número de homens e crianças?
7. (OBMEP - 2008) Um ônibus transporta 31 estudantes, baianos e mineiros, para um encontro de participantes da OBMEP. Entre os baianos,  $\frac{2}{5}$  são homens e, entre os mineiros,  $\frac{3}{7}$  são mulheres. Entre todos os estudantes quantas são as mulheres?
8. (OBM - 2008) Uma classe tem 22 meninos e 18 meninas. Durante as férias, 60% dos alunos dessa classe foram prestar trabalho comunitário. No mínimo, quantas meninas participaram desse trabalho?



9. (FGV - 2018/BANESTES) Após fazer 80 arremessos à cesta, Marcelinho constatou que acertou 70% deles. Após fazer mais 20 arremessos, ele melhorou seu percentual de acertos para 71% do total de arremessos. Dos últimos 20 arremessos, quantos Marcelinho errou?
10. (FCC 2019/BANRISUL) Uma papelaria vende cadernos de dois tamanhos: pequenos e grandes. Esses cadernos podem ser verdes ou vermelhos. No estoque da papelaria, há 155 cadernos, dos quais 82 são vermelhos e 85 são pequenos. Sabendo que 33 dos cadernos em estoque são pequenos e vermelhos, a porcentagem dos cadernos grandes que são verdes é?
11. Terêncio recebeu a notícia de seu chefe: “por causa da quarentena, seu salário terá de ser reduzido em 25%. Mas, isso será só pelo período de um ano: depois disso, você terá um aumento de 25% e, assim, voltará a receber o que recebe hoje”. Explique matematicamente por que Terêncio foi enganado pelo chefe.
12. (Matemática, Compreensão e prática - Ênio Silveira) Em uma reserva ecológica há 100 diamantes de gould:
- 70% têm a cabeça vermelha (tipo V);
  - 30% têm a cabeça laranja (tipo L);
  - 40% dos pássaros tipo V têm a parte frontal superior lilás;
  - 30% dos pássaros tipo L têm a parte frontal superior lilás.



- Quantos desses diamantes de gould têm a parte frontal superior lilás?
13. Num certo armazém, uma dúzia de ovos e 10 maçãs tinham o mesmo preço. Depois de uma semana, o preço dos ovos subiu 10% e o da maçã caiu 2%. Quanto se gastará a mais na compra de uma dúzia de ovos e 10 maçãs, em porcentagem?
  14. (OBM - 2005) Há três anos, a população de Pirajussaraí era igual à população que Tucupira tem hoje. De lá para cá, a população de Pirajussaraí não mudou, mas a população de Tucupira cresceu 50%. Hoje, a soma das populações das duas cidades é de 9 000 habitantes. Qual era a soma dessas duas populações há três anos?
  15. (Mackenzie - 2006, adaptada) Trezentos estudantes foram classificados quanto à altura em “muito altos” ou “médios”. Sabe-se que 40% dos “muito altos” e 5% dos “médios” são míopes, totalizando 50 estudantes. Qual o número de estudantes “médios” sem miopia?
  16. (Portal da Matemática - OBMEP) Na cidade de Pulgacicaba alguns animais são realmente esquisitos. Dez por cento dos cães pensam que são gatos e dez por cento dos gatos pensam que são cães. Todos os outros animais são perfeitamente normais. Certo dia, todos os cães e gatos de Pulgacicaba foram testados por um psicólogo, verificando-se então que 20% deles pensavam que eram gatos. Que porcentagem dos animais

eram realmente cães?

17. (Portal da Matemática - OBMEP) Um feirante vende ovos brancos e vermelhos. Em janeiro de um determinado ano, do total de vendas realizadas, 50% foram de ovos brancos e os outros 50% de ovos vermelhos. Nos meses seguintes, o feirante constatou que, a cada mês, as vendas de ovos brancos reduziram-se 10% e as de ovos vermelhos aumentaram 20%, sempre em relação ao mês anterior. Ao final do mês de março desse mesmo ano, qual o percentual de vendas de ovos vermelhos, em relação ao número total de ovos vendidos em março?
18. (OBMEP - 2020) Três ladrões A, B e C repartiram em partes iguais o resultado de um roubo. Na primeira noite, enquanto C dormia, A e B retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na segunda noite enquanto A dormia, B e C retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na terceira noite, enquanto B dormia, A e C retiraram metade do que ele tinha e repartiram em partes iguais entre si. Na manhã seguinte, eles se separaram para sempre. Quando B contou seu dinheiro, percebeu que possuía R\$10.000,00. Determine a quantia inicial que foi roubada pelos ladrões.
19. Joana dispunha de três horas para fazer um passeio quando saiu de casa numa bicicleta, percorrendo 12 km por hora. Entretanto, um dos pneus da bicicleta furou. Imediatamente, Joana voltou a pé para casa pelo mesmo trajeto, e percorrendo 4 km por hora. Ao final, percebeu que gastara exatamente o tempo que dispunha para fazer todo o passeio. Quantos quilômetros Joana percorreu a pé depois que o pneu da bicicleta furou?



## Aula 7

# Probabilidade



Um conceito muito importante na Matemática é o de **probabilidade**. A probabilidade é a chance de um evento ocorrer ou de gerar um determinado resultado. Como por exemplo, a chance de um dado cair com alguma determinada face para cima, a chance de tirar determinada carta de um baralho ou a chance de ganhar na loteria.

Vamos imaginar a seguinte situação: Fulana e Beltrana são irmãs e precisam decidir para ver quem vai andar no banco da frente do carro. Para resolver essa disputa, sua mãe sugere que resolvam isso jogando uma moeda para cima. Para isso, cada uma deve escolher um lado da moeda e a face que cair voltada para cima indica quem ganhou.

Nesse caso, Fulana opta por cara e Beltrana fica com coroa. Note que temos somente dois resultados possíveis, cara ou coroa. Eles formam o conjunto do nosso **espaço amostral** denotado por  $\Omega$ . O espaço amostral é o conjunto que contém todos os resultados possíveis de um determinado evento. No caso do lançamento de uma

moeda, o espaço é dado por:

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$$

Se estivéssemos nos referindo ao lançamento de um dado comum, os resultados possíveis seriam as faces desse dado. Então, nesse caso, teríamos que:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Podemos notar que nos exemplos citados acima, apesar de sabermos os possíveis resultados, não conseguimos determinar qual deles vai acontecer. Essa incerteza pode ser observada em eventos como: tirar uma carta do baralho, resultado de uma roleta, resultado da Mega Sena. Por causa dessa incerteza, esses eventos são chamados de **eventos aleatórios**.

Existem também eventos em que, pelo contrário, conseguimos determinar o que vai acontecer com clareza. Nesses casos, temos certeza de que algo vai ocorrer ou de que não vai. Por exemplo, temos certeza que, se estivermos no nível do mar e aquecermos a água a 100 °C, ela vai entrar em estado de ebulição. Isso é um exemplo de situação que chamamos de **evento determinístico**.



Para além dessas duas classificações, é muito importante entender o que são **eventos mutuamente exclusivos**. Dado um evento com um ou mais resultados possíveis, ele será dito um evento mutuamente exclusivo caso seus resultados se anulem entre si. Ou seja, se um resultado ocorrer, os outros não ocorrem numa mesma tentativa.

Por exemplo, o lançamento de uma moeda é mutuamente exclusivo. Ao lançarmos o objeto teremos apenas um resultado. Ou ela cai com a face cara para cima ou com a face coroa. Não é possível que ambos os lados da moeda caiam para cima após um mesmo lançamento. O mesmo ocorre com lançamento de dados

Voltando ao exemplo das irmãs, antes de aceitar a proposta, Fulana quis saber qual era sua chance de ganhar a disputa. Ela reparou que existiam dois resultados possíveis e que, como a moeda é honesta, ou seja, as duas faces têm a mesma chance de cair voltada para cima, independente da opção que escolhesse, o resultado favorável representaria 1 dos 2 resultados possíveis. Sendo assim podemos observar que a fração que representa a possibilidade de Fulana vencer representa:

$$P = \frac{1(\text{resultados favoráveis})}{2(\text{resultados possíveis})} = 0,5 = 50\%.$$

De forma geral, a probabilidade (P) de um evento A acontecer é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Resultados favoráveis}}{\text{Resultados possíveis}}.$$

## 7.1 Regra do *e* e do *ou*

Imagine que Fulana quer saber qual a chance de ir duas vezes seguidas no banco da frente. Para isso, precisamos descobrir qual a chance de tirarmos *cara* nem dois lançamentos seguidos.



Sabemos que a chance de a primeira moeda sair com cara é de uma em duas, portanto  $\frac{1}{2} = 0,5$ , ou então, 50%. Ora, o segundo lançamento também tem 50% de possibilidade de dar cara. Para descobrirmos qual a possibilidade de isso acontecer em sequência, usamos a regra do *e*.

### 7.1.1 Regra do *e*

A probabilidade de dois ou mais eventos independentes ocorrerem sequencialmente é igual ao produto das probabilidades desses

eventos ocorrerem separadamente. Ou seja, quando queremos descobrir a probabilidade de dois acontecimentos independentes ocorrerem em sequência **multiplicando** as chances de cada acontecimento isolado acontecer.

Vamos ver na prática: suponha que Fulana quer saber qual a chance de ir duas vezes seguidas no banco da frente. Como vimos anteriormente, a chance de ela ir na frente é a chance de ganhar no cara e coroa, ou seja, 50%. Por outro lado, podemos abordar a chance de ela ir na frente duas vezes, como a chance de ela ir na primeira e na segunda vez. Sendo assim, a chance de ela ir na frente duas vezes é:

$$50\% \cdot 50\% = 0,5 \cdot 0,5 = 0,5^2 = 0,25 = 25\%.$$

Portanto, as chances de jogarmos a moeda duas vezes e, em ambos os lançamentos virarem cara são de 25% ou  $\frac{1}{4}$  (uma em quatro).

Esse raciocínio se aplica também a eventos que acontecem simultaneamente. Se tivermos duas moedas e quisermos descobrir qual a chance de tirarmos *cara* nas duas, precisamos ver qual a chance de uma e outra saírem com cara. Ou seja:

$$50\% \cdot 50\% = 0,5 \cdot 0,5 = 0,5^2 = 0,25 = 25\%.$$

---

## Exercícios de Fixação

1. Calcule as probabilidades que se pede:
  - a) Qual a chance de em um lançamento obtermos a face de número 4 em um dado comum?
  - b) Qual a chance de em um lançamento obtermos a face de número 14 em um dado de 20 lados?
  - c) Qual a chance de lançarmos dois dados simultaneamente e obtermos dois 3?

- d) Qual a chance de tirarmos um rei de ouros de um baralho convencional?
  - e) Qual a chance de tirarmos um rei de espada do baralho seguido de um 10 de copas?
  - f) Qual a chance de lançarmos uma moeda 5 vezes e conseguirmos exatamente 3 resultados cara?
- 



Imagine agora que temos uma pirâmide e queremos construir uma janela em um de seus lados. Primeiro, numeramos os lados da pirâmide como *lado 1*, *lado 2*, *lado 3* e *lado 4* (repare aqui que não podemos considerar a base da pirâmide, pois ela está no chão e não é possível construir uma janela ali). Queremos então saber quais as chances de a janela ser construída ou no *lado 1* ou no *lado 3*.

Temos que a chance de construir a janela no *lado 1* é de uma em quatro, portanto,  $\frac{1}{4}$ . A chance de construirmos a janela no *lado 3* também é  $\frac{1}{4}$ .

Porém, repare que se construirmos a janela no *lado 1*, não há a possibilidade de construí-la no *lado 3* ao mesmo tempo e vice-versa. Portanto, para calcularmos as chances de construir em um ou outro lado, vamos utilizar a regra do *ou*.

### 7.1.2 Regra do *ou*

Dados dois eventos que se excluem mutuamente, a probabilidade de, pelo menos, um deles acontecer é igual à soma das probabilidades com que cada evento ocorre. Isto é, quando temos dois acontecimentos **mutuamente exclusivos**, determinamos as chan-

ces de pelo menos um deles acontecer **somando** as chances de cada acontecimento isolado ocorrer.

No caso da janela, sabemos que a possibilidade de ela ser feita em cada um dos lados é de  $\frac{1}{4} = 0,25$ . Sabemos também que apenas uma janela será construída, portanto esse é um evento mutuamente exclusivo. Com essas informações, podemos descobrir a chance de a janela ser construída no lado 1 ou no lado 3 somando a possibilidade da ocorrência de cada um dos resultados desejados:

$$0,25 + 0,25 = 0,5$$

Ou seja, a chance de construir a janela no *lado 1* ou no *lado 3* é de 0,5 ou  $\frac{1}{2}$  (uma em duas).

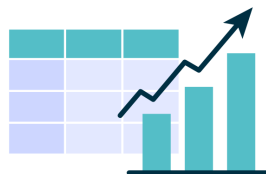
---

### Exercícios de Fixação

1. Calcule as probabilidades que se pede:
  - a) Qual a chance de em um lançamento obtermos uma face de número par em um dado comum?
  - b) Qual a chance de em um lançamento obtermos uma face de número ímpar em um dado de 20 lados?
  - c) Qual a chance de lançarmos dois dados simultaneamente e obtermos dois números iguais?
  - d) Qual a chance de tirarmos um rei de um baralho convencional?
  - e) Qual a chance de tirarmos um rei de um baralho convencional seguido de um 10?
  - f) Se retirarmos uma carta de número 9 de um baralho comum, qual a chance de ele ser de um naipe vermelho?
  - g) Se retirarmos uma carta qualquer de um baralho comum, qual a chance de ela ser de um naipe preto?

## 7.2 Gráficos e tabelas

Dois instrumentos que muitas vezes estão atrelados à probabilidade são os gráficos e as tabelas. Isso se dá, pois, quando falamos de probabilidade, trabalhamos com dados e tais informações podem ser organizadas em forma gráfica para melhor entendimento.



Gráficos são ferramentas utilizadas para organizar dados de forma visual, ou seja, são ferramentas utilizadas para agilizar a compreensão de dados. Essas ferramentas se mostram muito vantajosas, pois possibilitam a compreensão das correlações entre dados expostos num mesmo esquema.

Por sua vez, as tabelas são uma forma de representação de dados por meio de linhas e/ou colunas. Chamamos essa estrutura, de linhas e colunas, de estrutura matricial. Esse tipo de representação também é muito utilizado para representar a correlação de dados, pois expressa suas relações de forma organizada.

|                  |  |
|------------------|--|
| Apenas cachorro: |  |
| Apenas gato:     |  |
| Gato e cachorro: |  |
| Outros:          |  |

Ambas as ferramentas citadas possuem vantagens e desvantagens para sua aplicação ao organizarmos dados coletados. Vamos buscar entender essas diferenças por meio de um exemplo. Para um trabalho da escola, Ana tinha que realizar uma pesquisa e esboçá-la na forma de uma tabela e em forma gráfica. Ela decidiu que gostaria de pesquisar

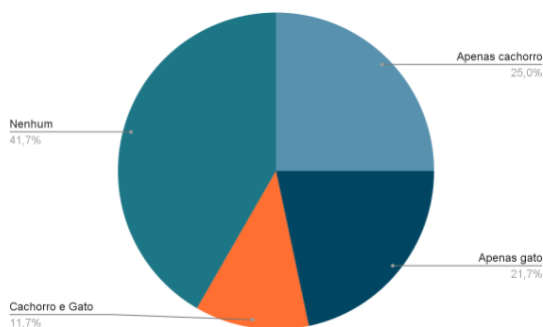
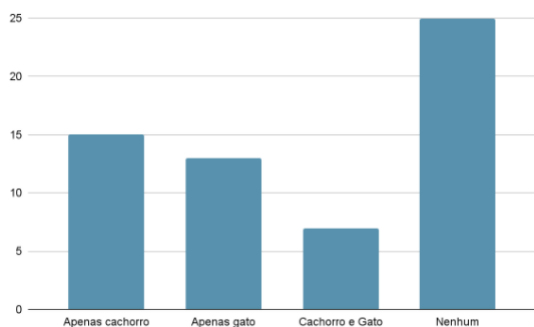
quais os animais de estimação de seus colegas de sala. Após questionar seus colegas, Ana obteve os resultados ao lado.

Entretanto, para apresentar a pesquisa à sua professora, Ana precisa organizar esses dados em forma de tabela e de gráfico. Ela

resolveu montar a tabela com seus dados primeiro, pois assim teria um instrumento organizado para consultar enquanto criava seus gráficos.

| Categoria       | Quantidade |
|-----------------|------------|
| Apenas cachorro | 15         |
| Apenas gato     | 13         |
| Gato e Cachorro | 7          |
| Nenhum          | 25         |

Na etapa de desenvolvimento do gráfico, Ana não consegue decidir se prefere fazer um gráfico em barras ou em pizza. Então resolve fazer os dois para decidir.

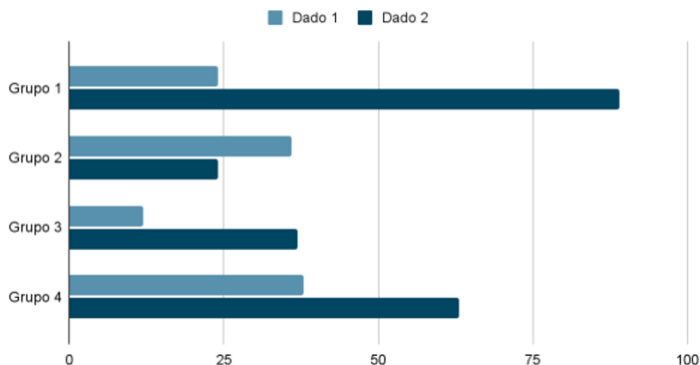


Com os gráficos prontos ela observou que ambos poderiam ser apresentados para sua professora, pois apresentam de forma clara os resultados de sua pesquisa.

### 7.2.1 Alguns tipos de gráfico

Você sabia que existem diversas formas de expressar informações por meio de gráficos? Nessa aula iremos aprender um pouquinho mais sobre os gráficos de barras, de linhas e o gráfico de pizza. Porém, para isso, precisamos definir alguns termos que serão muito utilizados. Observe o gráfico abaixo.

Exemplo de gráfico



O **título** de um gráfico é a parte que explica quais informações estão sendo apresentadas por esta ferramenta e como elas estão relacionadas. No exemplo da Ana, ela poderia nomear seus gráficos como “Animais de estimação dos alunos da turma X”. Dessa forma, estaria explícito ao leitor quais informações estão sendo expostas.

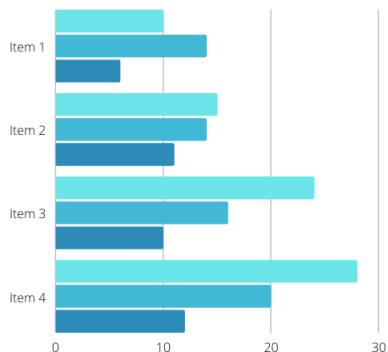
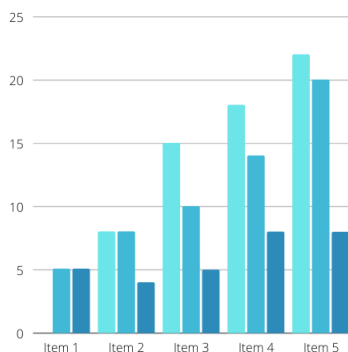
Os **eixos** são a parte do gráfico onde se encontram as escalas ou nomenclaturas de cada um dos dados. Em gráficos de colunas por exemplo, temos dois eixos, o vertical e o horizontal. Entretanto, gráficos de pizza não apresentam eixos. No exemplo anterior, o eixo vertical apresenta à qual grupo as informações se referem e o eixo horizontal, a quantidade relacionada aos dados.

Por fim, a **legenda** é uma parte muito importante. Gráficos mais complexos, que apresentam mais de 2 grandezas relacionadas, utilizam esse recurso para explicitar como cada uma das informações está sendo apresentada. Legendas de gráficos podem relacionar cores, símbolos ou, até mesmo, formatos com dados distintos. No nosso exemplo, você pode observar a legenda logo acima da estrutura principal do gráfico. Ela relaciona os tons de azul aos dados coletados.

### 7.2.2 Gráficos de barras

Os gráficos de barras são um dos gráficos mais tradicionais que utilizamos. Esse tipo de gráfico possui duas formas de apresentação, uma com as barras na vertical e uma com as barras na horizontal. Sua aplicação é muito eficaz, pois facilita a associação entre as duas grandezas que estão sendo associadas.

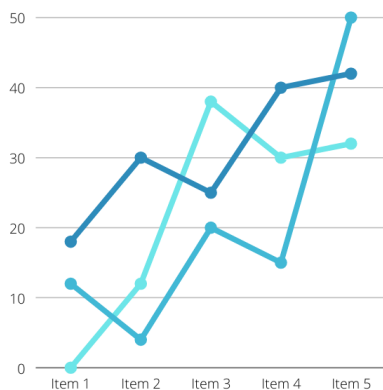
Para interpretar os dados que um gráfico de barras nos apresenta, devemos, primeiramente, interpretar seu título. Em seguida, observamos onde cada uma das informações está sendo apresentada. Para isso, você deve se atentar às descrições dos eixos do esquema apresentado. Sabendo onde cada informação está, você pode extrair o conteúdo necessário. Os gráficos abaixo são exemplos genéricos de gráficos de barras, por isso, não apresentam título nem legenda.



### 7.2.3 Gráficos de linha

Também utilizado para relacionar grandezas, os gráficos de linhas são muito aplicados na demonstração da evolução de dados. Um exemplo muito comum de sua utilização é nas pesquisas de intenção de voto apresentadas em jornais.

Nesse tipo de gráfico, você poderá observar pontos flutuantes ligados por linhas contínuas. Cada ponto relaciona as grandezas explícitas nos eixos e cada linha apresenta a sequência de um dos valores. Observe a imagem:

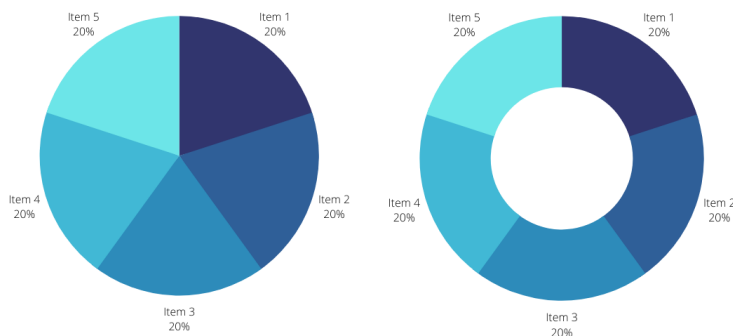


Para interpretar este gráfico, precisamos entender que cada uma das linhas coloridas representa um item que oscila de acordo com a mudança dos dados apresentados no eixo horizontal. Esse é um dos diferenciais do gráfico de linhas, um de seus eixos apresenta dados sequenciais, ou seja, esse tipo de gráfico apresenta dados que evoluem a medida que uma de suas grandezas se modifica.

### 7.2.4 Gráficos de pizza

Por sua vez, os gráficos de pizza apresentam apenas um tipo de dado. Falando assim, parece que os outros são muito mais vantajosos. Entretanto, o gráfico de pizza é muito utilizado, pois sua representação facilita a observação da proporção entre os dados. Por meio

de um gráfico de pizza, podemos observar rapidamente quais os valores mais e menos expressivos em meio a uma quantidade grande de informação.



Os exemplos acima também mostram que gráficos de pizza podem ser feitos de forma vazada (mais parecidos com uma rosquinha!).

---

### Exercícios de Fixação

1. Agora é sua vez, faça uma pesquisa sobre os animais de estimação dos seus colegas e desenvolva a melhor representação gráfica, na sua opinião, para expressar os resultados. Depois disso, responda:
  - a) Você precisou adicionar categorias novas à sua pesquisa?
  - b) Qual a matriz que representa os dados coletados por você?
  - c) Qual o tipo de gráfico utilizado para expressar seus resultados?
  - d) Por que você julgou este gráfico como sendo o mais vantajoso?

### Exercícios Propostos

1. (OBMEP) Qual a probabilidade de, aleatoriamente, escolhermos um número par dentre os elementos do seguinte conjunto?

$$\{1, 2, 3, 4, \dots, 21, 22, 23\}$$

2. (OBMEP) Em uma urna há 72 bolas idênticas, mas com cores diferentes. Há bolas brancas, vermelhas e pretas. Ao sortearmos uma bola da urna, a probabilidade dela ser branca é  $\frac{1}{4}$  e a probabilidade dela ser vermelha é  $\frac{1}{3}$ . A diferença entre o número de bolas pretas e o número de bolas brancas na urna é:

(a) 12      (b) 10      (c) 8      (d) 6      (e) 4

3. ● (OBMEP - 2017) Uma escola fez uma pesquisa com todos os alunos do sexto ano para verificar se eles gostavam de banana, maçã ou laranja. Cada aluno assinalou pelo menos uma dessas três frutas.



A tabela abaixo apresenta os resultados da pesquisa.

|         | 6º A | 6º B | 6º C |
|---------|------|------|------|
| Banana  | 20   | 15   | 14   |
| Maçã    | 12   | 20   | 12   |
| Laranja | 18   | 5    | 10   |

Por exemplo, 20 alunos do 6.ºA assinalaram que gostam de banana. Quantos alunos há, no mínimo e no máximo, no sexto ano dessa escola?

- (a) No mínimo 54 e no máximo 126 alunos.  
(b) No mínimo 54 e no máximo 58 alunos.  
(c) No mínimo 27 e no máximo 54 alunos.  
(d) No mínimo 27 e no máximo 126 alunos.  
(e) No mínimo 31 e no máximo 58 alunos.
4. (OBMEP) Ao sortearmos duas peças de um dominó comum, qual é a probabilidade de que essas peças tenham um número em comum?
5. (OBMEP) Sandra comprou uma caixa de balas sortidas. Na caixa, havia 8 balas de sabor menta, 6 balas de sabor morango, 6 balas de sabor caramelo e 4 balas de sabor tangerina. A probabilidade de Sandra escolher na caixa, ao acaso, uma bala de tangerina é:
- (a)  $\frac{1}{7}$       (b)  $\frac{1}{6}$       (c)  $\frac{1}{5}$       (d)  $\frac{1}{4}$       (e)  $\frac{1}{3}$
6. (OBMEP - 2015) Os 1641 alunos de uma escola devem ser distribuídos em salas de aula para a prova da OBMEP. As capacidades das salas disponíveis e suas respectivas quantidades estão informadas na tabela abaixo:

| Capacidade máxima de cada sala | Quantidade de salas disponíveis |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 30 alunos                      | 30                              |
| 40 alunos                      | 12                              |
| 50 alunos                      | 7                               |
| 55 alunos                      | 4                               |

Qual é a quantidade mínima de salas que devem ser utilizadas para essa prova?

- (a) 41      (b) 43      (c) 44      (d) 45      (e) 47

7. ▲ Os alunos do professor Augusto Matraga fizeram quatro provas bimestrais no ano. O professor pede a cada aluno que escolha três dessas provas e depois calcula a média anual, até a primeira casa depois da vírgula, pela fórmula  $M = \frac{10 \cdot A}{B}$  onde  $M$  é a média anual,  $A$  é o total de questões respondidas corretamente nas três provas escolhidas e  $B$  é o total de questões das três provas escolhidas. Veja os resultados do aluno Quim durante o ano:

| Resultado do Quim                 |    |    |    |    |
|-----------------------------------|----|----|----|----|
| Bimestre                          | 1º | 2º | 3º | 4º |
| Questões respondidas corretamente | 20 | 6  | 32 | 40 |
| Número de questões na prova       | 20 | 10 | 40 | 40 |

- (a) Qual será a média anual do Quim se ele escolher as provas dos três primeiros bimestres? E se ele escolher as provas dos três últimos?
- (b) Faça uma tabela com a porcentagem de acertos do Quim em cada prova para cada bimestre.
- (c) Quim acha que sua média anual será a mais alta possível se ele escolher as três provas com as maiores porcentagens de acerto. Ele está certo? Por quê?
8. ▲ (OBMEP 2015 - 2º fase) Uma tabela com linhas e colunas numeradas de 1 a 100 foi preenchida da seguinte forma:
- na linha 1, todas as casas foram preenchidas com 1;
  - na linha 2, as casas pertencentes a colunas de número par foram preenchidas com 1 e as demais, com 0;
  - na linha 3, as casas pertencentes a colunas múltiplas de três foram preenchidas com 1 e as demais, com 0;

- continuando, cada uma das demais linhas da tabela foi preenchida com o algarismo 1 nas casas de colunas múltiplas do número correspondente à linha, e com 0 nas demais.

|        |     | COLUNAS |     |     |     |     |     |     |     |     |  |
|--------|-----|---------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|--|
|        |     | 1       | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | ... | 99  | 100 |  |
| LINHAS | 1   | 1       | 1   | 1   | 1   | 1   | 1   | ... | 1   | 1   |  |
|        | 2   | 0       | 1   | 0   | 1   | 0   | 1   | ... | 0   | 1   |  |
|        | 3   | 0       | 0   | 1   | 0   | 0   | 1   | ... | 1   | 0   |  |
|        | 4   | 0       | 0   | 0   | 1   | 0   | 0   | ... | 0   | 1   |  |
|        | 5   | 0       | 0   | 0   | 0   | 1   | 0   | ... | 0   | 1   |  |
|        | 6   | 0       | 0   | 0   | 0   | 0   | 1   | ... | 0   | 0   |  |
|        | ... | ...     | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |  |
|        | 99  | 0       | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... | 1   | 0   |  |
|        | 100 | 0       | 0   | 0   | 0   | 0   | 0   | ... | 0   | 1   |  |

- (a) Qual é o algarismo que foi escrito na linha 7 e coluna 21?
- (b) Qual é a soma dos algarismos da linha 23?
- (c) Qual é a soma dos algarismos da coluna 98?
- (d) Em quais colunas a soma dos algarismos é ímpar? Explique sua resposta.
9. ▲ (OCM 1990) A pesquisa realizada com as crianças de um conjunto habitacional, que apurou as preferências em relação aos três programas de televisão: *Alegre Amanhã* (designado por A), *Brincolândia* (designado por B) e *Criança Feliz* (designado por C) indicou os seguintes resultados:

| Prog | A   | B   | C   | A e B | A e C | B e C | A,B e C | Nenhum |
|------|-----|-----|-----|-------|-------|-------|---------|--------|
| Pref | 100 | 150 | 200 | 20    | 30    | 40    | 10      | 130    |

Pergunta-se:

- (a) Quantas crianças foram consultadas?
- (b) Quantas crianças apreciam apenas um programa?

(c) Quantas crianças apreciam mais de um programa?

10. ▲ (Enem-Editada) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir.

|                 |                                                                  |
|-----------------|------------------------------------------------------------------|
| Hipoglicemia    | taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL                        |
| Normal          | taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL  |
| Pré-diabetes    | taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL |
| Diabetes Melito | taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL |
| Hiperglicemia   | taxa de glicose maior que 250 mg/dL                              |

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300 mg/dc. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%. Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, em qual categoria o paciente se encontrava?

11. ♦ Na tabela abaixo vemos uma parte dos resultados das eleições num certo país, na qual os percentuais se referem ao número total de eleitores.

| Partidos | AA  | BB  | CC  | Outros partidos e votos nulos |
|----------|-----|-----|-----|-------------------------------|
| Turnos   |     |     |     |                               |
| 1º turno | 39% | 31% | 20% | 10%                           |
| 2º turno | ?   | ?   | 0   | ?                             |

No segundo turno, todos os eleitores que votaram no partido AA mantiveram seus votos e o mesmo ocorreu com os eleitores do partido BB. Dos que votaram no partido CC no primeiro turno, 40% votou no partido AA e os demais no partido BB. Dos que haviam votado em outros partidos ou anulado o seu voto, 60% continuou sem votar em AA ou BB e o restante votou parte em AA e parte em BB. Dessa forma, é correto afirmar que:

- (a) AA venceu com mais de 47% dos votos.
  - (b) BB venceu com 47% dos votos.
  - (c) AA venceu com 51% dos votos.
  - (d) BB venceu com mais de 43% dos votos.
  - (e) Nenhuma das afirmações anteriores decorre das informações dadas.
12. No Parque Barigui, em Curitiba, há muitas capivarinhas. Elas gostam de caminhar em diferentes horários do dia: umas caminham apenas pela manhã, outras, apenas pela tarde, e outras, apenas pela noite. Algumas capivarinhas gostam tanto de caminhar que o fazem em mais de um horário no dia. Já outras, as preguiçosas, não caminham em nenhum horário. Ana, frequentadora assídua do Jardim Botânico, conhece todas elas, e em que horário cada uma sai para caminhar. Ela faz as seguintes observações:



- A porcentagem de capivarinhas que caminham em apenas um horário é a mesma das que caminham em mais de um horário.
- A porcentagem de capivarinhas que caminham em apenas um horário é a mesma nos três horários do dia.
- A porcentagem de capivarinhas que caminham apenas de manhã é a mesma das que caminham apenas de manhã e de noite: 15%.

Monte um gráfico que apresente a porcentagem de capivarinhas que não caminha ou que caminha em cada um dos horários citados.

13. (OBMEP) Suponha que dezesseis seleções, entre as quais Brasil e Argentina, vão participar de um torneio. Serão formados quatro grupos de quatro seleções, através de sorteio. Qual é a probabilidade de que Brasil e Argentina fiquem no mesmo grupo?
14. (OBMEP) Uma prova é composta por 5 questões de múltipla escolha com 3 alternativas cada uma. Qual a probabilidade de um candidato responder no “chute” a todas as questões e:
  - (a) acertar as três primeiras e errar as duas últimas?
  - (b) acertar exatamente três questões?
  - (c) acertar pelo menos três questões?
15. (OBMEP- 2012) André, Bianca, Carlos e Dalva querem sortear um livro entre si. Para isto, colocam 3 bolas brancas e 1 preta em uma caixa e combinam que, em ordem alfabética de seus nomes, cada um tirará uma bola, sem devolvê-la à caixa. Aquele que tirar a bola preta ganhará o livro.
  - (a) Qual é a probabilidade de que André ganhe o livro?
  - (b) Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?

Para sortear outro livro entre eles, André sugeriu usar 2 bolas pretas e 6 brancas. Como antes, o primeiro que tirar uma bola preta ganhará o livro; se as primeiras quatro bolas saírem brancas, eles continuarão a retirar bolas, na mesma ordem. Nesse novo sorteio:

- (c ) Qual é a probabilidade de que Dalva ganhe o livro?
16. (OBMEP) Quatro dados não-viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?
17. (OBMEP- 2011) Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?
18. (OBMEP- 2013) O professor Guilherme criou três estranhas máquinas. A máquina A transforma um gato em um cachorro com probabilidade  $1/3$ . A máquina B transforma um gato em um cachorro com probabilidade  $2/5$ . A máquina C transforma um gato em um cachorro com probabilidade  $1/4$ . E se o animal é um cachorro, nenhuma das máquinas faz transformação alguma.
- O professor Guilherme colocou um gato na máquina A, depois colocou o animal resultante da máquina A na máquina B e, por fim, colocou o animal resultante da máquina B na máquina C. Qual a probabilidade de ter saído um cachorro da máquina C?

# Referências Bibliográficas

1. *American Invitational Mathematics Examination*. Disponível em: [www.maa.org/](http://www.maa.org/). Acesso em: 02 de fev. de 2022.
2. *Canva*. Disponível em: <https://www.canva.com>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
3. *Concursos FCC*. Disponível em: [www.concursosfcc.com.br/index.html](http://www.concursosfcc.com.br/index.html). Acesso em: 02 de fev. de 2022.
4. ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: [www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao](http://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao). Acesso em: 02 de fev. de 2022.
5. *FGV Conhecimento*. Disponível em: [conhecimento.fgv.br](http://conhecimento.fgv.br). Acesso em: 02 de fev. de 2022.
6. FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia. *Círculos Matemáticos – A experiência Russa*. **Rio de Janeiro, RJ: IMPA**, 2010.
7. *Geogebra*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
8. *Instituto Militar de Engenharia*. Disponível em: <http://www.ime.eb.mil.br/>. Acesso em: 02 de fev. 2022.
9. *Mackenzie*. Disponível em: [www.mackenzie.br](http://www.mackenzie.br). Acesso em: 02 de fev. de 2022.

10. *Núcleo Olímpico de Incentivo ao Conhecimento*. Disponível em: <https://noic.com.br/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
11. *Olimpíada Brasileira de Matemática*. Disponível em: <https://www.obm.org.br/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
12. *Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas*. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
13. *Olimpíada Paranaense de Matemática*. Disponível em: <http://www.mat.ufpr.br/oprm/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
14. *Olimpíada Paulista de Matemática*. Disponível em: <https://www.opm.mat.br/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
15. *Pixabay*. Disponível em: <https://pixabay.com/pt/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
16. *PNGWING*. Disponível em: <https://www.pngwing.com/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.
17. SILVEIRA, Ênio; MARQUES, Cláudio. *Matemática: compreensão e prática*. **São Paulo: Moderna**, v. 1, 2015.
18. *Unsplash*. Disponível em: <https://unsplash.com/>. Acesso em: 28 jan. de 2022.